Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Marcel Brelot

Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 2 (1958), exp. n° 1, p. 1-40
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1958__2__A1_0>

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

AXIOMATIQUE DES FONCTIONS HARMONIQUES ET SURHARMONIQUES DANS UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT [1]

par Marcel BRELOT

I. Rappels et compléments.

1. Nous reprenons l'exposé de l'année précédente, inspiré par l'axiomatique de Doob. Nous allons modifier un peu les axiomes de base, compléter les parties traitées, et poursuivre beaucoup le développement. On abrègera au début en renvoyant aux parties ou démonstrations qui subsistent telles quelles.

Espace fondamental Ω : localement compact, non compact, connexe et localement connexe. - On le compactifie selon $\bar{\Omega}$ par adjonction du point d'Alexandroff, et on utilisera la topologie de $\bar{\Omega}$.

La théorie semblant devenir stable, nous adopterons la dénomination "harmonique" et "surharmonique" dans le cas général.

Fonctions harmoniques. - Dans chaque ouvert partiel sont données des fonctions réelles finies continues, dites harmoniques, formant un espace vectoriel réel et satisfaisant aux axiomes suivants :

AXIOME I. - Si u est harmonique dans ω ouvert, u est harmonique dans tout ouvert partiel.

Si u est définie dans ω ouvert et harmonique dans un voisinage ouvert de chaque point, elle est harmonique dans ω.

AXIOME II. - Appelons régulier tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ tel que toute fonction réelle f finie continue sur la frontière ω^* admette un prolongement continu dans $\bar{\omega}$, harmonique dans ω, avec la condition qu'il soit toujours unique, et d'autre part $\geqslant 0$ si $f \geqslant 0$.

---

[1] Rédaction développant et complétant un peu (en 1959), trois conférences du séminaire (1958) et trois notes aux C. R. Acad. Sc. Paris (t. 245, 1957, p. 1688-1690, t. 246, 1958, p. 2334-2337 et p. 2709-2712) dont quelques points sont rectifiés, et améliorés grâce à l'emploi de quelques résultats et démonstrations de Madame HERVÉ.

Alors ce prolongement $H_f(x)$ s'exprime comme une intégrale de Radon $\int f(y)\, d\rho_x^\omega(y)$ (ρ_x^ω dite mesure harmonique relative à ω et x). Noter que si δ est un domaine composant de ω, il est régulier et H_f^δ (où f désigne la restriction à δ^*) y vaut H_f^ω de sorte que $d\rho_x^\omega$ vaut $d\rho_x^\delta (x \in \delta)$.

L'axiome II exprime qu'il existe une base de domaines réguliers.

AXIOME III. - Dans tout domaine, un ordonné filtrant croissant de fonctions harmoniques tend vers $+\infty$ ou une fonction harmonique.

REMARQUE. - Lorsque Ω est à base dénombrable, il y a équivalence avec le seul énoncé pour des suites croissantes.

Car d'après le lemme topologique de Choquet, on déduit alors de l'ordonné filtrant donné, une suite croissante telle que toute majorante semi-continue supérieure majore le sup ou limite S de la famille donnée. La limite de la suite, étant harmonique, majore, donc égale S.

Forme équivalente de l'axiome III. - Pour tout domaine régulier ω (ou seulement ceux d'une base) la sommabilité-$d\rho_x^\omega$ sur ω^* est indépendante de $x \in \omega$, et pour toute fonction sommable-$d\rho_x^\omega$, $\int f\, d\rho_x^\omega$ est continue de x (et alors harmonique).

Remarquons d'abord que l'axiome III entraîne que toute fonction harmonique ≥ 0 dans un domaine y est partout > 0 ou partout $= 0$ (c'est-à-dire qu'une fonction harmonique ne peut admettre un extremum nul en un point sans être nulle au voisinage).

Il suffit si $u \geq 0$, de considérer nu et sa limite qui est $+\infty$ (et alors $u > 0$) ou harmonique (et alors $u = 0$).

Partons alors de l'axiome III ; soit ω régulier, φ sur ω^*, semi-continue inférieurement et $> -\infty$. On voit que $\int \varphi\, d\rho_x^\omega = \sup \int \theta\, d\rho_x^\omega$ (θ finie continue $\leq \varphi$) est $+\infty$ ou harmonique. Donc pour f quelconque sur ω^*, $\overline{\int} f\, d\rho_x = \inf_\varphi \int \varphi\, d\rho_x$ ($\varphi \underset{> -\infty}{\geq} f$) est aussi $+\infty$, $-\infty$ ou harmonique.

Enfin $\underline{\int} f\, d\rho_x$, $\overline{\int} f\, d\rho_x$ s'ils sont égaux en un point, sont égaux partout grâce à la remarque initiale.

Réciproquement : partons des propriétés de $d\rho_x^\omega$ et d'un ordonné filtrant de fonctions harmoniques u_i qu'on peut supposer ≥ 0, dans un domaine ω_0. Si ω est un domaine régulier $\subset \bar{\omega} \subset \omega_0$, $u_i(x) = \int u_i\, d\rho_x^\omega \to \int \lim u_i\, d\rho_x^\omega$ qui est $+\infty$ ou partout fini dans ω ; dans ce second cas $\lim u_i = u$ est continue dans ω et pour tout ω' régulier $\subset \bar{\omega}' \subset \omega$, on obtient à partir de $u_i = \int u_i \, d\rho_x^{\omega'}$, $u = \int u \, d\rho_x^{\omega'}$ harmonique. Ainsi u est harmonique dans ω. Nous voyons que $\lim u_i$ est au voisinage de chaque point de ω_0, $+\infty$ ou harmonique ; de même dans ω_0 tout entier.

Rappelons

1° la mesure harmonique $d\rho_x^{\omega}$ d'un ouvert non vide de ω^* est > 0 (ω régulier).

2° si f est bornée supérieurement $\limsup\limits_{x\in\omega, x\to x_0\in\omega^*} \bar{\int} f \, d\rho_x^{\omega} \leq \limsup f$ en x_0 (ω régulier). Car si le deuxième membre est $< \lambda$ fini, f est majorée par une fonction finie continue θ telle que $\theta(x_0) < \lambda$.

EXEMPLES. - Voir l'exposé antérieur (fcts harmoniques classiques, solutions de certaines équations aux dérivées partielles).

Fonctions h-harmoniques. - Si h est finie continue > 0 quelconque dans Ω, les quotients u/h des fonctions harmoniques par h satisfont aussi aux trois axiomes, avec les mêmes domaines réguliers ; de $\frac{u(x)}{h(x)} = \int \frac{u(y)}{h(y)} \frac{h(y)}{h(x)} d\rho_x^{\omega}$ résulte que la nouvelle mesure harmonique est $d\rho_x'^{\omega}(y) = \frac{h(y)}{h(x)} d\rho_x^{\omega}(y)$. Les fonctions u/h sont dites h-harmoniques.

Le cas de h harmonique est important, car les fonctions h-harmoniques comportent alors les constantes.

2. Fonctions hyperharmoniques et surharmoniques.

Comme antérieurement on dit que dans un ouvert ω_0, v réelle est hyperharmonique si

$$\begin{cases} v \text{ est semi-continue inférieurement} \\ v > -\infty \\ \text{pour tout domaine (ou tout ouvert) régulier } \omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_0, \quad v(x) \geq \int v \, d\rho_x^{\omega}. \end{cases}$$

Definition des fonctions hypoharmoniques u, de manière analogue ou par la convention que $-u$ est hyperharmonique.

Reprenant h, on voit que les quotients v/h sont toutes les fonctions definies de la manière précédente en remplaçant $d\rho_x$ par $d\rho_x'$; on les appelle h-hyperharmoniques ou hyper-h-harmoniques.

PROPRIÉTÉS. - 1° Si v_1, v_2 sont hyperharmoniques, de même $\inf(v_1, v_2)$,

$\lambda_1 v_1$, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ $(\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0)$.

2° La limite d'un ordonné filtrant croissant de v_i hyperharmonique est hyperharmonique.

3° Si v hyperharmonique vaut $+\infty$ au voisinage d'un point, $v = +\infty$ dans le domaine composant contenant ce point (conséquence des propriétés de $d\rho_x$; voir l'exposé précédent). Une fonction v est dite <u>surharmonique</u> dans ω, si elle y est hyperharmonique, et finie sur un ensemble partout dense.

4° v hyperharmonique ≥ 0 dans un domaine est partout > 0 ou $\equiv 0$, car $\lim nv$ est soit $\equiv +\infty$ donc $v > 0$, soit finie sur un ensemble partout dense, donc $v = 0$ sur cet ensemble, donc partout.

5° Lorsque les constantes sont harmoniques, toute fonction hyperharmonique v dans un ouvert ω satisfait à $v \geq \operatorname{Inf}_{x_0 \in \omega^*} [\liminf_{x \in \omega, x \to x_0} v]$ (principe de minimum).

Cela résulte de ce que si $\liminf_{x \to x_0} v \geq 0$ quel que soit $x_0 \in \omega^*$, $v \geq 0$. Car si la borne inférieure de v dans ω était $K < 0$, elle serait atteinte en un point x_1 et dans le domaine composant $\delta \ni x_1$, $v - K$ serait hyperharmonique, ≥ 0, nulle en x_1 donc $\equiv 0$; dans δ, on aurait $v = K < 0$ ce qui est incompatible avec l'hypothèse.

<u>Application</u>. - Si on remplace l'hypothèse que les constantes sont harmoniques par l'existence dans ω d'une fonction harmonique $h > \varepsilon > 0$, la condition $\liminf_{x \to x_0 \in \omega^*} v' \geq 0$ quel que soit $x_0 \in \omega^*$, entraîne $v \geq 0$.

Il suffit de considérer v/h.

6° Si ω_1 est régulier $\subset \bar{\omega}_1 \subset \omega_0$ où v est hyperharmonique, lorsqu'on remplace dans ω_1, v par $\int v \, d\rho_x^{\omega_1}$, on obtient une fonction hyperharmonique.

La démonstration de l'exposé antérieur s'applique. Mais elle résulte aussitôt également du <u>critère local suivant.</u>

<u>Critère local de hyperharmonicité.</u>

THÉORÈME 1. - Remplaçons dans la définition de v hyperharmonique, la troisième condition par la condition plus faible : pour tout $x \in \omega_0$ et tout voisinage de x, il existe dans ce voisinage un domaine régulier ω contenant x tel que $v(x) \geq \int v \, d\rho_x^{\omega}$. Alors la fonction v est encore hyperharmonique.

En effet, cherchons à étendre les propriétés précédentes ; c'est évident pour (1°)

et (2°). Au lieu de (3°), soit v (satisfaisant aux conditions plus faibles) ; si elle vaut $+\infty$ dans on domaine, elle vaut aussi $+\infty$ en tout point-frontière de ce domaine, dans ω_o (même utilisation de la mesure harmonique).

Alors (4°) s'étend. Car si v est ≥ 0 dans un domaine ω_1, soit ω l'ouvert où elle est > 0 ; s'il n'était vide ou identique à ω_1, il comporterait un domaine composant δ avec point-frontière x_o dans ω_1. Lim v valant $+\infty$ sur δ, serait égal à $+\infty$ en x_o, donc $v(x_o) > 0$ alors que $x_o \notin \omega$.

Puis les propriétés et démonstrations de (5°) s'étendent aussitôt.

Cela fait, voyons que notre fonction majore $\int v\, d\rho_x^{\omega}$ pour tout domaine régulier $\omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_o$. Il suffit de voir qu'elle majore $\int \theta\, d\rho_x^{\omega}$, où θ est finie continue $\leq v$ sur ω^*. Si on fait la différence, on voit qu'elle admet une lim inf ≥ 0 à la frontière de ω, d'où le résultat.

3. Ensembles de fonctions hypo ou hyperharmoniques.

On peut reprendre tel quel (2) l'exposé précédent à partir du n° 8, sur les propriétés des enveloppes d'ensembles saturés et la forme générale du problème de Dirichlet. On reviendra plus loin sur ce problème, mais apportons tout de suite un complément. Pour un ouvert quelconque ω de Ω, on introduit l'enveloppe inférieure $\overline{\mathcal{H}}_f^{\omega}$ des fonctions hyperharmoniques dans ω, de lim inf en tout point-frontière $> -\infty$ et $\geq f$ donnée sur ω^*. Elle vaut dans chaque domaine composant ω_i, $\overline{\mathcal{H}}_f^{\omega_i}$ qui est $+\infty$, $-\infty$ ou harmonique. On introduit de même $\underline{\mathcal{H}}_f^{\omega} = -\overline{\mathcal{H}}_{-f}^{\omega}$. Lorsque $\overline{\mathcal{H}}_f^{\omega}$ et $\underline{\mathcal{H}}_{(-f)}^{\omega}$ sont égales et finies, on dit que f est résolutive et l'enveloppe commune est notée $\mathcal{H}_f$. Noter que si dans chaque ω_i il existe une fonction harmonique de borne inférieure > 0, on est déjà sûr que $\underline{\mathcal{H}}_f^{\omega} \leq \overline{\mathcal{H}}_f^{\omega}$.

Si ω est un ouvert régulier, $\overline{\mathcal{H}}_f^{\omega} = \overline{\int} f\, d\rho_x^{\omega}$.

---

(2) Toutefois dans le théorème 2, il faut pour l'identité de la majorante essentielle de U ou $\tilde{U}$ avec l'enveloppe supérieure de $\bar{U}$ la restriction banale que les u ne sont pas toutes $-\infty$; de même dans le théorème 4, on affirmera que la minorante essentielle de l'ensemble considéré des v vaut l'enveloppe $\overline{\mathcal{H}}_f$, sous la restriction que $\overline{\mathcal{H}}_f \neq +\infty$ (c'est-à-dire que tous les v considérés ne sont pas $+\infty$).

THÉORÈME (de comparaison) 2. - Soit ω' ouvert $\subset \omega$, f sur ω^* , F égale à f sur ω^* et à $\bar{\mathcal{H}}_f^\omega$ dans ω. Alors $\bar{\mathcal{H}}_f^\omega = \bar{\mathcal{H}}_F^{\omega'}$ dans ω' .

