Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel

PAUL-ANDRÉ MEYER

Temps de Markov

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 3 (1958-1959), exp. n° 9, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1958-1959__3__A8_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de
THÉORIE DU POTENTIEL
Année 1958/59
-:-:-:-

TEMPS DE MARKOV

par Paul-André MEYER

(d'après HUNT [2] et BLUMENTHAL [1])

1. Conditions topologiques.

Soit E un espace localement compact métrisable et dénombrable à l'infini (ou encore : à base dénombrable). On utilisera une distance d sur E. On désigne par C l'espace des fonctions continues, continues à l'infini, muni de la topologie de la convergence uniforme sur E ; par C_0 le sous-espace des fonctions nulles à l'infini. $B_x(r)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r.

THÉORÈME. - Il existe une correspondance biunivoque entre les semi-groupes P_t fortement continus de transformations linéaires positives de C dans C, appliquant C_0 dans C_0, tels que $P_t(1) = 1$, et les fonctions de transition stationnaires de Markov $P_t(x, A)$, définies sur le corps borélien topologique de E, et satisfaisant aux conditions de Blumenthal :

D. Pour tout t, toute fonction f continue et bornée sur E, la fonction $x \to P_t(x, f)$ est continue ;

E. Pour toute valeur r du rayon, la fonction $x \to P_t[x, B_x(r)]$ tend vers 1 ; uniformément sur tout compact de E, lorsque $t \to 0$.

F. Pour tout compact K, les fonctions de t, $P_t(x, K)$, tendent vers 0 lorsque $x \to \infty$, uniformément sur tout intervalle fini. L'équation de Kolmogorov montre d'ailleurs que la convergence uniforme sur un intervalle $(0 ; h)$ si petit soit-il, suffit.

a. Le semi-groupe P_t détermine une fonction de transition de Markov de la manière suivante : $P_t(x, A)$ est le prolongement aux ensembles boréliens, par le procédé de Bourbaki par exemple, de la mesure de Radon positive $f \to$ valeur de $P_t(f)$ au point x ; cette fonction $P_t(x, A)$ est mesurable en x pour A fixe, car E est à base dénombrable : soit, en effet A un compact : il existe une suite décroissante de fonctions continues f_n tendant vers l'indicateur de A . On passe de là au cas où A est quelconque. Inversement, étant donnée $P_t(x , A)$, on peut définir $P_t(x , f)$ pour toute f mesurable bornée, par l'intégration : on pose alors $P_t(f) = [x \to P_t(x , f)]$ pour f continue. Il est immédiat que, si l'on part de P_t , que l'on en déduit $P_t(x , A)$, et que l'on refabrique un semi-groupe, on retombe sur le semi-groupe initial ; il l'est moins que, si l'on part de $P_t(x , A)$ si la construction de P_t est possible, et si l'on refabrique la fonction de transition, on retrouve celle dont on est parti : cela tient à ce que l'espace est à base dénombrable, et se démontre pour A compact comme ci-dessus.

b. Démontrons que les fonctions déduites d'un semi-groupe satisfont à D, E, F.

D. Elle est triviale pour les fonctions continues à l'infini ; soit f bornée : elle peut s'écrire $g + h$, où g et h sont continues et ont la même borne que f ; g est à support compact, et le support de h est aussi loin qu'on veut. Précisément, soit u une fonction comprise entre 0 et 1 , égale à 1 au voisinage de l'infini, telle que l'on ait $P_t(x , u) < \varepsilon$ pour un certain x (il suffit que son support ne rencontre pas un certain compact K tel que $P_t(x , K) > 1 - \varepsilon$. La fonction $1 - u$ tendant vers 0 à l'infini, $P_t(x , u)$ est continue. Prenons le support de h dans l'ouvert $u > 1/2$. Si y est assez voisin de x , $[P_t(x , g) - P_t(y , g)|$ sera petit, aussi $|P_t(x , u)|$, $|P_t(y ,u)|$ donc $|P_t(x , h)|$, $|P_t(y , h)|$. Et on en déduit la continuité de $P_t(x , f)$.