On se ramène immédiatement au cas de ω , ω' connexes. On a d'abord $\bar{\mathcal{H}}_f^\omega \geq \bar{\mathcal{H}}_F^{\omega'}$; de plus si $\bar{\mathcal{H}}_f^\omega = -\infty$ l'égalité cherchée est évidente ; si $\bar{\mathcal{H}}_f^\omega = +\infty$ toute fonction hyperharmonique dans ω' , de lim inf à la frontière $\begin{cases} \geq F \\ > -\infty \end{cases}$, prolongée par $+\infty$ devient hyperharmonique dans ω (à cause du critère local d'hyperharmonicité) et d'après son allure à la frontière de ω est donc $\geq \bar{\mathcal{H}}_f^\omega = +\infty$; d'où $\bar{\mathcal{H}}_F^{\omega'} = +\infty$. Supposons donc $\bar{\mathcal{H}}_f^\omega$ fini. Soit dans ω' , une fonction hyperharmonique quelconque v' de lim inf en tout point-frontière $\begin{smallmatrix} \geq F \\ > -\infty \end{smallmatrix}$; soit V la fonction égale dans ω' à $\inf(v', \bar{\mathcal{H}}_f^\omega)$ et prolongée par $\bar{\mathcal{H}}_f^\omega$, elle est hyperharmonique dans ω (grâce au critère local) ; soit v hyperharmonique dans ω , de lim inf à la frontière $\begin{smallmatrix} \geq f \\ > -\infty \end{smallmatrix}$. Considérons $U = V + v - \bar{\mathcal{H}}_f^\omega$ dans ω et les ensembles, $\alpha \subset \omega'$ où $V = v'$ et $\beta \subset \omega$ où $V = \bar{\mathcal{H}}_f^\omega$ $(\alpha \cup \beta = \omega)$. Sur α , $U \geq v'$, sur β , $U = v$. De sorte qu'en tout point-frontière lim inf $U \begin{smallmatrix} \geq f \\ > -\infty \end{smallmatrix}$ d'où $U \geq \bar{\mathcal{H}}_f^\omega$; comme un v convenable peut en tout point approcher arbitrairement $\bar{\mathcal{H}}_f^\omega$, on conclut $V \geq \bar{\mathcal{H}}_f^\omega$ d'où $v' \geq \bar{\mathcal{H}}_f^\omega$ et enfin $\bar{\mathcal{H}}_F^{\omega'} \geq \bar{\mathcal{H}}_f^\omega$.

COROLLAIRE. - Soient des ouverts $\omega' \subset \omega \subset \Omega$, f sur ω^* telle que $\bar{\mathcal{H}}_f^\omega = \underline{\mathcal{H}}_f^\omega$. Si F est le prolongement de f par cette enveloppe dans ω , on a dans ω' $\bar{\mathcal{H}}_F^{\omega'} = \underline{\mathcal{H}}_F^{\omega'} = F$.

Il suffit de rapprocher le théorème qui précède et son analogue pour $\underline{\mathcal{H}}_f$.

4. $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonctions.

Une base $\mathcal{B}$ de domaines réguliers ayant été choisie, on appellera $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction dans un ouvert ω_0 , toute fonction réelle v satisfaisant aux conditions

1° v est bornée inférieurement localement :

2° pour tout $\omega \in \mathcal{B}$ $(\omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_0)$, $v(x) \geq \int v \, d\rho_x^\omega$ $(x \in \omega)$.

PROPRIÉTÉS. - L'intérêt de ces fonctions (qui remplacent, sans les généraliser exactement les fonctions surmédiaires classiques) réside dans les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 3. - L'enveloppe inférieure d'un ensemble de $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonctions, bornées inférieurement localement uniformément est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction car

$$\inf v_i \geq \bar{\int} \inf v_i \, d\rho_x^{\omega} \quad .$$

REMARQUE. - Si v est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction dans ω_0, ω_1, ω_2 réguliers $[\omega_1 \subset \bar{\omega}_1 \subset \omega_2 \subset \bar{\omega}_2 \subset \omega_0]$ de $\mathcal{B}$, on a $\bar{\int} v \, d\rho_x^{\omega_1} \geq \bar{\int} v \, d\rho_x^{\omega_2}$ $(x \in \omega_1)$

Car si $w = \bar{\int} v \, d\rho_x^{\omega_2}$, $v \geq w$ dans ω_2 entraîne $\bar{\int} v \, d\rho_x^{\omega_1} \geq \int w \, d\rho_x^{\omega_1} =$

THÉORÈME 4. - La régularisée $\hat{v}(x)$ d'une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction v définie comme égale à $\liminf_{y \to x} v(y)$ vaut aussi $\sup \bar{\int} v \, d\rho_x^{\omega}$ pour tous les ω réguliers $\in \mathcal{B}$ $[\bar{\omega} \subset \omega_0]$, contenant x, et la limite de $\bar{\int} v \, d\rho_x^{\omega}$ selon l'ordonné filtrant décroissant des ω ; elle est hyperharmonique.

Comme $\bar{\int} v \, d\rho_x^{\omega}$ est continue de x dans ω, $\hat{v}(x) \geq \bar{\int} v \, d\rho_x^{\omega} \geq \int \hat{v} \, d\rho_x^{\omega}$, de sorte que $\hat{v}$ est bien hyperharmonique.

Le sup et la limite de l'énoncé sont égaux d'après la remarque préliminaire. Voyons donc que $\hat{v}(x) = \sup \bar{\int} v \, d\rho_x^{\omega}$. D'après l'inégalité écrite plus haut $\hat{v}(x) \geq \sup \bar{\int} v \, d\rho_x^{\omega}$. D'autre part si $\lambda < \hat{v}(x)$, on a dans un voisinage assez petit de x

$$v(y) \geq \lambda \frac{h(y)}{h(x)}$$

où h est une fonction harmonique > 0 au voisinage de x d'où pour des ω assez petits contenant x,

$$\bar{\int} v \, d\rho_x^{\omega} \geq \lambda$$

ce qui achève la démonstration.

Il y a quelque intérêt à appeler <u>$\mathcal{B}$-négligeable</u> tout ensemble de ω_0 dont l'intersection avec chaque $\omega \in \mathcal{B}$ $(\bar{\omega} \subset \omega_0)$ est de mesure harmonique $d\rho_x^{\omega}$ nulle. Un ouvert non vide n'est pas $\mathcal{B}$-negligeable. On dira " $\mathcal{B}$-presque partout" pour "sauf sur un ensemble $\mathcal{B}$-négligeable".

Examinons <u>l'extension possible des propriétés</u> ((1°) à (3°)) des fonctions hyperharmoniques (n° 2). C'est immédiat pour (1°) ; (2°) sera valable pour les suites croissantes ; (5°) est valable puisqu'il s'applique à $\hat{v} \leq v$. On notera $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}^*$ une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction de régularisée surharmonique ce qui équivaut à dire qu'elle est finie

$\mathcal{B}$-presque partout ou encore sur un ensemble partout dense. Au lieu de (4°), on voit que pour $v \geq 0$; v est dans chaque domaine composant, nul $\mathcal{B}$-presque partout ou nulle part. Le résultat (5°) et son application s'étendent : il suffit d'utiliser $\hat{v}$ et de voir que sur tout ouvert $\inf v = \inf \hat{v}$ d'où l'égalité des lim inf à la frontière. Enfin pour étendre le résultat (6°) on pourra procéder comme suit : soit v, $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction dans ω_0, $\omega \in \mathcal{B}$ & $\bar{\omega} \subset \omega_0$ et $\omega_1 \in \mathcal{B}$ $\subset \bar{\omega}_1 \subset \omega_0$. On veut démontrer que la fonction V égale à v dans $\complement\omega$ et à $\bar{\int} v \, d\rho_x^{\omega}$ dans ω est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction et pour cela que $V \geq \bar{\int} V \, d\rho_x^{\omega_1}$. En effet utilisons le n° 3 ; comme $V \leq v$, on a d'abord

$$\bar{\mathcal{H}}_V^{\omega_1} \leq \bar{\mathcal{H}}_v^{\omega_1} \leq v \text{, donc } \bar{\mathcal{H}}_V^{\omega_1} \leq V \text{ dans } \omega_1 \cap \complement\omega .$$

Puis introduisons W égal à V dans $\complement\omega_1$ et à $\bar{\mathcal{H}}_V^{\omega_1}$ dans ω_1 ; $W \leq V$ sur ω_1^* et $\omega^* \cap \omega_1$ donc

$$\bar{\mathcal{H}}_V^{\omega_1} = \bar{\mathcal{H}}_W^{\omega \cap \omega_1} \leq \bar{\mathcal{H}}_V^{\omega \cap \omega_1} = \bar{\mathcal{H}}_v^{\omega} = V \text{ dans } \omega \cap \omega_1 ,$$

ce qui achève la démonstration.

Noter que l'on ne peut pas adapter aux $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonctions le critère local du n° 2 (où l'on remplacerait $\int$ par $\bar{\int}$). Par exemple dans R^2, avec les fonctions harmoniques classiques et les disques comme domaines réguliers, on voit que la fonction égale à 1 pour $x \leq 0$, à 0 pour $x > 0$, satisfait au critère mais n'est pas une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction (la régularisée n'est pas surharmonique).

5. Application. Réduite.

Soit dans ω_0 ouvert un ensemble E, sur lequel est définie une fonction $\varphi \geq 0$, majorée par une fonction surharmonique ≥ 0 dans ω_0. On note $(R_\varphi^E)_{\omega_0}$ ou brièvement R_φ^E l'enveloppe inférieure des fonctions surharmoniques ≥ 0 dans ω_0 majorant φ sur E. Pour chaque domaine composant ω_i, $(R_\varphi^E)_{\omega_i}$ (où l'on considère les traces de φ, E dans ω_i) vaut évidemment $(R_\varphi^E)_\omega$. C'est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction (pour toute base $\mathcal{B}$), de régularisée $\hat{R}_\varphi^E$ surharmonique. Quand φ est la trace de v surharmonique ≥ 0 dans ω_0, R_v^E est dite réduite de v (relative à E et ω_0), $\hat{R}_v^E$ balayée de v.

PROPRIÉTÉS.

(α_1) $R^E_{\lambda\varphi} = \lambda R^E_\varphi (\lambda > 0)$ $R^E_{\varphi_1+\varphi_2} \leq R^E_{\varphi_1} + R^E_{\varphi_2}$ (mêmes propriétés pour les régularisées)

(α_2) R^E_φ, $\hat{R}^E_\varphi$ sont croissantes de φ et E

(α_3) R^E_φ est harmonique dans $\omega_o \cap \complement \bar{E}$; $R^E_\varphi \geq \varphi$ sur E .

(β_1) Lorsque φ est la trace de v surharmonique ≥ 0 dans ω_o

$$0 \leq \hat{R}^E_v \leq R^E_v \leq v \text{ partout ; } R^E_v = v \text{ sur } E \text{ , } \hat{R}^E_v = v \text{ dans } \mathring{E}$$

(β_2) Si ω est ouvert $\subset \omega_o$, et de composantes connexes ω_i, $R_v^{\omega_o-\omega}$ vaut dans ω_i , $R_v^{\omega_o-\omega_i}$.

(Car toute fonction w surharmonique ≥ 0 majorant v hors ω , majore dans ω_i $\inf(w , v)$ dont le prolongement par v est surharmonique ≥ 0 d'où $R_v^{\omega_o-\omega} \geq R_v^{\omega_o-\omega_i}$).

Si de plus il existe dans chaque ω_i une fonction harmonique de borne inférieure > 0 , $R_v^{\omega_o-\omega}$ vaut dans ω , l'enveloppe $\bar{\mathcal{H}}^\omega_{\underset{*}{v}}$ définie plus haut, où $\underset{*}{v}$ vaut v dans ω_o et 0 sur ω_o^* . En particulier si ω est un ouvert régulier $\omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_o$, $R_v^{\omega_o-\omega}$ vaut $\int v \, d\rho^\omega_x$ dans ω .

(β_3) Soit v surharmonique finie continue > 0 dans ω_o , E compact $\subset \omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_o$. Considérons la réduite $(R^E_v)_{\omega_o} = \varphi$. Alors dans $\omega - E$, $\varphi = \bar{\mathcal{H}}^{\omega-E}_\varphi$.

On raisonne comme au théorème 2.

Soit v' surharmonique ≥ 0 dans $\omega - E$, de lim inf en tout point-frontière $\geq \varphi$, donc ≥ 0 , et $V = \inf(v' , \varphi)$. Soit w surharmonique ≥ 0 dans ω_o , majorant v sur E (donc $w \geq \varphi$) . La fonction U égale à $V + w - \varphi$ dans $\omega - E$, prolongée par w ailleurs est surharmonique ≥ 0 dans ω_o , car dans $\omega - E$ elle admet à la frontière des lim inf $\geq w$ (en un point $x \in \overset{*}{E}$, on a $\limsup_{y \in \complement E, y \to x} \varphi(y) \leq v(x)$ a cause de la continuité de v) . Donc U majore la réduite φ et comme w a pu être pris en tout point arbitrairement près de φ , $V \geq \varphi$ donc dans $\omega - E$, $v' \geq \varphi$ et $\overline{\mathcal{H}}_{\varphi}^{\omega - E} \geq \varphi$. L'inégalité contraire est évidente.

6. Potentiels.

Lorsqu'une fonction surharmonique v dans ω_o y admet une minorante harmonique, il existe une plus grande minorante harmonique (voir n° 3). Lorsque celle-ci est 0 , on dit que v est un potentiel dans ω_o (potentiel positif ou brièvement potentiel).

PROPRIÉTÉS.

1° Si v_1 , v_2 sont des potentiels, de même λv_1 ($\lambda > 0$) , $\inf(v_1 , v_2)$ et toute fonction surharmonique ≥ 0 majorée par un potentiel.

2° Si v est surharmonique ≥ 0 et δ ouvert $\subset \bar{\delta} \subset \omega_o$, $\inf R_v^{\complement\delta}$ (limite de l'ordonné filtrant décroissant des $R_v^{\complement\delta}$) est la plus grande minorante harmonique de v .

Il suffit de raisonner dans chaque domaine composant, c'est-à-dire pour ω_o connexe. Or les $R_v^{\complement\delta}$ sont harmoniques au voisinage de tout point quand les δ contiennent ce voisinage donc $V = \inf R_v^{\complement\delta}$ est bien harmonique $\leq v$. Reste à voir que s'il existe une minorante harmonique $u > 0$ de v , elle minore V . Or si v' surharmonique ≥ 0 majore v sur $\complement\delta$, elle majore u dans δ car $v' - u$ admet en tout point-frontière de δ une lim inf ≥ 0 (voir n° 2, propriété (5°) application, et remarquer que $\inf\limits_{\delta} u > 0$). Donc $R_v^{\complement\delta}$ majore u dans δ e $V \geq u$.

Comme application, si v_1 et v_2 sont des potentiels, $v_1 + v_2$ est un potentiel, car

$$R_{v_1+v_2}^{\complement\delta} \leq R_{v_1}^{\complement\delta} + R_{v_2}^{\complement\delta} \quad .$$

3° Si $\bar{E} \subset \omega_o$ et s'il existe un potentiel $V > 0$ dans ω_o , $\widehat{(R_v^E)}_{\omega_o}$ est un potentiel dans ω_o . C'est évident si v est borné sur $\bar{E}$ car λV majore v sur $\bar{E}$ (pour λ convenable > 0) et alors $\lambda V \geq (R_{\lambda V}^E)_{\omega_o} \geq (R_v^E)_{\omega_o}$ d'où $\lambda V \geq \widehat{(R_v^E)}_{\omega_o}$.

Dans le cas général $v = h$ (harmonique ≥ 0) $+ w$ (potentiel)

$$\widehat{(R_v^E)}_{\omega_o} \leq \widehat{(R_h^E)}_{\omega_o} + \widehat{(R_w^E)}_{\omega_o} \quad .$$

Le premier terme à droite est d'après le cas particulier, un potentiel ; de même le second majoré par w, et par suite le premier membre.

REMARQUE 1. - L'hypothèse qu'il existe dans un ouvert ω un potentiel $V > 0$ ser souvent utilisée. Elle entraîne qu'il existe dans tout $\omega_1 \subset \bar{\omega}_1 \subset \omega$ une fonction harmonique de borne inférieure > 0.

Car $\hat{R}_V^{\complement\omega_1}$ est > 0 dans $\complement\bar{\omega}_1$ donc partout ; il est donc borné inférieurement par un nombre > 0 dans $\bar{\omega}_1$ et il suffit de voir alors qu'il est harmonique dans ω_1.

REMARQUE 2. - S'il n'existe pas de potentiel > 0 dans un domaine ω, toute fonction surharmonique ≥ 0 dans ω y est harmonique (et réciproquement) et les fonctions harmoniques > 0 s'il y en a dans ω sont proportionnelles.

Car pour deux telles fonctions $\inf(u_1, u_2)$ est harmonique et, majorée par u_1 et u_2 vaut partout u_1 ou partout u_2 ; de sorte que u_1 est partout $= u_2$, partout $> u_2$ ou partout $< u_2$. Remplaçant u_1 par λu_1 qui vaille u_2 en un point, on conclut $\lambda u_1 = u_2$ partout.

Une conséquence est qu'alors, pour toute v surharmonique ≥ 0, donc harmonique, R_v^E vaut v, si E n'est pas vide, sinon 0.

THÉORÈME 5. - S'il existe dans ω_0 un potentiel $V > 0$, il existe un potentiel fini continu $V_0 > 0$.

Soient en effet des ouverts $\omega' \subset \bar{\omega}' \subset \omega'' \subset \bar{\omega}'' \subset \omega_0$. $V'' = \hat{R}_V^{\complement\omega''}$ est un potentiel > 0 harmonique dans ω''. Puis $V' = \hat{R}_{V''}^{\omega'}$ est un potentiel > 0 harmonique dans $\complement\bar{\omega}'$ et puisque majoré par V'' dans ω'', borné supérieurement dans un voisinage de $\bar{\omega}'$ donc borné sur tout compact de ω_0. Partons de V' et couvrons $\bar{\omega}'$ par des domaines réguliers $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_p$. Dans ω_1 remplaçons V' par $\int V'\, d\rho_x^{\omega_1}$ d'où un potentiel $V_1' > 0$ dans ω_0, fini continu dans ω_1 et $\complement\bar{\omega}'$ (d'après l'allure à la frontière de $\int V'\, d\rho_x^{\omega_1}$ en un point de continuité de V', vu que V' est borné sur ω_1^*). Dans ω_2 remplaçons V_1' par $\int V_1'\, d\rho_x^{\omega_2}$ d'où un potentiel $V_2' > 0$, fini continu dans $\omega_1 \cup \omega_2$ et dans $\complement\bar{\omega}'$ etc. On obtient bien finalement un potentiel V_0 fini continu dans $\bigcup \omega_i$ et dans $\complement\bar{\omega}'$.

THÉORÈME 5'. - S'il existe dans Ω un potentiel $V > 0$, il existe un potentiel fini continu $V_1 > 0$ qui n'est pas harmonique dans un domaine partiel donné ω.

On introduit $\omega' \subset \bar{\omega}' \subset \omega$ et $W = \hat{R}_{V_0}^{\omega'}$; c'est un potentiel > 0 ; on passe de là par le procédé précédent à un potentiel fini continu > 0 en couvrant $\bar{\omega}'$ par des domaines réguliers $\omega_i \subset \bar{\omega}_i \subset \omega$; il n'est pas harmonique dans ω, parce qu'il l'est dans $\complement (\cup \bar{\omega}_i)$ et le serait alors dans Ω, donc nul.

<u>Extension</u> à une famille dénombrable de domaines ω_j dans chacun desquels V_0 ne doit pas être harmonique. Il suffit d'associer V_j précédent à ω_j et de considérer $\sum \lambda_j V_j$ avec des $\lambda_j > 0$ tels que $\sum \lambda_j$ sont finis $(V_j \quad V_0)$.

7. <u>Remarques sur les différences de fonctions surharmoniques</u> $\geqslant 0$ ou de potentiels.

Si u_1 u_2 sont surharmoniques $\geqslant 0$, $(u_1 - u_2)^+$, $(u_1 - u_2)^-$, $|u_1 - u_2|$ définis $\mathcal{B}$-presque partout sont $\mathcal{B}$-presque partout égaux à des différences de fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ et par suite les sup et inf de deux telles différences. Même énoncé pour des fonctions en outre finies continues (avec égalité partout) ou des potentiels, ou des potentiels finis continus.

Par exemple : $|u_1 - u_2|^+ = u_1 - \inf(u_1, u_2)$ $\mathcal{B}$-presque partout.

THÉORÈME 6 (Madame HERVÉ). - Lorsqu'il existe dans ω_0 un potentiel $V > 0$, toute fonction finie continue sur un compact $K \subset \omega_0$ peut être approchée uniformément arbitrairement par une différence de potentiels finis continus $\geqslant 0$ dans ω_0.

Il suffit de pouvoir faire une telle approximation au moyen du quotient d'une telle différence W par un potentiel V_0 fini continu > 0 fixé. Ces quotients comportent les constantes, et leurs propres modules. Il suffira donc, pour pouvoir appliquer le théorème de Stone, de voir que deux points $x_1 \neq x_2$ de K sont séparés par ces quotients, ou encore par les différences W, comme il suit :

Soit un domaine régulier ω contenant x_1 mais non x_2 $(\bar{\omega} \subset \omega_0)$, V'_0 un potentiel fini continu > 0 non harmonique dans ω. Si $V'_0(x_1) = V'_0(x_2)$, on introduira $R_{V'_0}^{\complement\omega}$ fini continu égal à V'_0 en x_2 mais non en x_1 puisque $< V'_0$ dans ω (harmonique et $\leq V'_0$).

Comme conséquence immédiate, aperçue aussi par Madame HERVÉ :

<u>Applications au problème de Dirichlet</u>. Considérons dans Ω un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$

et supposons l'existence dans Ω d'un potentiel $V > 0$. Alors pour toute fonction finie continue sur ω^*, $\underline{\mathcal{H}}_f^\omega = \overline{\mathcal{H}}_f^\omega$ c'est-à-dire que f est résolutive.

C'est évident si f est la trace d'un potentiel V_1 fini continu car $\overline{\mathcal{H}}_{V_1}^\omega$ d'après son allure à la frontière (puisque $\leq V_1$) doit être $\leq \underline{\mathcal{H}}_{V_1}^\omega$. On passe aux différences W de tels potentiels grâce à la convexité de $\overline{\mathcal{H}}$, puis on conclut en remarquant que si $|f - W| \leq \varepsilon$ sur ω^*

$$-\frac{\varepsilon}{\inf\limits_{\omega^*} V_o} \cdot V_o + \mathcal{H}_W \leq \underline{\mathcal{H}}_f^\omega \leq \overline{\mathcal{H}}_f^\omega \leq \mathcal{H}_W + \frac{\varepsilon}{\inf\limits_{\omega^*} V_o} \cdot V_o \quad .$$

COROLLAIRE. - On voit donc pour f finie continue, l'existence de $\mathcal{H}_f$, linéaire et croissante de f en chaque point $x \in \omega$, (d'où si $f_n \to f$ uniformément, $\mathcal{H}_{f_n} \to \mathcal{H}_f$).

On peut donc écrire $\mathcal{H}_f(n) = \int f \, d\mu_x$, où μ_x est une mesure de Radon sur ω^* (dite mesure harmonique au point x).

Complément lorsque Ω est à base dénombrable, donc métrisable.-En considérant (grâce à l'hypothèse de $V > 0$) une fonction harmonique $h > 0$ dans un ouvert contenant $\bar{\omega}$, on peut utiliser dans ω les fonctions h-harmoniques et les résultats de l'article du séminaire de 1957. On en déduit que pour chaque domaine composant ω_i ou encore pour ω, les fonctions f résolutives sont les fonctions sur ω^*, sommables $d\mu_x$ par un point x de chaque ω_i et

$$\mathcal{H}_f(x) = \int f \, d\mu_x \quad .$$

Lorsque f est la trace d'une fonction surharmonique $v \geq 0$, $\mathcal{H}_v(x) = \int v \, d\mu_x = R_v^{\complement\omega}(x)$ dans ω.

8. Propriété de prolongement (Madame HERVÉ).(3)

THÉORÈME 7. - Supposons dans Ω quelconque l'existence d'un potentiel $V > 0$; Soit v surharmonique > 0 dans $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ et ω' ouvert quelconque $\subset \bar{\omega}' \subset \omega$. Il existe un potentiel dans Ω qui, dans ω', diffère de v d'une fonction harmonique.

Introduisons ω'' ouvert tel que $\bar{\omega}' \subset \omega'' \subset \bar{\omega}'' \subset \omega$. Considérons les domaines composants de ω contenant des points de $\bar{\omega}''$; il y en a un nombre fini et on peut former dans Ω un potentiel V_o fini continu > 0, non harmonique dans les domaines précédents, de sorte que $\inf\limits_{\omega''^*}(V_o - \mathcal{H}_{V_o}^\omega) > 0$. Il existe donc $\lambda > 0$

(3) On donne ici une toute autre démonstration demandant moins de connaissance de la théorie

tel que sur ω''^* la réduite relative à ω $(R_v^{\bar{\omega}'})_\omega$ soit $\leq \lambda(V_o - \mathcal{H}_{V_o}^{\omega})$.
Donc dans $\omega - \bar{\omega}''$, $\lambda(V_o - \mathcal{H}_{V_o}^{\omega})$ majore $\mathcal{H}_\varphi^{\omega-\bar{\omega}''}$ où φ vaut 0 sur ω^* et $(R_v^{\bar{\omega}'})$ sur ω''^* ; d'ailleurs dans $\omega - \bar{\omega}''$, $\mathcal{H}_\varphi^{\omega-\bar{\omega}''}$ vaut $(R_v^{\bar{\omega}'})_\omega$, parce que cette dernière fonction vaut $\bar{\mathcal{H}}_\psi^{\omega-\bar{\omega}'}$ dans $\omega-\bar{\omega}'$ ($\psi = 0$ sur ω^* et $\psi = v$ sur ω'^*).

Considérons alors la fonction Φ égale à λV_o dans $\complement\omega$ et à $\lambda \mathcal{H}_{V_o}^{\omega} + (\hat{R}_v^{\bar{\omega}'})_\omega$ dans ω . Si nous montrons qu'elle est localement une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ -fonction, sa régularisée répondra à la question. Etudions donc Φ au voisinage de ω^* . Soit δ un domaine régulier $(\bar{\delta} \subset \Omega - \bar{\omega}'')$ et comparons à Φ , $\Phi' = \int \Phi \, d\rho_x^\delta$ dans δ .

Comme $\Phi \leq \lambda V_o$ dans $\omega - \bar{\omega}''$, on a d'abord $\Phi' \leq \int \lambda V_o \, d\rho_x^\delta \leq \lambda V_o$ donc $\Phi' \leq \Phi$ dans $\complement\omega \cap \delta$. Puis dans $\omega \cap \delta$, Φ' vaut $\bar{\mathcal{H}}_{\Phi''}^{\omega\cap\delta}$ où Φ'' vaut Φ sur δ^* et $\Phi' \leq \Phi$ sur $\omega^* \cap \delta$. Ainsi dans $\omega \cap \delta$,
$\Phi' = \bar{\mathcal{H}}_{\Phi''}^{\omega\cap\delta} \leq \bar{\mathcal{H}}_{\Phi}^{\omega\cap\delta}$.

Posons : Φ_1 égal à $\lambda \mathcal{H}_{V_o}^{\omega}$ dans ω et à λV_o sur ω^*

Φ_2 égal à $(\hat{R}_v^{\omega'})_\omega$ dans ω et à 0 sur ω^*

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 , \quad \bar{\mathcal{H}}_{\Phi}^{\omega\cap\delta} \leq \bar{\mathcal{H}}_{\Phi_1}^{\omega\cap\delta} + \bar{\mathcal{H}}_{\Phi_2}^{\omega\cap\delta}$$

On constate que : $\bar{\mathcal{H}}_{\Phi_1}^{\omega\cap\delta} = \Phi_1$

$$\bar{\mathcal{H}}_{\Phi_2}^{\omega\cap\delta} = \Phi_2$$

d'où $\bar{\mathcal{H}}_{\Phi}^{\omega\cap\delta} \leq \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi$.

REMARQUE. - La démonstration est bien plus simple si ω est régulier.

9. Domaines réguliers déterminants.

On dira que dans Ω un ouvert régulier ω est complètement déterminant (resp déterminant) si, quelles que soient v_1 , v_2 surharmoniques ≥ 0 (resp , localement bornées, en outre) dans Ω , harmoniques dans ω , l'égalité $v_1 = v_2$ dans

$\complement\omega$ entraîne l'égalité partout dans Ω.

<u>Conditions équivalentes à ces deux définitions.</u>

1° Si v est surharmonique $\geqslant 0$ (resp bornée localement) dans Ω sa plus grande minorante harmonique dans ω est $\int v\, d\rho_x^\omega$ ou $\mathcal{H}_v^\omega$.
Car pour tout ω régulier, $\int v\, d\rho_x^\omega$ prolongée par v est surharmonique et de même toute minorante harmonique de v dans ω, majorant cette intégrale.

2° Si v surharmonique $\geqslant 0$ (resp localement bornée) est harmonique dans ω, toute fonction surharmonique majorant v dans $\complement\omega$ (donc nécessairement $\geqslant 0$) la majore dans ω.

3° On obtient des critères équivalents en remplaçant dans la définition ou dans les critères précédents les v surharmoniques par des potentiels.

4° Tout domaine composant (de ω régulier) est complètement déterminant (resp déterminant).

REMARQUE. - S'il n'existe pas dans Ω de potentiel > 0, tout ouvert régulier est complètement déterminant ; s'il en existe tout ω complètement déterminant (resp déterminant) conserve cette propriété dans tout domaine Ω_1 $(\bar{\omega} \subset \Omega_1 \subset \Omega)$, d'après le théorème de prolongement. Dans le cas classique les domaines réguliers sont complètement déterminants et cela joue un rôle important dans certaines démonstrations. Aussi allons-nous approfondir les notions précédentes.