E. Montrons ceci qui est du même type : soit I un ensemble borélien, K un compact intérieur à I , L un compact extérieur à I : $P_t(x , I)$ tend uniformément vers 1 sur K , vers 0 sur L , lorsque t tend vers 0 . Or, soit g continue, $0 \leqslant g \leqslant 1$, égale à 1 sur K , à 0 sur le complémentaire d'un voisinage compact de K contenu dans I ; $P_t(g) \to g$ uniformément sur K , donc $P_t(x , I) \to 1$ sur K . De même, on considérerait une fonction égale à 0 sur L , à 1 sur I et un voisinage du point à l'infini.

Démontrons (E) : soit K compact, recouvrons-le avec des boules en nombre fini, de centre x_i , de rayon $r/4$: $x \in K$ appartient à l'une de ces boules B_i : la boule $B_x(r)$ contient la boule $B_{x_i}(r/2)$: on est ramené à démontrer que, dès que r est assez petit, $P_t(x , B_{x_i}(r/2)) > 1 - \varepsilon$ pour tout x dans $B_{x_i}(r/4)$: c'est évident d'après ce qui précède.

F. Soit K un compact, f continue, à support compact, positive, > 1 sur K . Soit

$$g_u(x) = u \int_0^\infty e^{-ut} P_t(x , f)\, dt$$

(intégrale forte dans l'espace de Banach C_0). g_u est dans C_0 , et elle tend uniformément vers f pour $u \to \infty$.

Un calcul simple montre que :

$$e^{-ut} P_t(y , g_u) = \int_t^\infty ue^{-us} P_s(y , f) ds \leqslant g_u(y) \quad ;$$

choisissons u assez grand pour que $g_u > 1$ sur K : $P_t(y , K) \leqslant e^{ut} g_u(y)$, et, comme cette fonction est dans C_0 , on a bien convergence vers zéro uniformément sur tout intervalle fini, lorsque $y \to \infty$.

RÉCIPROQUE.

1° Si $f \in C_0$, on a $P_t(f) \in C_0$: il suffit de décomposer f en somme d'une fonction à support compact g et d'une fonction $< \varepsilon$ sur tout l'espace ; on utilise alors (F) pour montrer que $P_t(g) \to 0$ à l'infini.

2° Continuité forte du semi-groupe : soit f nulle à l'infini, somme de g à support compact, et de $h < \varepsilon$ en module. Il suffit de démontrer que $|P_t(g) - g|$ est $< \varepsilon$ si $t \to 0$: on sait d'après (F) qu'elle est petite pour x assez loin. Il suffit donc de le démontrer sur un compact K convenable ; soit r un nombre assez petit pour que $P_t(x , B_r(x)) > 1 - \varepsilon$ pour $x \in K$, et aussi pour que l'oscillation de g sur une boule de rayon r centrée sur K ne dépasse pas ε ; alors pour $x \in K$

$$P_t\, g(x) - g(x) = \int_{B_x(r)} g(y)\, P_t(x , dy) - g(x) + \int_{E-B_x(r)} g(y)\, P_t(x , dy) \quad .$$

REMARQUE. - Si le semi-groupe P_t laisse C_0 invariant, et est fortement continu sur C_0 , mais est tel que $P_t 1 \leqslant 1$ seulement, on peut se ramener au cas précédent de la manière suivante : adjoignons un point à l'infini θ à E , prolongeons les fonctions de C_0 par 0 au point θ , et posons :

$$\tilde{P}_t(\theta , \{\theta\}) = 1 \qquad \tilde{P}_t(\theta , E) = 0 \qquad \tilde{P}_t(x , \{\theta\}) = 1 - P_t(x , E) \qquad \text{pour } x \in E \, .$$

Les $\tilde{P}_t$ forment un nouveau semi-groupe, tel que $\tilde{P}_t\, 1 = 1$, qui laisse invariant l'espace des fonctions continues du nouvel espace compact $\tilde{E} = E \cup \{\theta\}$, et est fortement continu sur cet espace. Si f est nulle en θ , $\tilde{P}_t\, f = P_t\, f$.