THÉORÈME 8. - Soit un domaine régulier déterminant ω et v une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}'$-fonction $\geqslant 0$ dans Ω, avec $\omega \in \mathcal{B}$. Alors on a $v = \hat{v}$ presque partout-$d\rho_x^\omega$ sur ω^* (d'où la sommabilité-$d\rho_x^\omega$ d'une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}'^*$-fonction $\geqslant 0$).

La fonction w égale à $\int v\, d\rho_x^\omega$ dans ω et à v <u>ailleurs</u> est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction (voir n° 4) et est $\leq v$. Donc $\hat{w} \leq \hat{v}$ et comme $\int v\, d\rho_x^\omega \geqslant \int \hat{v}\, d\rho_x^\omega$ $(x \in \omega)$,
$\liminf_{x \in \omega,\, x \to y \in \omega^*} w \geqslant \hat{v}(y)$ d'où $\hat{w} = \hat{v}$ dans $\complement\omega$.

Si v est localement bornée, on conclut, puisque ω est déterminant
$\hat{w} = \int \hat{v}\, d\rho_x^\omega$ $(x \in \omega)$ donc $\int v\, d\rho_x^\omega = \int \hat{v}\, d\rho_x^\omega$ d'où le résultat cherché.

Sinon, si $\hat{v} = 0$, $\int v\, d\rho_x^\omega$ majorée par v et $\hat{v}$ est nulle d'où $v = 0$ presque partout -$d\rho_x^\omega$ sur ω^*. Si $\hat{v} > 0$, il existe une fonction surharmonique > 0 dans Ω, donc une fonction surharmonique $W > 0$ finie continue (décomposer en plus grande minorante harmonique et potentiel, ou raisonner directement comme avec les potentiels). On introduira $v_n = \inf(v, nW)$. C'est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}'$-fonction $\geqslant 0$, localement bornée, donc $\hat{v}_n = v_n$ presque partout - $d\rho_x^\omega$ sur ω^*. D'où le résultat cherché puisque $\hat{v}_n \to \hat{v}$.

COROLLAIRE. - Toute $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction $v \geq 0$ dans Ω (resp localement bornée), harmonique dans un domaine régulier complètement déterminant (resp déterminant) $\omega \in \mathcal{B}$, vaut dans ω $\int v \, d\rho_x^\omega$.

Car $\hat{v}(x) = \int \hat{v} \, d\rho_x^\omega = \int v \, d\rho_x^\omega$ $(x \in \omega)$.

THÉORÈME 9. - Considérons dans Ω un ordonné filtrant décroissant de $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonctions $v_i \geq 0$ et un domaine régulier déterminant $\omega \in \mathcal{B}$. Alors $\int \inf v_i \, d\rho_x^\omega = \inf \int v_i \, d\rho_x^\omega$.

Supposons d'abord les v_i localement uniformément bornées ; considérons la fonction V_i obtenue en prolongeant $\int v_i \, d\rho_x^\omega$ par v_i ; c'est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction et de même $\inf\limits_i V_i$.

Donc $\inf \int v_i \, d\rho_x^\omega$ prolongée par $\inf v_i$ est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction.
D'autre part $\int \inf v_i \, d\rho_x^\omega$ prolongée par $\inf v_i$ est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction.
D'après le corollaire précédent on a donc l'égalité cherchée.
Dans le cas général, si une $\hat{v}_i$ est nulle, l'intégrale $\int v_i \, d\rho_x^\omega$ correspondante est nulle et par suite les deux membres de l'égalité cherchée.

Si une $\hat{v}_i$ est > 0, on introduira W surharmonique finie continue > 0 dans Ω et on remarque que, choisissant un v_i soit v_{i_0}, les $v'_i = \inf(v_i, v_{i_0})$ forment un ordonné filtrant et que $\inf v_i = \inf v'_i$, $\inf \int v_i \, d\rho_x^\omega = \inf \int v'_i \, d\rho_x^\omega$.
De sorte qu'il suffit de démontrer notre proposition avec les v'_i, en utilisant $v'_i \leq v_{i_0}$. Soit alors $(v'_i)_n = \inf(v'_i, nW)$; on sait que

$$\int \inf_i (v'_i)_n \, d\rho_x^\omega = \inf_i \int (v'_i)_n \, d\rho_x^\omega \quad .$$

Mais comme $(v'_i)_n \xrightarrow[n\infty]{} v'_i$, $\int \inf_i (v'_i)_n \, d\rho_x^\omega \xrightarrow[n\infty]{} \inf \int v'_i \, d\rho_x^\omega$.

D'autre part $v'_i = (v'_i)_n + (v'_i - nW)^+$ d'où $0 \leq \int v'_i \, d\rho_x^\omega - \int (v'_i)_n d\rho_x^\omega \leq \int (v_{i_0} - nW)^+ d\rho_x^\omega$

et par suite $\inf\limits_i \int (v'_i)_n \, d\rho_x^\omega \xrightarrow[n\infty]{} \inf\limits_i \int v'_i \, d\rho_x^\omega$ d'où l'égalité cherchée sur les v'_i.

THÉORÈME 10. - Soit dans Ω un domaine ω régulier complètement déterminant (resp déterminant) d'une base $\mathcal{B}$ de domaines réguliers et v_n une suite de $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonctions ≥ 0 (resp localement bornées uniformément, même seulement au voisinage de $\bar{\omega}$). Alors si $\int v_n \, d\rho_x^{\omega}$ converge quel que soit $x \in \omega$ et si elle est localement bornée uniformément (ce qui a lieu dans le second cas), la limite vaut $\int \liminf v_n \, d\rho_x^{\omega}$ ($\liminf v_n$ est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction).

Soit en effet w_n égale à $\int v_n \, d\rho_x^{\omega}$ dans ω et à v_n ailleurs. Lim inf w_n est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction égale à $\lim \int v_n \, d\rho_x^{\omega}$ dans ω et à $\liminf v_n$ ailleurs (donc localement bornée dans le second cas). La fonction $\lim \int v_n \, d\rho_x^{\omega}$ est harmonique dans ω parce que dans tout domaine régulier $\omega_1 \subset \bar{\omega}_1 \subset \omega$, elle vaut $\int \lim w_n \, d\rho_x^{\omega_1}$. D'après le dernier corollaire on a donc $\lim \int v_n \, d\rho_x^{\omega} = \int \liminf v_n \, d\rho_x^{\omega}$.

II. Représentation intégrale des fonctions harmoniques et surharmoniques ≥ 0.

10. Axiome de Harnack.

Nous aurons besoin d'un axiome supplémentaire et des remarques suivantes.

LEMME 1. - Soit dans Ω un ensemble Φ de fonctions finies continues > 0, tel que si $u \in \Phi$ on ait $\lambda u \in \Phi$ (λ réel > 0 quelconque). Supposons les propriétés suivantes, évidemment équivalentes et appelées axiome de Harnack :

A. Pour tout $x_0 \in \Omega$, l'ensemble Φ_{x_0} des fonctions de Φ égales à 1 en x_0 est équicontinu en x_0.

ou

B. Pour tout $x_0 \in \Omega$, $\frac{u(x)}{u(x_0)} \to 1$ $(x \to x_0)$ uniformément pour les $u \in \Phi$.

Alors :

(α) Quel que soit x_0 fixé $\sup\limits_{u \in \Phi_{x_0}} u$ et $\inf\limits_{u \in \Phi_{x_0}} u$ sont finies continues > 0, et l'ensemble des $u \in \Phi$, ≤ 1 en x_0 est équicontinu en tout x.

(β) Pour toute $u \in \Phi$, $\frac{u(x_1)}{u(x_2)}$ reste compris, lorsque x_1 et x_2 varient dans un compact, entre deux nombres finis > 0 indépendants de u.

(γ) Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur Φ. Si $u(x) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} +\infty$ en un point, $u \xrightarrow[\mathcal{F}]{} +\infty$

partout (d'ailleurs localement, uniformément relativement à $\bar{R}$). Si $u(x) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} V(x)$ finie en un point, V est partout finie et même localement bornée et la convergence est localement uniforme ; alors V est finie continue et partout > 0 ou partout 0.

En effet l'ensemble où $\bar{U} = \sup_{u \in \Phi_{x_0}} u$ (x_0 fixé) est fini, est un ouvert ω ; s'il n'était Ω il y aurait un point-frontière $x_1 \in \Omega$ et on trouverait $u_n(x) \in \Phi_{x_0}$ tel que $u_n(x_1) \longrightarrow +\infty$. D'après (B), $\frac{u_n(x)}{u_n(x_1)} \to 1$ $(x \to x_1)$ uniformément, alors que dans tout voisinage de x_1, il y a des points (ceux de ω) où ce rapport, majoré par $\frac{\bar{U}(x)}{u_n(x_1)}$ tend vers 0 quand $x \to \infty$. Ainsi $\bar{U}$ est finie partout. De même $\underline{U} = \inf_{u \in \Phi_{x_0}} u$ est > 0, comme on le voit en considérant un point-frontière, s'il y en avait, dans Ω, de l'ensemble ouvert où $\underline{U} > 0$.

De plus pour tout x' $\left|\frac{u(x)}{u(x')} - 1\right| < \varepsilon$ pour $x \in \delta$ voisinage convenable de x', indépendant de $u \in \Phi$; d'où $(1 - \varepsilon)\, u(x') \leq u(x) \leq (1 + \varepsilon)\, u(x')$ et les mêmes inégalités avec $\bar{U}$ et $\underline{U}$, qui sont donc continues. Le reste est conséquence immédiate.

LEMME 2. - Supposons en prenant sur l'ensemble E des fonctions finies continues dans Ω, la topologie T de la convergence compacte, que $\Phi \cup \{0\}$ soit fermé. Alors l'axiome de Harnack <u>équivaut</u> à la compacité de Φ_{x_0} pour <u>un</u> x_0 et aussi pour tous.

Partant de A, on sait que Φ_{x_0} (pour tout x_0) est équicontinu en tout x, donc relativement compact selon T. Son adhérence est contenue dans $\Phi \cup \{0\}$ fermé, et comme elle majore $\inf_{u \in \Phi_{x_0}} u > 0$, elle ne contient pas $\{0\}$, donc est identique à Φ_{x_0}, qui est donc compact.

Inversement partons de cette compacité pour un point x_0 ; alors Φ_{x_0} est équicontinu en tout point et d'autre part $\inf_{u \in \Phi_{x_0}} u > 0$ d'où $\frac{u(x)}{u(x')} \to 1 \cdot (x \to x'$ fixé) uniformément par rapport aux $u \in \Phi_{x_0}$ donc par rapport aux $u \in \Phi$.

11. Rappel d'un théorème de Choquet.

Soit un espace vectoriel topologique réel localement convexe ordonné par un cône convexe C admettant une base compacte B (intersection de toutes les génératrices par une variété linéaire affine ne contenant pas l'origine).

Si C est réticulé, il y a pour tout $z \in B$, au plus une mesure unitaire $\mu \geq 0$ sur B ($\mu(B) = 1$) portée (4) par l'ensemble $\overset{*}{B}$ des points extrémaux de B et dont le centre de gravité est z .

Si B est métrisable, il y a au moins une telle mesure (et on sait que $\overset{*}{B}$ est un G_δ). Rappelons, et le plus simple est de suivre CHOQUET, ce qu'est le centre de gravité d'une mesure $\mu \geq 0$ sur un compact B (avec $\mu(B) = 1$). On forme, par exemple grâce au filtre des entourages et à des recouvrements de B , un ultra-filtre sur l'ensemble des mesures $\mu_i \geq 0$, constituées par un nombre fini de masses ponctuelles $\mu_j^i \geq 0$ (total 1) sur B , convergeant vaguement vers μ . Le centre de gravité G_{μ_i} d'une telle mesure est par définition $\sum_j z_j^i m_j^i$ (masse m_j^i au point z_j^i). Il converge vers un point $G_\mu \in B$. Or si $f(z)$ est une forme linéaire continue, $f(G_i) = \sum_j f(z_j^i)\, m_j^i = \int f(z)\, d\mu_i(z)$ d'où $f(G\ ) = \int f(z)\, d\mu(z)$.

Cette formule importante montre que G ne dépend pas de l'ultra-filtre (car si G' est une autre limite on aura $f(G - G') = 0$ quelle que soit f d'où $G = G'$). On écrit $G_\mu = \int z\, d\mu$. On montre aisément que la convergence vague de μ_n vers μ entraîne la convergence de G_{μ_n} vers G_μ .

12. Représentation intégrale des fonctions harmoniques ≥ 0 dans Ω .

Notons H l'ensemble des différences de fonctions harmoniques ≥ 0 , H^+ celui des fonctions harmoniques ≥ 0 , H'^+ celui des fonctions harmoniques > 0 . On munit l'espace vectoriel H de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. On l'ordonne selon l'ordre "naturel", ce qui équivaut à prendre H^+ comme cône des majorants de 0 . On voit que H est un espace de Riesz complètement réticulé.

Considérons la base $H^+_{x_0}$, du cône convexe H^+ , formé des fonctions harmoniques > 0 égales à 1 en x_0 fixé. Nous avons besoin, pour appliquer le théorème de

(4) C'est-à-dire que le complémentaire de cet ensemble est de mesure μ nulle.

Choquet, qu'elle soit compacte ou métrisable.

La métrisabilité a lieu lorsque Ω est réunion dénombrable de compacts (donc si Ω possède une base dénombrable).

La compacité <u>équivaut</u> à l'axiome de Harnack pour H'^{+} ; remarquer que cela n'utilise pas l'axiome III en entier, mais seulement (à côté des axiomes I et II) la propriété qu'une fonction harmonique ≥ 0 dans Ω est soit > 0 partout, soit 0.

THÉORÈME 11. (<u>représentation intégrale</u>). - Supposons que H'^{+} s'il est non vide satisfait à l'axiome de Harnack et prenons sur H la topologie de la convergence compacte.

1° Il y a pour chaque $u \in H^{+}$, au plus une mesure de Radon $\mu \geq 0$, sur le compact H_{x_0}, portée par l'ensemble ${}^{*}H^{+}_{x_0}$ des points extrémaux de $H^{+}_{x_0}$, et telle que dans Ω

$$u(x) = \int w(x)\, d\mu(w) \;,\quad w \text{ décrivant } H^{+}_{x_0} .$$

2° Si Ω est réunion dénombrable de compacts, il existe une telle mesure μ. D'ailleurs pour toute $\mu \geq 0$ sur $H^{+}_{x_0}$, $\int w(x)\, d\mu(w) \in H^{+}$.

Extension immédiate à la représentation des fonctions de H, au moyen d'une mesure μ de signe quelconque et isomorphisme de H et des mesures portées par ${}^{*}H^{+}_{x_0}$ dans le cas (2°).

Considérons les $u \in H'^{+}$. S'il existe une μ de l'énoncé correspondant à u

$$\frac{u(x)}{u(x_0)} = \int w(x)\, d\mu_1(w) \quad \text{avec} \quad d\mu_1 = \frac{1}{u(x_0)}\, d\mu \;,\quad \int d\mu_1 = 1 .$$

Or $\int w\, d\mu_1(w)$ est un élément vectoriel de H_{x_0} que l'application linéaire continue $w \to w(x)$ transforme en $\int w(x)\, d\mu_1(w)$. Les éléments vectoriels de H_{x_0}, $\frac{u}{u(x_0)}$ et $\int w\, d\mu_1(w)$ sont des fonctions de x partout égales donc sont identiques et le théorème de Choquet entraîne l'unicité de μ_1 donc de μ.

Lorsque Ω est une réunion dénombrable de compacts, il existe pour toute $u \in H'^{+}$ une mesure $\mu_1 \geq 0$ sur H_{x_0}, telle que $\mu(H_{x_0}) = 1$ portée par ${}^{*}H^{+}_{x_0}$ et telle que $\frac{u}{u(x_0)} = \int w\, d\mu_1(w)$, d'où par application linéaire

$u(x) = \int w(x)\, d\mu(w)$ avec $d\mu = u(x_o)\, d\mu_1$.

Notons que pour toute mesure positive sur $H^+_{x_o}$, le centre de gravité donc $\int w(x)\, d\mu(w)$ est une fonction de H^+ ; de même pour toute mesure sur $H^+_{x_o}$, l'intégrale est fonction $\in H$. L'unicité de cette représentation d'une fonction de H (si μ est portée par $\overset{*}{H}{}^+_{x_o}$) vient de ce que, si $\int w(x)\, d\mu_1(w) = \int w(x)\, d\mu_2(x)$ pour deux telles $\mu \geq 0$, $\mu_1 = \mu_2$ d'après (1°).

13. <u>Représentation dans chaque domaine de</u> Ω . <u>L'axiome III'</u>.

Si l'on veut avoir dans chaque domaine de Ω la représentation intégrale précédente, on supposera donc l'axiome de Harnack pour les fonctions harmoniques > 0 de tout domaine. Il est intéressant de condenser les hypothèses par le théorème suivant :

THÉORÈME 12. - Pour un système de fonctions dites harmoniques satisfaisant aux axiomes I et II la réunion de l'axiome III et des axiomes de Harnack pour tous les domaines (et pour les fonctions harmoniques > 0 dans chacun d'eux lorsqu'il y en a) <u>équivaut</u> à l'axiome suivant, auquel on donnera deux formes équivalentes :

AXIOME III'.

(α) Dans tout domaine (ou encore pour les domaines ω_i d'une base) les fonctions harmoniques ≥ 0 sont soit > 0 soit 0 et les fonctions > 0 s'il y en a satisfont à l'axiome de Harnack.

Ou (forme équivalente)

(β) Il existe une base de domaines sur chacun desquels l'ensemble des fonctions harmoniques > 0 est non vide et satisfait à l'axiome de Harnack.

L'axiome III et l'axiome de Harnack pour tout domaine entraînent évidemment (α) et (β) (puisqu'il suffit de considérer les domaines réguliers). Partant maintenant de (α), pour les ω_i , prenons un ordonné filtrant croissant de fonctions harmoniques ≥ 0 dans un domaine δ , et étudions-les dans un $\omega_i \subset \bar{\omega}_i \subset \delta$; si elles ne sont toutes nulles, retenons celles qui sont > 0 ; la limite est $+\infty$ ou bien finie et obtenue par convergence uniforme locale, ce qui grâce à l'axiome II et à la représentation $\int u\, d\rho^{\omega}_x$ (ω régulier $\subset \bar{\omega} \subset \omega_i$) montre que cette limite est alors harmonique. Ainsi dans δ la limite de l'ordonné filtrant est au voisinage de chaque point, soit $+\infty$ soit harmonique et l'axiome III est satisfait.

Il reste à voir que, d'après (β), toute fonction harmonique $u \geq 0$ dans un domaine ω de la base est > 0 dans ω, si elle l'est en un point x_o. Or soit v harmonique > 0 dans ω et formons $\dfrac{u(x) + \frac{1}{n}v(x)}{u(x_o) + \frac{1}{n}v(x_o)}$; cette fonction harmonique > 0 dans ω majore l'enveloppe inférieure des fonctions harmoniques > 0 dans ω, égales à 1 en x_o ; on sait que cette enveloppe est > 0. Donc la limite $\dfrac{u(x)}{u(x_o)}$ de notre expression est > 0.

<u>Application</u>. - Supposons les axiomes I, II, III' et considérons les fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans Ω satisfaisant à $\int v \, d\rho_{x_o}^{\omega_o} = 1$ (ω_o régulier, $x_o \in \omega_o$). Alors dans tout ω régulier, $\int v \, d\rho_x^{\omega}$ est borné en tout point (donc localement uniformément borné).

Car si une suite v_n satisfait à $\int v_n \, d\rho_x^{\omega} \to +\infty$ en un point $x \in \omega$, cette intégrale tend vers $+\infty$ dans ω. Son prolongement par v_n dans $\complement\omega$ est une fonction w_n surharmonique et $\liminf w_n$ est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction valant $+\infty$ dans ω donc partout. Par suite $v_n \to +\infty$ partout et

$\liminf \int v_n \, d\rho_{x_o}^{\omega_o} \geqslant \int \liminf v_n \, d\rho_{x_o}^{\omega_o} = +\infty$ ce qui est incompatible avec

$\int v_n \, d\rho_{x_o}^{\omega_o} = 1$.

14. <u>Ordination</u> des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$.

A côté de l'ordre naturel ($\mathcal{N}$), le plus utile est l'ordre "générique" $\mathcal{G}$ selon lequel $v_1 \prec v_2$ entre fonctions surharmoniques signifie $v_2 = v_1 +$ fonction surh. $\geqslant 0$.

Il y correspond les notions de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{G}$-majorantes (surharmoniques).

THÉORÈME 13. - L'ensemble des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans Ω est pour les deux ordres semi-réticulé supérieurement, c'est-à-dire qu'étant donnés v_1, v_2 surharmoniques $\geqslant 0$ il existe une $\mathcal{N}$-resp $\mathcal{G}$-majorante minima de v_1 et v_2.

Il existe bien de telles majorantes ; exemple : $v_1 + v_2$. Prenons l'enveloppe inférieure (au sens naturel) de ces majorantes et voyons que dans les deux cas c'est une $\mathcal{S}^*_{\mathcal{B}}$-fonction dont la régularisée est encore $\mathcal{N}$ ou $\mathcal{G}$-majorante, et vaut donc l'enveloppe. Le premier cas est évident et l'enveloppe est la $\mathcal{N}$-majorante minima. Dans le deuxième cas, soit W l'enveloppe des majorantes w ; comme $w = v_1 + w'_1$ (w'_1 surharmonique $\geqslant 0$) il vient $W = v_1 + \inf w'_1$ et $\hat{W} = \cancel{v_1 + \widehat{\inf w'_1}}$ ~~d'où~~

$\hat{W} \succ v_1$ et de même $\hat{W} \succ v_2$ donc $\hat{W} \geqslant W$ et l'égalité $\hat{W} = W$.

Il reste à voir, et ce n'est pas évident, que toute $\mathcal{G}$-majorante w_o de v_1 et v_2 est $\mathcal{G}$-majorante de W , qui sera bien la $\mathcal{G}$-majorante minima. Voici la démonstration due à Madame HERVÉ.

Il suffit de voir que $w_o - W$ (précisée par la valeur $+\infty$ là où $w_o = W = +\infty$ et alors notée U) est une $\mathcal{G}^*_{\mathcal{B}}$-fonction, car il s'ensuit par régularisation que w_o est la somme de W et d'une fonction surharmonique $\geqslant 0$. Montrons donc que dans tout domaine régulier ω ,

$$U(x) \geqslant \int U \, d\rho_x^\omega$$

ou

$$w_o(x) - \int U \, d\rho_x^\omega \geqslant W(x) \quad .$$

Considérons sur ω^*, $\psi \geqslant -U$ et semi-continue inférieurement, bornée inférieurement ; on peut la choisir pour que $\Psi = \int \psi \, d\rho_x^\omega$ approche arbitrairement, en x fixé, $-\int U \, d\rho_x^\omega$. Il suffira donc de voir que dans ω $w_o(x) + \Psi(x) \geqslant W(x)$.

Or le premier membre admet en tout point-frontière y une lim inf $\geqslant W(y)$; donc la fonction α égale dans ω à $\inf(w_o + \Psi, W)$ et à W ailleurs est surharmonique. De même si

$$w_o = v_1 + (w_o)'_1 \, , \qquad (w_o)'_1 \text{ surharmonique } \geqslant 0$$

$$W = v_1 + W'_1 \, , \qquad W'_1 \text{ surharmonique } \geqslant 0 \, ,$$

la fonction β égale à $\inf((w_o)'_1 + \Psi, W'_1)$ dans ω et à W'_1 ailleurs est surharmonique $\geqslant 0$. Mais $\alpha = v_1 + \beta$.

Donc $\alpha \succ v_1$ et de même $\alpha \succ v_2$ d'où $\alpha \geqslant W$. Par suite dans ω : $w_o + \Psi \geqslant W$, ce qui achève la démonstration.

<u>Extension</u>. - Un ensemble quelconque de fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ admettant une $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{G}$-majorante en admet une minima. Même démonstration.

15. <u>L'espace vectoriel</u> S <u>des différences de fonctions surharmoniques</u> $\geqslant 0$ dans Ω.

A un couple (u , v) de fonctions surharmoniques $\geqslant 0$, associons la différence $u - v$, définie $\mathcal{B}$-presque partout. On dira que (u , v) et (u_1 , v_1) sont équivalents si $u + v_1 = u_1 + v$, ou, ce qui est équivalent, si $u - v$ et $u_1 - v_1$ sont définies et égales hors d'un ensemble $\mathcal{B}$-négligeable.

La classe d'équivalence contenant (u , v) sera notée $[u , v]$ et $u - v$ dite associée. L'ensemble des $[u , v]$ forme un espace vectoriel réel S selon les opérations

$$\lambda[u , v] = [\lambda u , \lambda v] \text{ si } \lambda \geq 0$$
$$= [-\lambda v , -\lambda u] \text{ si } \lambda \leq 0 \text{ (en posant } 0.\infty = 0)$$
$$[u , v] + [u_1 , v_1] = [u + u_1 , v + v_1]$$

opérations qui correspondent aux opérations sur des différences associées.

Noter l'isomorphisme de l'ensemble S^+ des $[u , 0]$ et de celui des u, (fonctions surharmoniques ≥ 0) ce qui permet l'identification.

L'ordre "<u>générique</u>" dans S sera défini en prenant comme cône des éléments majorant 0, le cône S^+. Alors, selon cet ordre, S est un <u>espace de Riesz complètement</u> réticulé.

<u>Topologie dans</u> S (5). - Choisissant un domaine régulier ω et un point $x \in \omega$, on prend comme semi-norme correspondante de $[u , v]$, $\left|\int (u - v)\, d\rho_x^\omega\right|$. En faisant varier ω dans une base $\mathcal{B}_o$ de domaines réguliers et x dans $\omega \cap X_o$, où X_o est un ensemble fixé partout dense dans Ω, on aura une famille de semi-normes définissant une topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B}_o , X_o)$ localement convexe. Elle est séparée. Supposons en effet les semi-normes de $[u , v]$ nulles. Si $\omega \in \mathcal{B}_o$, $\int (u - v)\, d\rho_x^\omega$ est nul sur $X_o \cap \omega$ donc dans ω. Donc $\int u\, d\rho_x^\omega = \int v\, d\rho_x^\omega$ pour tout x et tout ω de $\mathcal{B}_o$ le contenant, d'où à limite (quand x est fixé) selon l'ordonné filtrant des ω de $\mathcal{B}_o$ contenant x, $u(x) = v(x)$ c'est-à-dire $[u , v] = 0$.

La topologie précédente est compatible avec l'ordre générique. Vérifions que S^+ est fermé. Prenons en effet $[u , v]$ adhérent à S^+ dans S et approchons arbitrairement $\int (u - v)\, d\rho_x^{\omega_1}$ et $\int (u - v)\, d\rho_x^{\omega_2}$ pour $\omega_1 , \omega_2 \in \mathcal{B}_o$, $\bar{\omega}_1 \subset \omega_2$ et $x \in \omega_1 \cap X_o$, par les mêmes intégrales d'une fonction de S^+. On en déduit

$$\int (u - v)\, d\rho_x^{\omega_1} \geq \int (u - v)\, d\rho_x^{\omega_2} \geq 0 \quad \text{dans } \omega_1 \cap X_o \text{ donc dans } \omega_1 ,$$

et par un passage à la limite

$$u(x) - v(x) \geq \int (u - v)\, d\rho_x^{\omega_2} \geq 0 \quad \mathcal{B}_o\text{-presque partout.}$$

Donc $u - v$ vaut $\mathcal{B}_o$-presque partout une $\mathcal{S}^*_{\mathcal{B}}$-fonction ≥ 0 d'où

---

(5) Inspirée d'une idée inédite de H. CARTAN dans le cas classique.

$u = v +$ fonction surharmonique ≥ 0 .

REMARQUE 1. - On pourrait aussi introduire dans S l'ordre naturel et voir qu'il est compatible avec la topologie précédente, mais le cône positif n'est pas S^* .

REMARQUE fondamentale 2. - Lorsqu'on suppose l'axiome III', la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{B}_o , X_o)$ est identique sur S^+ à $\mathcal{C}(\mathcal{B}_o , \Omega)$, laquelle est sur H^+ identique à la topologie de la convergence compacte.

Afin d'utiliser le théorème de Choquet pour les fonctions surharmoniques ≥ 0 , nous utiliserons outre les axiomes I, II, III', un axiome nouveau qui est peut-être d'ailleurs une conséquence des autres :

AXIOME IV. - Il existe une base de domaines réguliers complètement déterminants.

REMARQUE. - S'il existe une base dénombrable ω_n d'ouverts de Ω , l'existence d'après IV d'une base $\alpha_i (i \in I)$ de domaines réguliers complètement déterminants, entraîne l'existence d'une base dénombrable de tels domaines.

Car $\omega_p = \bigcup_{i \in I_p} \alpha_i$ $(I_p \subset I)$ et $\alpha_i = \bigcup \omega_{i_n}$ (i_n suite d'entiers correspondant à i).