L'utilisation du théorème 1, plus loin, permettrait de démontrer tous les théorèmes de régularité des trajectoires en se plaçant dans le cas plus simple où E est compact. Nous ne le ferons pas, car il est intéressant de voir que ces théorèmes sont indépendants de l'hypothèse (D). Mais cela simplifiera peut-être le travail du lecteur. Dans ce cas, il est avantageux de choisir jusqu'au théorème 4 comme espace de base Ω , l'espace produit E^{R_+} , muni de la mesure de Radon habituelle, ce qui évite les considérations de séparabilité des processus.

2. Propriétés de régularité des trajectoires.

Tous les processus de Markov envisagés désormais sont supposés construits à partir des probabilités de transition P_t et d'une mesure initiale P^0 , et séparables relativement à la famille des ensembles compacts de E . L'espace de base sera désigné par Ω , les variables aléatoires par X_t . Dans les énoncés des théorèmes, à moins de mention spéciale, presque partout signifie : presque partout pour toute mesure initiale.

THÉORÈME 1. - La condition (F) implique que presque toutes les trajectoires sont bornées sur tout intervalle fini.

Soit un intervalle $(0, h)$ et soient E_n des compacts croissants dont la réunion est E . Le processus étant séparable, l'ensemble des trajectoires bornées sur $(0, h)$ est mesurable. Supposons qu'il soit de mesure $1 - \delta$. Nous allons montrer qu'alors, pour tout compact C , $P^h(C) = \int P^0(dx)\, P_h(x, C)$ est $\leqslant 1 - \delta + \varepsilon$, où ε est arbitraire, d'où il résulte que $\delta = 0$.

Soit E_k un compact de la suite ; écrivons $P^h(C) = P_1 + P_2$

P_1 : Probabilité d'aller dans C à l'instant h , en restant dans E_k : $P_1 \leqslant 1 - \delta \;\; \forall E_k$;

P_2 : Prob. ... en ne restant pas dans E_k : on va montrer que, pour E_k assez loin, P_2 est aussi petit que l'on veut.

En effet, soit E_k tel que, pour $y \in E_k$, on ait $P_t(y, C) < \varepsilon \;\; \forall t$ entre 0 et h . Pour toute suite finie $S = (t_0, \ldots, t_n)$, $t_0 = 0$, $t_n = h$, soit $H_i(x, A)$ la probabilité sachant que $X_0 = x$, pour que t_i soit le premier point de la suite tel que $X_t(\omega)$ ne soit pas dans E_k , et pour que $X_t(\omega) \in A$.
La quantité

$$P_S^2(x, C) = \sum_i \int_E \underbrace{P_{h-t_i}(y, C)}_{< \varepsilon} H_i(x, dy)$$

est la probabilité, sachant que $X_0 = x$, pour que l'un des X_{t_i} sorte de E_k . Or elle est $< \varepsilon$.

Et maintenant, par définition de la séparabilité :

$$P_2(C) = \inf_S \int_E P^0(dx)\, P_S^2(x, C) \leqslant \varepsilon ,$$

C. Q. F. D.

LEMME. - $\forall \varepsilon \forall \eta \forall a$, il existe un nombre h tel que $\forall t \in (0\ ,\ a)$

$$P\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant h} d[X_{t+u}(\omega)\ ,\ X_t(\omega)] > \eta\} < \varepsilon \qquad ;$$

ce lemme a le sens suivant : remarquons qu'on en déduit que

$$P\{\sup_{t \leqslant {}^{u}_{v} \leqslant t+h} d[X_u(\omega)\ X_v(\omega)] > 2\eta\} < \varepsilon \qquad ;$$

on peut alors énoncer : dès que h est assez petit, pour tout intervalle fixe de longueur $h \subset (0\ ,\ a)$, la probabilité pour que l'oscillation d'une trajectoire sur cet intervalle dépasse η , est $< \varepsilon$. C'est donc une propriété de continuité uniforme en probabilité.

D'après le théorème précédent, choisissons un compact C tel que la mesure de l'ensemble des trajectoires qui restent dans C sur $(0\ ,\ a)$ (ou plutôt sur un intervalle un peu grand, pour qu'on ne soit pas gêné au voisinage de a) soit $> 1 - \varepsilon$. Il est essentiel pour la suite de remarquer que la mesure initiale n'intervient dans la démonstration que par le choix de ce compact. Pour tout t entre 0 et a , on a $P^t(C) > 1 - \varepsilon$. Recouvrons C avec des boules en nombre fini $B_{x_i}(\eta/4)$.

Choisissons h tel que, pour tout u entre 0 et h et tout $x \in C$ on ait :

$$P_u(x\ ,\ B_x(\eta/4)) > 1 - \varepsilon \qquad \text{(condition E)} \qquad .$$

Il est clair alors que si x appartient à la boule B_i

$$P_u(x\ ,\ B_{x_i}(\eta/2)) > 1 - \varepsilon \qquad ;$$

évaluons alors la probabilité, sachant que $x_t = x \in C$, pour que la trajectoire s'écarte de x de plus entre t et $t + h$: x appartenant à une B_i , les chemins sont alors de deux sortes : ceux dont le point terminal n'est pas dans $B_{x_i}(\eta/2)$, et ceux dont le point terminal est dans cette boule, mais qui sortent de $B_{x_i}(3\eta/4)$. La probabilité de l'ensemble des premiers se majore immédiatement, et celle de l'ensemble des seconds se majore en utilisant des points t_j comme dans le théorème précédent. En intégrant par rapport à x , en ajoutant les chemins tels que $X_t \notin C$ on trouve 3ε comme majoration de la probabilité.

THÉORÈME 2. - Presque toutes les trajectoires possèdent en tout point, une limite à droite et une limite à gauche.

Supposons qu'il y ait un ensemble de mesure (extérieure) positive de trajectoires ayant au moins une discontinuité de seconde espèce : il existe alors un tel ensemble, constitué de trajectoires restant dans C compact sur un intervalle $(0 , a)$, puis de trajectoires ayant un tel point de discontinuité avec une oscillation à gauche ou à droite $> 2\varepsilon$, et enfin, un tel ensemble de trajectoires, restant dans C sur $(0 , a)$, ayant un point où l'oscillation à gauche ou à droite est $> 2\varepsilon$ sur un certain intervalle I de longueur h , tel que :

$$P[\sup_{u,v \in I} (X_u , X_v) > \varepsilon] < 1/2 \qquad \text{(lemme)} \quad .$$

Or, si $t(\omega)$ est une discontinuité de seconde espèce, il existe une infinité de couples de points $s_n(\omega)$, $s'_n(\omega)$, constituant des intervalles non empiétants, et tels que s_n , s'_n croisse ou décroisse vers t , et que $d(X_{s_n} , X_{s'_n}) > \varepsilon$. On peut considérer comme intuitif le fait que la probabilité de l'existence de n tels intervalles est $< 1/2^n$, et, par conséquent, d'après le théorème de Borel-Cantelli, qu'il ne peut y en avoir une infinité que sur un ensemble de mesure nulle,

C. Q. F. D.

Pour faire les choses proprement, on peut procéder ainsi : utiliser des subdivisions dyadiques de I ; appeler $A_{k,n}$ l'ensemble des ω tels qu'il existe au moins k intervalles non empiétants, réunions d'intervalles de la subdivision S_n , sur lesquels l'oscillation de la fonction est $> \varepsilon$. Les $A_{k,n}$ croissent avec n , soit $A_k = \cup A_{k,n}$. $P(A_{k,n}) \leqslant 1/2^k \, \forall n$,et l'ensemble qui nous intéresse est contenu dans tous les A_k .

THÉORÈME 3. - Il n'y a pas de discontinuités stationnaires : autrement dit, pour t fixé, presque toutes les trajectoires sont continues à gauche et à droite en t .