L'ensemble des ω_{i_n} pour tous les $i \in I_p$ et les n est démombrable (comme les ω_i) et à chacun des domaines on associera un α_i qui le contient $(i \in I_p)$ d'où une suite α_{h_n} (de réunion ω_p). L'ensemble de ces suites fournit la base dénombrable cherchée.

16. Représentation intégrale des fonctions surharmoniques ≥ 0 .

LEMME. - Considérons sur Ω à base dénombrable des fonctions harmoniques satisfaisant aux axiomes I, II, III' et IV . Si $\mathcal{D}$ est l'ensemble des domaines réguliers complètement déterminants, introduisons sur S la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{D} , \Omega)$, notée brièvement $\mathcal{C}$. Considérons l'ensemble $S^+_{x_o, \omega_o}$ (convexe) des fonctions surharmoniques $v \geq 0$ satisfaisant à $\int v \, d\rho_{x_o}^{\omega_o} = 1$ (ω_o fixé $\in \mathcal{D}$, x_o fixé $\in \omega_o$).

Alors, pourvu de la topologie induite par $\mathcal{C}$, il est métrisable et compact.

Introduisons dans Ω , un ensemble X_o dénombrable partout dense et une base dénombrable $\mathcal{B}_o \subset \mathcal{D}$, contenant ω_o . La topologie $\mathcal{C}(\mathcal{B}_o , X_o)$, fournie par les semi-normes dénombrables relatives aux $\omega \in \mathcal{B}_0$ et $x \in X_0$ est métrisable. Voyons qu'avec cette topologie, $S^+_{x_0,\omega_0}$ déjà métrisable est aussi compact. Soit $u_n \in S^+_{x_0,\omega_0}$. On peut par usage répété d'extractions et du procédé diagonal extraire u_{n_p} telle que $\int u_{n_p}\, d\rho^\omega_x$ (qui est localement uniformément bornée dans ω, selon la fin du n° 13) converge quels que soient $\omega \in \mathcal{B}_0$, $x \in \omega \cap X_0$ d'où grâce à (III') la convergence dans tout ω. Par suite (voir la fin du n° 9),

$$\int u_{n_p}\, d\rho^\omega_x \xrightarrow[p\,\infty]{} \int \liminf u_{n_p}\, d\rho^\omega_x = \int \widehat{\liminf}\, u_{n_p}\, d\rho^\omega_x \quad (x \in \mathcal{B}_0\,,\ x \in \omega)$$

D'où la convergence de u_{n_p} ($p\ \infty$) vers $\widehat{\liminf}\, u_{n_p}$ au sens de $\mathcal{T}(\mathcal{B}_0, X_0)$ et même de $\mathcal{T}(\mathcal{B}_0, \Omega)$. Ceci inclut

$$\int u_{n_p}\, d\rho^{\omega_0}_{x_0} \longrightarrow \int \widehat{\liminf}\, u_{n_p}\, d\rho^{\omega_0}_{x_0} \quad \text{qui vaut donc } 1\,.$$

On a remarqué que $\mathcal{T}(\mathcal{B}_0, X_0)$ est sur S^+ identique à $\mathcal{T}(\mathcal{B}_0, \Omega)$; pour voir l'identité sur $S^+_{x_0,\omega_0}$ (et par suite d'ailleurs sur S^+) avec $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \Omega)$, il suffit de voir que la convergence d'une suite $v_n \in S^+_{x_0,\omega_0}$ vers $v \in S^+_{x_0,\omega_0}$ selon $\mathcal{T}(\mathcal{B}_0, \Omega)$ entraîne $\int v_n\, d\rho^\omega_x \to \int v\, d\rho^\omega_x$ quels que soient $\omega \in \mathcal{B}$, $x \in \omega$. Or si $\mathcal{B}'_0$ est formé de $\mathcal{B}_0$ augmenté de ω, $\mathcal{T}(\mathcal{B}'_0, \Omega)$ rend $S^+_{x_0,\omega_0}$ compact (comme avec $\mathcal{B}_0$) et $\mathcal{T}(\mathcal{B}_0, \Omega)$ moins fine que $\mathcal{T}(\mathcal{B}'_0, \Omega)$ lui est donc identique sur $S^+_{x_0,\omega_0}$.

THÉORÈME 14. - Supposons Ω à base dénombrable et les axiomes I, II, III', IV. Prenons sur S la topologie $\mathcal{T}$ précédente (qui rend compact l'ensemble convexe $S^+_{x_0,\omega_0}$ ($\omega_0 \in \mathcal{B}$) et est identique sur H^+ à la topologie de la convergence compacte). Alors pour chaque $v \in S^+$, il existe une mesure de Radon (dite associée) unique $\mu \geq 0$ sur $S^+_{x_0,\omega_0}$, portée par l'ensemble ${}^*S^+_{x_0,\omega_0}$ des points extrémaux de $S^+_{x_0,\omega_0}$ et telle que $v(x) = \int w(x)\, d\mu(w)$, w décrivant $S^+_{x_0,\omega_0}$.

D'ailleurs pour toute mesure $\mu \geq 0$ sur $S^+_{x_0,\omega_0}$, $\int w(x)\, d\mu(w) \in S^+$.

Extension à $v \in S$ avec mesure de Radon non plus nécessairement ≥ 0 et isomorphisme de S et de l'ensemble des mesures portées par ${}^*S^+_{x_0, \omega_0}$.

Si v est harmonique, la mesure associée précédente est portée par $H^+_{x_0}$ et coïncide sur $H^+_{x_0}$ avec la mesure donnée par le théorème 11.

REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

1° Pour toute $v \in S^+$, $v(x)$ est semi-continue inférieurement dans $S^+ \times \Omega$ et si μ est une mesure ≥ 0 sur $S^+_{x_0, \omega_0}$, $\int w(x)\, d\mu(w) \in S^+$ (w décrivant $S^+_{x_0, \omega_0}$).

Car cette intégrale φ est semi-continue inférieurement dans Ω et pour ω régulier, $x \in \omega$

$$\int \varphi\, d\rho^{\omega}_{x} = \int \left[\int w(y)\, d\rho^{\omega}_{x} \right] d\mu(w) \leq \int w(x)\, d\mu(w) = \varphi(x) \quad .$$

Mais cela résulte aussi du résultat suivant :

2° Si μ est une mesure unitaire ≥ 0 sur $S^+_{x_0, \omega_0}$ (compact convexe), le centre de gravité $\int w\, d\mu(w)$ est une fonction $v \in S^+_{x_0, \omega_0}$ dont la valeur en x est $\int w(x)\, d\mu(w)$. Car l'application linéaire continue $w \longrightarrow \int w(y)\, d\rho^{\omega}_{x}(y)$ ($\omega \in \mathcal{O}$, $x \in \omega$; w décrivant $S^+_{x_0, \omega_0}$ muni de $\mathcal{C}$) donne

$$\int v(y)\, d\rho^{\omega}_{x}(y) = \int \left[\int w(y)\, d\rho^{\omega}_{x}(y) \right] d\mu(w) \quad .$$

Passons à la limite selon le filtre des sections de l'ordonné filtrant des ω de $\mathcal{O}$ contenant x fixé. Comme $\int w(y)\, d\rho^{\omega}_{x}$ est une fonction décroissante de ω et tend vers $w(x)$, il vient

$$v(x) = \int w(x)\, d\mu(w) \quad ,$$

DÉMONSTRATION du THÉORÈME :

Partons alors de v quelconque $\in S^+$: d'après le théorème de Choquet, il existe une mesure $\mu_1 \geq 0$ unitaire unique sur $S^+_{x_0, \omega_0}$ portée par ${}^*S^+_{x_0, \omega_0}$ et dont le centre de gravité est $\dfrac{v}{\int v\, d\rho^{\omega_0}_{x_0}} \in S^+_{x_0, \omega_0}$. D'où $v(x) = \int w(x)\, d\mu(w)$ en posant

$d\mu = \int v \, d\mu_{x_0}^{\omega_0} . d\mu_1$.

Inversement une telle représentation (avec $\mu \geq 0$ sur $S^+_{x_0, \omega_0}$, portée par ${}^*S^+_{x_0, \omega_0}$) est unique parce que, comme on va le voir, la mesure μ_1 définie par la proportionnalité qui précède, admet comme centre de gravité $\frac{v}{\int v d\rho_{x_0}^{\omega_0}}$. Voyons donc l'identité des éléments $\frac{v}{\int v d\rho_{x_0}^{\omega_0}}$ et $\int w \, d\mu_1(w)$ de S^+. Elle résulte de ce que les valeurs en x de ces fonctions sont $\frac{v(x)}{\int v(y) d\rho_{x_0}^{\omega_0}(y)}$ et $\int w(x) \, d\mu_1(w)$, d'après la remarque précédente.

17. Rappel de notations. Potentiels (axiomes I, II, III', IV, et base dénombrable).

S ensemble des différences de fonctions surharmoniques ≥ 0 dans Ω, avec la topologie $\mathcal{E}$.

S^+ ensemble des fonctions surharmoniques ≥ 0 .

$S^+_{x_0, \omega_0}$ sous-ensemble des fonctions normalisées selon $\int v \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1$ ($\omega_0 \in \mathcal{D}$, $x_0 \in \omega_0$) métrique compact selon $\mathcal{E}$.

${}^*S^+_{x_0, \omega_0}$ ensemble des éléments extrémaux de $S^+_{x_0, \omega_0}$ (ensemble G_δ dans les espaces précédents).

H ensemble des différences de fonctions harmoniques ≥ 0

H^+ ensemble des fonctions harmoniques ≥ 0 .

$H^+_{x_0}$ ensemble des fonctions précédentes normalisées, compact selon $\mathcal{E}$.

${}^*H^+_{x_0}$ ensemble des éléments extrémaux de $H^+_{x_0}$, ou encore des éléments extrémaux de $S^+_{x_0, \omega_0}$ qui appartiennent à $H^+_{x_0}$ (G_δ dans les espaces $H^+_{x_0}$ ou $S^+_{x_0, \omega_0}$).

P^+ ensemble des potentiels $\subset S^+$.

$P^+_{x_0, \omega_0}$ ensemble des potentiels normalisés.

${}^{*}P^{+}_{x_o,\omega_o}$ ensemble des éléments extrémaux de $P^{+}_{x_o,\omega_o}$ ou encore des éléments extrémaux de $S^{+}_{x_o,\omega_o}$ appartenant à $P^{+}_{x_o,\omega_o}$.

Tous ces ensembles sans étoile sont convexes.

PROPRIÉTÉS.

a. $H^{+}_{x_o} \cap P^{+}_{x_o,\omega_o} = \emptyset$; ${}^{*}S^{+}_{x_o,\omega_o} = {}^{*}H^{+}_{x_o} \cup {}^{*}P^{+}_{x_o,\omega_o}$, ${}^{*}P^{+}_{x_o,\omega_o} = \complement H^{+}_{x_o} \cap {}^{*}S^{+}_{x_o,\omega_o}$ donc G_δ dans $S^{+}_{x_o,\omega_o}$.

b. Dans la représentation canonique d'un potentiel v , la mesure μ est portée par ${}^{*}P^{+}_{x_o,\omega_o}$. Car s'il y avait des masses sur $H^{+}_{x_o}$, elles donneraient une intégrale harmonique > 0 minorante de v.

c. Pour toute mesure $\mu > 0$ sur $S^{+}_{x_o,\omega_o}$, portée par $P^{+}_{x_o,\omega_o}$ (supposé non vide), la fonction $v(x) = \int w(x)\, d\mu(w)$ est un potentiel.

Introduisons en effet une suite croissante $\omega_n \subset \bar{\omega}_n \subset \Omega$, telle que $\bigcup \omega_n = \Omega$ et la mesure harmonique correspondante $\mu_x^{\omega_n}$. On a vu que $R_v^{\omega_n}(y) = \int v\, d\mu_y^{\omega_n}$.

Comme $w(x)$ est semi-continue inférieurement dans $S^{+} \times \Omega$,

$$R_v^{\omega_n}(y) = \int \left[\int w(x)\, d\mu_y^{\omega_n}(x) \right] d\mu(w)$$

et $\int w(x)\, d\mu_y^{\omega_n}(x)$ est, pour y et n fixés, une fonction semi-continue inférieurement de $w \in S^{+}$. Notons $\overset{*}{w}$ la plus grande minorante harmonique d'une fonction $w \in S^{+}$. En passant à la limite dans la dernière égalité, il vient

$$\overset{*}{v}(y) = \int \overset{*}{w}(y)\, d\mu(w) = 0 \quad .$$

d. S'il existe un potentiel $V > 0$ dans Ω , toute $v \in S^{+}$ est la limite d'une suite croissante de potentiels (au sens ordinaire donc aussi selon $\mathcal{C}$) d'où $S^{+} = \overline{P^{+}}$, $S^{+}_{x_o,\omega_o} = \overline{P^{+}_{x_o,\omega_o}}$. De plus ${}^{*}S^{+}_{x_o,\omega_o} \subset \overline{{}^{*}P^{+}_{x_o,\omega_o}}$.

Si $v > 0$, $\inf(v , nV)$ est un potentiel $v_n > 0$ tendant en croissant vers v

et $\dfrac{v_n}{\int v_n d\rho_{x_o}^{\omega_o}}$ converge vers $\dfrac{v}{\int v d\rho_{x_o}^{\omega_o}}$ selon $\mathcal{C}$.

Soit v extrémal de $S^+_{x_o,\omega_o}$, $v_n \in P^+_{x_o,\omega_o}$ tendant vers v selon $\mathcal{C}$; μ_n associée ne charge que ${}^*P^+_{x_o,\omega_o}$. On peut extraire μ_{n_p} convergeant vaguement vers μ unitaire ≥ 0 sur le compact ${}^*P_{x_o,\omega_o}$ et $v = \int w \, d\mu(w)$. Or si α est un compact de mesure μ non nulle dans ${}^*P_{x_o,\omega_o}$, $\int_\alpha w(x) \, d\mu(w)$, surharmonique, majorée par v selon l'ordre générique, est proportionnelle à v . D'où $v = \dfrac{1}{\mu(\alpha)} \int_\alpha w \, d\mu(w)$. Grâce à des recouvrements, on forme une suite de tels α_n emboités, dans ${}^*P_{x_o,\omega_o}$, de μ-mesure $\neq 0$ et de diamètre tendant vers 0 , donc contenant un point p de ${}^*\overline{P}_{x_o,\omega_o}$. Pour n assez grand, α_n donc son enveloppe convexe fermée sont contenus dans un voisinage convexe fermé arbitrairement choisi de p dans S ; v étant centre de gravité d'une mesure sur α_n est aussi dans ce voisinage d'où $v = p$.

THÉORÈME 15 (Représentation de Martin-Riesz généralisée). - On suppose I, II, III', IV, une base dénombrable, et l'existence d'un potentiel > 0 (sinon $S \equiv H$). On considère la topologie $\mathcal{C}$ sur S^+ et $\omega_o \in \mathcal{O}$, $x_o \in \omega_o$. Pour toute fonction $v \in S^+$

$$v(x) = \int w(x) \, d\mu_1(w) + \int w(x) \, d\mu_2(w) \qquad (w \in S^+)$$

où μ_1 , μ_2 sont des mesures ≥ 0 uniques sur $S^+_{x_o,\omega_o}$ telles que μ_1 soit portée par ${}^*H^+_{x_o}$ et μ_2 par ${}^*P^+_{x_o,\omega_o}$. La première intégrale est la plus grande minorante harmonique de v et la seconde un potentiel.

Une telle décomposition est obtenue en décomposant de façon évidente la mesure du théorème 14 ; de plus la seconde intégrale étant un potentiel, la première, étant harmonique, est la plus grande minorante harmonique de v ; cela détermine les deux termes, donc les deux mesures.

Cas classique. - Indiquons seulement que dans le cas classique des espaces de Green, les potentiels extrémaux de $S^+_{x_o,\omega_o}$ sont les fonctions de Green normalisées $w_y(x) = \dfrac{G_y(x)}{\int G_y(x)\, d\rho_{x_o}^{\omega_o}(x)}$ et que la correspondance $y \Leftrightarrow w_y(x)$ est une homéomorphie entre l'espace Ω et le sous-espace ${}^*P^+_{x_o,\,\omega_o}$. De sorte que la mesure μ_2 portée par ${}^*P^+_{x_o,\,\omega_o}$ est aussi une mesure de Radon sur Ω et que $\int w(x)\, d\mu_2(w)$ vaut $\int G_y(x)\, d\nu(y)$, où ν est une autre mesure de Radon $\geqslant 0$ (unique) sur Ω. D'autre part les éléments extrémaux de $H^+_{x_o}$ appartiennent à ${}^*\bar{P}_{x_o,\,\omega_o} \cap H^+_{x_o}$ qui est la "frontière de Martin" de Ω et en sont les "points minimaux" ; la première intégrale du théorème est la représentation intégrale de Martin de la plus grande minorante harmonique.

III. Le théorème fondamental de convergence.

18. On supposera, sauf avis contraire, et au début, les seuls axiomes I, II, III et Ω quelconque (sans hypothèse de base dénombrable).

Réduite et ensembles polaires. - Complétons le n° 5 sur la réduite R_v^E dans Ω ou de $(R_v^E)_\omega$ relative à un ouvert partiel, correspondant à v surharmonique $\geqslant 0$ et l'ensemble E quelconque.

LEMME. - Pour tout $E \subset \Omega$ et tout ouvert $\omega \subset \Omega$

$$(R_v^{E\cap\omega})_\omega \leq R_v^{E\cap\omega} \leq R_v^E \leq R_v^{E\cup\complement\omega}$$

et la différence entre les termes extrèmes est majorée dans ω par $R_v^{\complement\omega}$

Les inégalités sont évidentes mais la comparaison des termes extrèmes plus difficile. Ce serait trivial si $\omega = \Omega$. Sinon montrons que

$$(R_v^{E\cap\omega})_\omega + R_v^{\complement\omega} \geqslant R_v^{E\cup\complement\omega} \quad .$$

Etant donné $\varepsilon > 0$ et $x_o \in \omega$, on choisit w surharmonique $\geqslant 0$ dans ω, majorant v sur $E \cap \omega$ et telle que

$$w(x_o) \leq (R_v^{E\cap\omega})_\omega (x_o) + \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Soit w_1 surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω majorant v sur $\complement\omega$ et telle que $w_1(x_o) \leq R_v^{\complement\omega}(x_o) + \frac{\varepsilon}{2}$. Introduisons w' égale à v dans $\complement\omega$ et à $\inf(w + w_1\,, v)$ dans ω. C'est une fonction surharmonique $\geqslant 0$ majorant v

sur $E \cup \complement\omega$ d'où $w' \geq R_v^{E \cup \complement\omega}$. D'autre part

$$w'(x_o) \leq (R_v^{E \cap \omega})_\omega (x_o) + R_v^{\complement\omega}(x_o) + \varepsilon \quad .$$

D'où, ε étant arbitraire, l'inégalité cherchée en x_o pris arbitrairement.

COROLLAIRE. - Si v est un potentiel, $(R_v^{E\cap\omega})_\omega \to R_v^E$ selon l'ordonné filtrant des $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$. Car $R_v^{\complement\omega}$ tend vers 0 (plus grande minorante harmonique de v).

THÉORÈME 16. - Soit W surharmonique finie continue > 0 dans Ω, x_o fixé. $R_W^E(x_o)$ définit pour E compact variable une capacité de Choquet (c'est-à-dire est croissante, continue à droite et fortement sous-additive) et pour E quelconque est la capacité extérieure correspondante.

Tout est trivial s'il n'existe pas de potentiel > 0. On supposera donc l'existence d'un potentiel $V_o > 0$, même fini continu.

D'abord $R_W^E(x_o) = \inf R_W^\omega(x_o)$ pour les ouverts contenant E.

Soit en effet v surharmonique ≥ 0 majorant W sur E et telle que $v(x_o) \leq R_W^E(x_o) + \varepsilon$. v majore $W(1 - \varepsilon)$ dans un ouvert ω contenant E d'où $\dfrac{v}{1-\varepsilon} \geq R_W^\omega$.

Donc

$$(1 - \varepsilon) R_W^\omega(x_o) \leq v(x_o) \leq R_W^E(x_o) + \varepsilon$$

$$R_W^\omega(x_o) - R_W^E(x_o) \leq \varepsilon\,(1 + W(x_o))$$

ce qui établit notre affirmation.

Etudions $R_W^E(x_o)$ pour E compact. La croissance et d'après ce qui précède, la continuité à droite sont immédiates. La sous-additivité forte s'exprime par la propriété suivante, pour deux compacts E_1, E_2

$$R_W^{E_1 \cup E_2} + R_W^{E_1 \cap E_2} \leq R_W^{E_1} + R_W^{E_2} \quad \text{, qu'on va démontrer en tout point.}$$

On peut supposer que W est un potentiel car on ne change pas les réduites précédentes en remplaçant W par le potentiel $\inf(W, \lambda V_o)$, où λ est tel que λV_o majore W sur $E_1 \cup E_2$.

Mais alors d'après le dernier corollaire il suffit de démontrer l'inégalité avec des réduites relatives à un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, $\omega \supset E_1 \cup E_2$; et on sait que dans ω existe une fonction harmonique de borne inférieure > 0.

On vérifie d'abord l'inégalité sur $E_1 \cup E_2$. Par exemple en un point de E_1

$$(R_W^{E_1 \cup E_2})_\omega = W = (R_W^{E_1})_\omega \quad \text{et} \quad (R_W^{E_1 \cap E_2})_\omega \leq (R_W^{E_2})_\omega \quad .$$

Désignons par $\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_{1,2} \ \varphi'_{1,2}$ les fonctions égales à 0 sur ω^* et égales dans ω aux réduites $(R_W^{E_1})_\omega$, $(R_W^{E_2})_\omega$, $(R_W^{E_1 \cup E_2})_\omega$, $(R_W^{E_1 \cap E_2})_\omega$. On voit que, en posant $\delta = \omega - E_1 \cup E_2$

$$\varphi_1 = \mathcal{H}_{\varphi_1}^{\omega - E_1} = \mathcal{H}_{\varphi_1}^{\delta} \quad \text{et de même} \quad \varphi_2 = \mathcal{H}_{\varphi_2}^{\delta} \quad \text{etc.}$$

Comme $\varphi_1 + \varphi_2 \geq \varphi_{1,2} + \varphi'_{1,2}$ sur δ^*, il vient dans δ

$$\mathcal{H}^{\delta}_{\varphi_1 + \varphi_2} \geq \mathcal{H}^{\delta}_{\varphi_{1,2} + \varphi'_{1,2}}$$

d'où

$$\mathcal{H}^{\delta}_{\varphi_1} + \mathcal{H}^{\delta}_{\varphi_2} \geq \mathcal{H}^{\delta}_{\varphi_{1,2}} + \mathcal{H}^{\delta}_{\varphi'_{1,2}}$$

qui est l'inégalité cherchée dans δ.

Après cette étude de $R_W^E(x_o)$ pour E compact, voyons pour finir que si ω est ouvert $\subset \Omega$

$$R_W^{\omega}(x_o) = \sup_{K \subset \omega} R_W^K(x_o) \quad \text{pour tous les compacts} \quad K \subset \omega$$

ce qui, avec la propriété indiquée au début de la démonstration, prouve que $R_W^E(x_o)$ est bien en général la capacité extérieure correspondant à la capacité de Choquet des compacts.

Or $\hat{R}_W^K(x)$ qui est $\leq R_W^{\omega}(x)$ tend, selon l'ordonné filtrant des $K \subset \omega$, vers une fonction surharmonique ≥ 0 (à priori $\leq W$), qui vaut W sur ω (parce que certains K contiennent un voisinage de chaque point fixé de ω) et majore donc $R_W^{\omega}(x)$.

Ainsi $\sup_K \hat{R}_W^K = R_W^{\omega}$ (d'ailleurs égale à sa régularisée).

D'ailleurs comme R_W^K vaut $\hat{R}_W^K$ hors ω et W sur K, $\sup_{K \subset \omega} R_W^K = \sup_{K \subset \omega} \hat{R}_W^K$.

19. Ensembles polaires. - Un ensemble E est dit polaire dans ω_o ouvert $\subset \Omega$,

s'il existe dans ω_o une fonction surharmonique ≥ 0 (ou ce qui est équivalent un potentiel) dite associée, valant $+\infty$ en tout point de $E \cap \omega_o$. Quasi-partout dans ω_o signifie "sauf sur un ensemble polaire dans ω_o". Un ensemble est dit intérieurement polaire si tout compact contenu est polaire. La polarité équivaut à la même propriété pour chacun des domaines composants de ω_o. De sorte qu'on se ramène au cas de ω_o connexe, autrement dit de Ω.

Premières propriétés (dans Ω).

1° E polaire est $\mathcal{B}$-négligeable (pour la base $\mathcal{B}$ de tous les domaines réguliers). Autrement dit pour tout domaine régulier ω, $\int \varphi_E \, d\rho_x^\omega = 0$ (φ_E fonction caractéristique de E).

Car si v est surharmonique associée $\int v \, d\rho_x^\omega$ est finie dans ω.

Conséquences. - $\complement E$ est partout dense ; toute fonction hyperharmonique v est déterminée par ses valeurs sur $\complement E$ (puisque valant en x la limite de $\int v \, d\rho_x^\omega$ selon l'ordonné filtrant des ω réguliers contenant x).

On appelle quasi-hyperharmonique, quasi-surharmonique, une fonction égale quasi-partout à une fonction hyperharmonique, resp surharmonique, d'ailleurs unique (pour la raison qui précède).

2° Toute réunion dénombrable d'ensembles polaires E_n est polaire.

Car si v_n est associée à E_n et telle que $\int v_n \, d_{x_o}^{\omega_o} = \frac{1}{n^2}$ (en choisissant ω_o régulier, $x_o \in \omega_o$) $\sum v_n$ est surharmonique ≥ 0, infinie sur $\bigcup E_n$.

3° Si E est polaire, et fermé dans Ω, $\complement E$ est connexe.

Sinon $\complement E = \omega_1 \cup \omega_2$, ω_1, ω_2 ouverts non vides disjoints. Soit v associé à E et w égale à v dans ω_1, à $+\infty$ dans $\omega_2 \cup E$. Grâce au critère local, on voit que w est hyperharmonique et puisque $+\infty$ dans ω_2, elle vaut $+\infty$ partout, en particulier dans ω_1 où elle vaut v, ce qui est contradictoire.

4° Si E est polaire et fermé dans Ω, et v surharmonique dans $\Omega - E$ et bornée inférieurement au voisinage de tout point de Ω, v admet un prolongement unique surharmonique dans Ω.

Si w est associée à E, la fonction v_n égale à $+\infty$ sur E, à $v + \frac{1}{n} w$ sur $\complement E$ est surharmonique et localement bornée inférieurement, uniformément. La limite est donc une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction V, égale à v sur $\complement E$ en tout point où w est finie donc $\mathcal{B}$-presque partout. De sorte que $\hat{V} = v$ sur $\complement E$. $\hat{V}$ est un prolongement cherché, dont l'unicité vient de sa détermination par les valeurs sur $\complement E$.

Critère. THÉORÈME 17. - Pour que $E \subset \Omega$ soit polaire dans Ω , il faut et il suffit que pour une (ou toute) fonction surharmonique $W > 0$ dans Ω , il existe un point x_o où R_W^E soit nul, ou encore que $\hat{R}_W^E \equiv 0$.

En effet si E est polaire, il existe v surharmonique > 0 , dont les infinis forment un ensemble $E_1 \supset E$. Soit $x_o \notin E_1$; λv majore W sur E quel que soit $\lambda > 0$. D'où $R_W^E(x_o) = 0$. Ainsi R_W^E est nul sur $\complement E_1$ partout dense d'où $\hat{R}_W^E \equiv 0$.

Réciproquement supposons $R_W^E(x_o) = 0$ pour un point x_o ; il existe v_n surharmonique > 0 majorant W sur E et minorant $\frac{1}{n^2}$ au point x_o . Alors Σv_n est surharmonique > 0 , infinie sur E .

Si on suppose seulement $\hat{R}_W^E$ nul en un point donc partout, R_W^E est une $\delta_{\mathcal{B}}$ -fonction de régularisée nulle donc $\overline{\int} R_W^E \, d\rho_x^\omega = 0$ pour tout $\omega \in \mathcal{B}$. Cela entraîne $R_W^E = 0$ presque partout - $d\rho_x^\omega$ sur ω^* donc R_W^E nulle en un point.

COROLLAIRE. - Un ensemble K-analytique (au sens de CHOQUET) E_o intérieurement polaire est polaire. On se ramène au cas où E_o ne coupe pas un voisinage ouvert de x_o et on utilise la capacité de Choquet $R_W^E(x_o)$ pour u W fini continu.

Caractère local. THÉORÈME 18. - Supposons qu'il existe un potentiel > 0 dans Ω . Soit E un ensemble localement polaire (c'est-à-dire que dans un voisinage ouvert δ de chaque point, $E \cap \delta$ est polaire dans δ). Alors E est polaire dans Ω .

On utilise un potentiel fini continu $V_o > 0$.

a. Soit $E \subset \bar{E} \subset \delta \subset \bar{\delta} \subset \Omega$ et supposons E polaire dans δ .