C'est presque trivial : supposons qu'il existe un ensemble de mesure positive ε de trajectoires ayant une oscillation $> \eta$ au point t_0 (l'ensemble que nous considérons est réunion de ceux-là pour $\eta = 1/n$). Soit h comme dans le lemme. L'application du lemme à l'intervalle $(t_0 - h/2 , t_0 + h/2)$ donne une contradiction.

THÉORÈME 4. - Tout processus admettant des probabilités de transition satisfaisant à E et F peut être réalisé sur un espace de fonctions bornées, continues à droite (à gauche), admettant en tout point une limite à gauche (à droite). (Il suffit de remplacer X_t par $\lim_{S \downarrow t} X_t$ pour obtenir la continuité à droite, ce qui ne change X_t que sur un ensemble de mesure nulle).

REMARQUE. - La condition D n'a pas été utilisée.

3. Temps d'arrêt. Temps de Markov.

L'espace E est ici supposé compact, et la condition D vérifiée.

Modification de la définition des processus de Markov. - Considérons, sur Ω, une famille X_t de variables aléatoires à valeurs dans E, et une famille de corps boréliens de parties mesurables F_t. On suppose que $s < t$ implique $F_s \subset F_t$. Nous dirons que le processus X_t est de Markov relativement aux F_t et admet P_t pour probabilité de transition, si :

1. Chaque X_t est F_t-mesurable ;
2. Pour tout couple s, t tel que $s \leqslant t$ et toute partie borélienne A de E on a

$$P(X_t \in A/F_s) = P(X_t \in A/X_s) = P_{t-s}(X_s , A) \quad .$$

D'après la première condition, un tel processus est un processus de Markov au sens ordinaire. Il est facile aussi de démontrer que, pour toute variable aléatoire Y, mesurable sur le corps borélien engendré par les X_t, $t \geqslant s$, et ayant une espérance mathématique, on a $E(Y/F_s) = E(Y/X_s)$. Soit alors T une variable aléatoire positive, pouvant prendre la valeur $+\infty$. Nous dirons que T est un temps d'arrêt, relativement au processus (X_t , F_t) si, pour tout a, l'ensemble $[T < a] \in F_a$. Si la même propriété est vraie pour l'ensemble $[T \leqslant a]$, nous dirons que T est un temps d'arrêt au sens strict. Désignons par Ω_T l'ensemble des ω où $T < \infty$, et supposons que Ω_T soit de mesure positive : munissons-le de la loi de probabilité définie par $P'(A) = P(A)/P(\Omega_T)$, si A est une partie mesurable contenue dans Ω_T. Nous dirons que T est un temps de Markov si tout d'abord les fonctions $Y_t(\omega)$ définies sur Ω_T par :

$$Y_t(\omega) = X_{T(\omega)+t}(\omega)$$

sont mesurables, et si, F_{T+t} étant le corps borélien des événements A de Ω_T tels que :

$$\forall a \,, \quad A \cap [T < a] \in F_{T+a}$$

le processus (Y_t , F_{T+t}) est de Markov, et admet P_t comme probabilité de transition.

THÉORÈME 1. - Soit T un temps d'arrêt au sens strict relativement au processus (X_t , F_t) , ne prenant qu'une infinité dénombrable de valeurs a_n : T est un temps de Markov.

Soit V_i l'ensemble $\{T = a_i\}$ pour $a_i \neq \infty$; soit K_t le corps borélien de Ω_T dont les éléments sont les ensembles H tels que $H \cap \{T \leqslant a_i\}$ appartienne à F_{t+a_i} , quelque soit i $(K_t = F_{T+t})$. Il est clair que les K_t croissent avec t , que Y_t est K_t mesurable :

$$\{Y_t \in A\} \cap \{T \leqslant a_i\} = \bigcup_{a_j \leqslant a_i} \{X_{a_j+t} \in A\} \cap V_j \in F_{a_i+t} \quad ,$$

il reste donc à vérifier que, si $s \leqslant t$ et $H \in K_s$, on a pour tout A de l'espace des états :

$$P[\{Y_t \in A\} \cap H] = \int_H P_{t-s}(Y_s(\omega) , A)\, dP(\omega) \quad ,$$

égalité qui implique à la fois que $P(Y_t \in A/K_s) = P(Y_t \in A/Y_s)$, car la fonction $P_{t-s}(Y_s , A)$ est une fonction mesurable sur le corps $B(Y_s)$, et le fait que les probabilités de transition sont les P_t .