Si v est une fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans δ , associée à E . On sait qu'il existe dans Ω un potentiel qui, dans un ouvert contenant $\bar{E}$, diffère de v d'une fonction harmonique. De sorte que E est polaire dans Ω .

b. Soit $E \subset \bar{E} \subset \Omega$ et supposons qu'à chaque $x \in \Omega$ est associé un ouvert δ tel que $E \cap \delta$ est polaire dans δ . Si on prend δ' , δ'' tels que $x \in \delta'' \subset \bar{\delta}'' \subset \delta' \subset \bar{\delta}' \subset \delta$ $E \cap \delta''$ est polaire dans δ' donc dans Ω . Couvrons $\bar{E}$ par un nombre fini de tels δ'' soit les δ''_i ; $\delta''_i \cap E$ est polaire dans Ω donc aussi $\bigcup \delta''_i \cap E = E$.

c. Cas général. On se ramène au cas où E ne coupe pas un voisinage d'un point $x_0 \in \Omega$ (car E est en général la réunion de deux tels ensembles). Considérons ω ouvert $\subset \bar{\omega} \subset \Omega$ et contenant x_0. $E \cap \bar{\omega}$ est polaire dans Ω, $E \cap \omega$ est polaire dans ω donc $(R_{V_0}^{\widehat{E\cap\omega}})_\omega = 0$ et $R_{V_0}^{E\cap\omega}$ est nul en x_0. La limite $R_{V_0}^E(x_0)$ selon l'ordonné filtrant des ω est donc nulle. E est bien polaire dans Ω

REMARQUE. - On pourrait se passer du théorème 7 pour établir (a) en utilisant la propriété générale suivante des réduites ; si W est surharmonique > 0 finie continue, $E \subset \bar{E} \subset \omega$ ouvert $\subset \bar{\omega} \subset \Omega$ et $\varphi = R_W^E$, on a dans ω

$$R_W^E = (R^E_{W-\mathcal{H}_\varphi^\omega})_\omega + \mathcal{H}_\varphi^\omega \quad .$$

20. Le principe de domination (sans hypothèse de base dénombrable).

DÉFINITION. - v étant surharmonique ≥ 0 dans Ω, on appelle :

a. Support de v, le complémentaire du plus grand ouvert où v est harmonique

b. Meilleure minorante harmonique de v dans un ouvert $\omega \subset \Omega$, la réduite $R_v^{\complement\omega}$ dans ω (qui, comme on sait, vaut dans chaque domaine composant ω_i de ω la réduite $R_v^{\complement\omega_i}$). On va introduire en supposant seulement les axiomes I, II, III un nouvel axiome dont on va donner des formes équivalentes.

AXIOME IV (ou D) (forme faible A). - Si v est un potentiel localement borné, de plus harmonique dans un domaine $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, tout autre potentiel w le majorant sur $\complement\omega$ le majore sur ω.

Conséquences (formes fortes équivalentes).

B. Pour tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ et toute fonction surharmonique $v \geq 0$ localement bornée dans Ω, la meilleure minorante harmonique et la plus grande minorante harmonique dans ω sont égales.

C. (Principe de domination).

Pour tout potentiel v localement borné, toute fonction surharmonique ≥ 0 majorant v sur son support le majore partout.

On supposera l'existence d'un potentiel > 0 sinon tout serait trivial ; il est évident que (B) et (C) entraînent (A).

Supposons (A) et montrons (B). Soit v surharmonique ≥ 0 localement borné. On se ramène à v potentiel, car par exemple si ω_0 ouvert satisfait à $\omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_0 \subset \bar{\omega}_0 \subset \Omega$, $\hat{R}_v^{\omega_0}$ est un potentiel et admet dans ω les mêmes meilleure et plus grande minorante harmonique que v . On peut aussi supposer que ω est un domaine, vu les propriétés des minorantes considérées.

Mais alors la plus grande minorante harmonique de v dans ω est telle que son prolongement V par v est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction (famille $\mathcal{B}$ quelconque), car si $\delta \subset \bar{\delta} \subset \omega$, c'est la limite (par décroissance) de $R_v^{\complement\delta}$ ($\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction, harmonique dans δ) selon l'ordonné filtrant des δ . Considérons alors $\hat{V}$, potentiel $\leq v$. Soit dans Ω , w surharmonique ≥ 0 majorant v sur $\complement\omega$
$w_1 = \inf(v , w)$ est surharmonique ≥ 0 et $\leq v$. C'est un potentiel majorant $\hat{V}$ sur $\complement\omega$ donc dans ω (d'après (A)) d'où $R_v^{\complement\omega} \geq \hat{V}$ dans ω .

Voyons que (A) ou (B) entraîne (C). Soit le potentiel v localement borné de support S , w surharmonique ≥ 0 majorant v sur S , w_1 surharmonique ≥ 0 majorant v sur $\complement\omega$ (ω ouvert $\subset\bar{\omega}\subset\Omega$). Alors $w + \inf(w_1 , v)$ majore v dans $\complement\omega \cup S$ donc $R_v^{\complement\omega \cup S}$; d'où $w + R_v^{\complement\omega} \geq R_v^{\complement\omega \cup S}$. Mais d'après (B) le second membre vaut v dans $\omega \cap \complement S$ tandis que $R_v^{\complement\omega} \to 0$ selon l'ordonné filtrant des ω d'où $w \geq v$.

REMARQUE. - Si dans (A), (B), (C) on supprime l'hypothèse que v est localement borné, on a encore des énoncés équivalents, mais qui ne sont pas vrais dans le cas classique.

Caractère local. S'il existe un potentiel > 0 dans Ω , l'axiome IV' dans Ω entraîne la même propriété pour tout domaine partiel, comme il résulte aisément du théorème 7.

On verra plus tard que, au moins si Ω est à base dénombrable la propriété (IV') dans tous les domaines d'une base entraîne (IV') dans Ω .

Application de (IV'). THÉORÈME 19. - Soit dans Ω , v surharmonique ≥ 0 localement bornée de rapport S et dans Ω un point-frontière y de S . En supposant IV' (outre I, II, III sans plus)

$$\limsup_{x \in \complement S, x \to y} v(x) = \limsup_{x \in S, x \to y} v$$

D'où la continuité de v dans Ω en y , si sa restriction sur S est continue au point y .

On s'appuiera sur la remarque suivante : si en un point x_0 , une fonction surharmonique v quelconque au voisinage est finie, considérons les domaines ω réguliers contenant x_o et sur ω^*, l'ensemble e où $v > v(x_o) + \varepsilon$; alors $\int \varphi_e \, d\rho_{x_o}^{\omega} \to 0$ selon l'ordonné filtrant des ω ordonnés par inclusion (φ_e fonction caractéristique de e). Cela résulte de ce que $\int v \, d\rho_{x_o}^{\omega} \to v(x_o)$. On reviendra sur cette propriété dans la théorie générale de l'effilement.

Passons au théorème. On voit d'abord l'inégalité $\geq$. S'il n'y avait pas égalité, on introduirait λ strictement compris entre les deux membres et dans $\complement S$ l'ensemble ouvert δ où $v > \lambda$, puis son intersection δ' avec un domaine ω régulier contenant y. Dans δ', v vaut $\bar{\mathcal{H}}_v^{\delta'}$ d'après (IV' B). Si φ_1 et φ_2 valent v et 0 dans ω, 0 et v sur ω^*, on a dans δ'

$$v = \bar{\mathcal{H}}_v^{\delta'} \leq \bar{\mathcal{H}}_{\varphi_1}^{\delta'} + \bar{\mathcal{H}}_{\varphi_2}^{\delta'} .$$

On montre que si $\lambda' > \lambda$, le premier terme de droite est majoré par λ' quand ω est assez petit. D'autre part $\bar{\mathcal{H}}_{\varphi_2}^{\delta'}(x) \leq \int \varphi_2' \, d\rho_x^{\omega}$ où $\varphi_2' = \varphi_2$ sur $\delta'^* \cap \omega^*$ et 0 ailleurs et cette intégrale, pour $x = y$ tend vers 0 selon l'ordonné filtrant des ω. Donc $\bar{\mathcal{H}}_{\varphi_2}^{\delta'}(x)$ admet pour ω assez petit une $\limsup_{x \in \delta', x \to y}$ arbitrairement petite.

De tout cela résulte que $v(x)$ admet une $\limsup_{x \in \complement S, x \to y} v(x) \leq \lambda$ ce qui est contradictoire.

Lorsque Ω est à base dénombrable, Madame HERVÉ a montré que (IV') est équivalente à la propriété précédente ou même seulement à ce que, pour v localement borné, la continuité de la restriction sur le noyau entraîne la continuité sur Ω (ce qui entraîne aussi la propriété de caractère local énoncé plus haut).

21. Les théorèmes de convergence.

Cas des suites. THÉORÈME 20. - On suppose les axiomes I, II, III, IV' et Ω à base dénombrable. Soit v_n une suite décroissante de fonctions surharmoniques $\geq$ La limite v (qui est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction) diffère de sa régularisée $\hat{v}$ sur un ensemble polaire c'est-à-dire est ~~quasi-surharmonique~~.

On pourra supposer l'existence d'un potentiel > 0, donc d'un potentiel fini continu $V_o > 0$, sinon v_n serait harmonique et la limite harmonique, égale à sa régularisée. Supposons d'abord v_1 localement bornée. Soit α l'ensemble où $v(x) - \hat{v}(x) > \varepsilon$. Il suffira de prouver qu'il est polaire, puisque l'ensemble exceptionnel du théorème est réunion dénombrable de tels ensembles. Comme α est borélien dans $\bar{\Omega}$ compact métrisable, donc K-analytique, il suffit de voir que α est intérieurement polaire ou encore que tout compact $K \subset \alpha$ est polaire. Soit alors $K \subset \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ (ω ouvert). Nous disposons des notions sur le problème de Dirichlet (voir la fin du n° 7) pour l'ouvert $\omega - K$, où

$$v_n(x) \geq \mathcal{H}_{v_n}^{\omega-K}(x) = \int v_n \, d\mu_x^{\omega-K}$$

D'où

$$v(x) \geq \mathcal{H}_v^{\omega-K}(x) = \int v \, d\mu_x^{\omega-K}$$

et

$$\hat{v}(x) \geq \mathcal{H}_v^{\omega-K}(x) \geq \mathcal{H}_{\hat{v}}^{\omega-K}(x)$$

D'après (IV' B), $\mathcal{H}_{\hat{v}}^{\omega-K}$ est la plus grande minorante harmonique de $\hat{v}$ dans $\omega - K$ donc vaut la fonction harmonique $\mathcal{H}_v^{\omega-K}$.

Ainsi

$$\mathcal{H}_v^{\omega-K} = \mathcal{H}_{\hat{v}}^{\omega-K} \qquad .$$

Donc

$$\mathcal{H}_{v-\hat{v}}^{\omega-K} = 0 \qquad .$$

Or $v - \hat{v} > \varepsilon$ sur K ; prenons $\lambda > 0$ tel que $\lambda V_o < \varepsilon$ sur K . Dans $\omega - K$

$$(R^K_{\lambda V_o})_\omega = \mathcal{H}^{\omega-K}_{\lambda V_o^*} \leq \mathcal{H}^{\omega-K}_{v-\hat{v}} = 0 \quad (\text{où } \lambda V_o^* \text{ vaut } 0 \text{ sur } \omega^* \text{ et } \lambda V_o \text{ sur } K)$$

D'où $(R^K_{V_o})_\omega = 0$ dans $\omega - K$.

Donc K est polaire dans ω et par suite aussi relativement à Ω .

On passe au cas général en considérant $v_n^p = \inf(v_n , pV_o)$ décroissante de n. Comme $\lim_{n\infty} v_n = \lim_{p\infty} [\lim_{n\infty} v_n^p]$, $\lim v_n$ vaut quasi-partout la limite pour $p\ \infty$ de la suite croissante de fonctions surharmoniques $\widehat{\lim_{n\infty} v_n^p}$ majorées par v_1 .

COROLLAIRE. - Sous les mêmes hypothèses (I, II, III, IV', base dénombrable), soit v_n hyperharmonique ≥ 0 dans Ω . Alors $(\inf v_n)$ et $\liminf_{n\infty} v_n$ sont des $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonctions quasi-surharmoniques ou partout $+\infty$.

Car $w_n^p = \inf(v_n , v_{n+1} , \dots v_{n+p})$ est hyperharmonique, décroissante en p et la limite pour $p\ \infty$ est w_n, quasi-surharmonique ou $+\infty$. w_n est croissante et la limite pour $n\ \infty$ est $+\infty$ ou quasi-surharmonique.

REMARQUE. - Si v_n est seulement quasi-hyperharmonique, de même $\liminf v_n$.

Enveloppe inférieure générale. THÉORÈME 21. - Sous les mêmes hypothèses (I, II, III, IV' base dénombrable) considérons une famille quelconque de fonctions surharmoniques $v_i \geq 0$. Alors $\inf v_i$ (qui est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-fonction) diffère de sa régularisée sur un ensemble polaire, donc est quasi-surharmonique.

On sait en effet par un lemme de Choquet qu'il existe une suite extraite v_{α_n} telle que la régularisée de $\inf v_{\alpha_n}$ soit égale à celle de $\inf v_i$. Donc

$$\widehat{\inf v_{\alpha_n}} = \widehat{\inf v_i} \leq \inf v_i \leq \inf v_{\alpha_n}$$

et le corollaire permet de conclure.

Application à la réduite. - Remarquons d'abord que, avec les seules hypothèses (I, II, III base dénombrable de voisinages d'un point x_o), il existe pour tout ensemble polaire A ne contenant pas x_o, une fonction associée v qui, en x_o, est finie.

Car si $\{\alpha_n\}$ forme une base de voisinages de x_o, $A \cap \complement \alpha_n$ admet une fonction associée v_n majorée en x_o par $1/n^2$ et $\sum v_n$ répond à la question.

Propriétés de la réduite. - On suppose (I, II, III, IV', base dénombrable) et on considère en général un ensemble E quelconque, et une fonction φ sur E, majorée par une fonction surharmonique ≥ 0 dans Ω

1° $\hat{R}_\varphi^E = R_\varphi^E$ quasi-partout

2° En tout point de $\complement E$, $R_\varphi^E = \hat{R}_\varphi^E$

3° $\hat{R}_\varphi^E$ est la plus petite fonction surharmonique ≥ 0 dans Ω, majorant φ sur E quasi-partout.

En effet si v surharmonique ≥ 0 majore φ sur E, sauf sur un ensemble polaire e, introduisons w associée à e. Alors $v + \varepsilon w$ majore φ sur E donc R_φ^E partout.

Si pour v on prend $\hat{R}_\varphi^E$ et qu'on choisisse w finie en un point x_o de $\complement E$, on conclut $\hat{R}_\varphi^E(x_o) \geq R_\varphi^E(x_o)$ donc (2°).

D'autre part on voit aussi que v majore R_φ^E aux points où w est finie, donc quasi-partout d'où $v \geq R_\varphi^E$ partout.