Or, cette égalité est trivialement vraie, si l'on y remplace H par $H \cap V_i$. Il suffit ensuite de sommer sur i .

THÉORÈME 2. - Soit un processus (X_t , F_t) vérifiant les conditions D , E , F , et dont les trajectoires sont continues à droite ; tout temps d'arrêt T est un temps de Markov. (On utilise en fait des hypothèses un peu plus faibles).

A toute subdivision de pas $1/2^n$ de la droite, attachons deux fonctions : si $k/2^n \leqslant x < (k+1)/2^n$, nous poserons $x_{n+} = (k + 1)/2^n$, $x_{n-} = k/2^n$. Il est clair que $x_{n+} \leqslant y \Longleftrightarrow x < y_{n-}$; que les x_{n+} et x_{n-} tendent vers x lorsque $n \to \infty$, les premiers en décroissant, les seconds en croissant.

Posons alors :

$$T^n = T_{n+} \text{ ; } \quad Y_t^n = K_{t+T^n} \text{ ; } \quad K_t^n = \{H : H \cap \{T^n \leqslant a\} \in F_{t+a}\} \forall a \quad .$$

Les corps boréliens K^n sont donc construits comme dans le théorème 1. En revanche, posons $K_t = \{H : H \cap \{T < a\} \in F_{t+a}\} \forall a \quad (K_t = F_{T+t})$.

Faisons quelques remarques : les T_n sont des temps d'arrêt stricts, car $\{T^n \leqslant a\} = [T < a_{n-}] \in F_a$; le processus Y_t^n est donc markovien avec la même fonction de transition que X_t . Les K_t^n contiennent tous K_t , et décroissent lorsque n croît ; en effet, T^n ne prenant que des valeurs dyadiques, $T^n \leqslant a \Longleftrightarrow T^n \leqslant a_{n-}$: K_t^n est donc l'ensemble des H tels que $H \cap \{T^n \leqslant a_{n-}\} \in F_{a_{n-}+t}$; or, ceci équivaut à $H \cap \{T \subset a_{n-}\} \in F_{t+a_{n-}}$. En fait, K_t est l'intersection des K_t^n . Car, si H appartient à cette intersection, $H \cap \{T < a\} \in F_{t+a}$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème : les Y_t^n tendant presque sûrement vers Y_t (en vertu de la continuité à droite) Y_t est mesurable par rapport à tous les K_t^n , donc par rapport à K_t .

Examinons les probabilités de transition : si $H \in K_s$, a-t-on

$$P[\{Y_t \in A\} \cap H] = \int_H F_{t-s}(Y_s , A)\, dP(\omega) \qquad ?$$

Il suffit de vérifier que, pour toute fonction g sur E continue à support compact

$$\int_H g \circ Y_t(\omega)\, dP(\omega) = \int_H P_{t-s}(Y_s(\omega) , g)\, dP(\omega) \qquad .$$

Or ceci a lieu si Y_t est remplacée par Y_t^n , et l'on peut passer à la limite dans le premier membre en vertu de la continuité de g , dans le second, grâce à la condition D .

COROLLAIRE 1. - Soit (X_t , F_t) un processus de Markov dont les trajectoires sont continues à droite, satisfaisant aux conditions D , E , F : soit F_{t+} l'intersection des corps boréliens F_s pour $s > t$: le processus X_t est markovien par rapport aux corps boréliens F_{t+} .

C'est un sous-produit de la démonstration en prenant $T = 0$. En particulier :

COROLLAIRE 2. - Soit F_t le corps borélien engendré par les X_s , $s \leqslant t$: si la mesure initiale est ponctuelle, un événement de F_{0+} a pour probabilité 0 ou 1 .

En effet, d'après le corollaire 1, si B est un tel événement :

$$P(B|F_{0+}) = P(B|X_0) \qquad \text{presque sûrement.}$$

Le premier membre est l'indicateur de B . Le second est une constante, puisque X_0 est une variable aléatoire dégénérée. Il en résulte que $P(B) = 0$ ou 1 .

APPLICATION. - Soit A un ensemble K-analytique dans E : il résulte d'un théorème de Hunt que le "temps d'entrée dans A " (c'est-à-dire la fonction qui associe à une trajectoire ω l'inf des $t > 0$ pour lesquels $X_t(\omega) \in A$) est un temps d'arrêt : l'événement $T = 0$ a pour probabilité 0 ou 1 , si la mesure initiale est ε_x : on dit dans le premier cas que x est irrégulier pour A , dans le second qu'il est régulier pour A .

THÉORÈME 3. - Soit X_t un processus vérifiant D , E , F ; dont toutes les trajectoires sont continues à droite et possèdent une limite à gauche pour tout t ; soit T_n une suite croissante de temps d'arrêt, $T = \sup T_n$: en presque tout point où T est fini, on a $X(T) = \lim X(T_n)$.

(Peut-être ce résultat semblera-t-il plus naturel si l'on remarque que, pour des temps constants, il signifie l'absence de discontinuités stationnaires du côté gauche).

Désignons par X_{T-} la limite à gauche des X_{T_n} , définie sur $[T<\infty]$. Comme il existe une famille dénombrable de fonctions de C_0 qui sépare les points de E , il suffit de démontrer que, si $g \in C_0$:

$$g \circ X_{T-} = g \circ X_T \quad \text{presque sûrement} \quad .$$

Partons de la relation, où S est un temps d'arrêt, t une constante, et $U \in F_S$

$$\int_{\{S<t\}\cap U} g \circ X_t(\omega)\; dP(\omega) = \int_{\{S<t\}\cap U} P_{t-S(\omega)}(X_{S(\omega)} , g)\; dP(\omega)$$

qui se démontre ainsi : on approche la constante t , du côté droit, par des variables aléatoires t_n , mesurables par rapport à F_S , et de la forme $S+ e_n$, où e_n ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs. La relation est triviale dans ce cas. On peut passer à la limite, en utilisant la continuité forte du semi-groupe sur C_0 et la continuité à droite des trajectoires. On obtient l'égalité ci-dessus avec la seule différence que l'ensemble d'intégration est $[S \leqslant t]$, et on passe de là immédiatement à l'égalité elle-même. Ecrivons-la pour $S = T_n$, et passons de nouveau à la limite : il vient $(U \in F_T)$

$$\int_{\{T<t\}\cap U} g \circ X_t(\omega)\; dP(\omega) = \int_{\{T<t\}\cap U} P_{t-T(\omega)}(X_{T-} , g)\; dP(\omega)$$
$$= \int_{\{T<t\}\cap U} P_{t-T(\omega)}(X_T , g)\; dP(\omega) \quad .$$

On en déduit que l'égalité entre les deux dernières intégrales est encore vraie, si l'on remplace t par une variable aléatoire mesurable sur F_T et ne prenant qu'une infinité dénombrable de valeurs, puis, par passage à la limite, qu'elle est vraie si l'on remplace t par T . Le théorème en résulte immédiatement.

Une application fondamentale de ce théorème est la suivante : soit K un compact, intersection d'une suite d'ouverts G_n tels que $\overline{G_{n+1}} \subset G_n$. Soit $T(\omega)$

(resp $T_n(\omega)$) l'inf des t tels que $X_t(\omega) \in K$ (resp $\in G_n$) : les T_n sont trivialement mesurables, et il résulte du théorème précédent que T est égal presque sûrement à $\sup T_n$, et est donc mesurable, et un temps d'arrêt.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLUMENTHAL (R. M.). - An extended Markov property, Trans. Amer. math. Soc., t. 85, 1957, p. 52-72.

[2] HUNT (G. A.). - Markov processes and potentials, I , II , III , Illinois J. of Math., t. 1, 1957, p. 44-93 et p. 316-369 ; t. 2, p. 151-213.