Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

HEINZ BAUER

Frontière de Šilov et problème de Dirichlet

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 3 (1958-1959), exp. n° 7, p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1958-1959__3__A6_0>

FRONTIÈRE DE ŠILOV ET PROBLÈME DE DIRICHLET

par Heinz BAUER (*)

Introduction. - Le problème de Dirichlet classique peut être énoncé de la manière suivante : étant donnés un ouvert relativement compact Ω dans l'espace euclidien R^n, son adhérence $\bar{\Omega}$, et l'espace vectoriel $\mathcal{H}_\Omega$ des fonctions continues dans $\bar{\Omega}$ dont la restriction à Ω est harmonique, quand peut-on affirmer que toute, ou une fonction continue sur la frontière euclidienne F de Ω peut être prolongée en une fonction de $\mathcal{H}_\Omega$?

Nous nous proposons d'étudier ici un problème de Dirichlet abstrait qui se déduit du problème classique en remplaçant respectivement $\bar{\Omega}$ par un espace compact X quelconque, $\mathcal{H}_\Omega$ par un espace vectoriel $\mathcal{H}$ assez général de fonctions continues dans X, et la frontière F par la frontière de Silov $\partial_{\mathcal{H}} X$ de X par rapport à $\mathcal{H}$. Notre problème de Dirichlet abstrait sera donc le problème de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que toute, ou une fonction continue dans $\partial_{\mathcal{H}} X$ puisse être prolongée en une fonction de $\mathcal{H}$.

Nous donnerons deux applications de cette théorie. L'une concerne le problème de Dirichlet classique ; elle nous conduira en outre à l'interprétation des points réguliers (au sens de la théorie de PERRON-WIENER) comme des points extrémaux. L'autre application concerne l'étude d'une certaine classe de simplexes dans les espaces localement convexes.

1. Points extrémaux et frontière de Silov.

Pour un espace compact quelconque E, on désignera : par $\mathcal{C}(E)$ l'espace vectoriel (sur R) des fonctions numériques, finies, continues dans E, et par $\mathcal{M}(E)$ le cône convexe de toutes les mesures (de Radon) ≥ 0 sur E. On munira $\mathcal{C}(E)$ de la topologie de la convergence uniforme, et $\mathcal{M}(E)$ de la topologie vague. ε_t sera la mesure de la masse unité placée à un point $t \in E$.

(*) J'exprime ici ma profonde gratitude à MM. M. BRELOT et G. CHOQUET pour l'intérêt qu'ils ont pris à mes recherches.

Dans la première partie de ce travail, nous nous donnons une fois pour toutes : un espace compact X et un ensemble $\mathcal{H}$ de fonctions définies dans X avec les propriétés suivantes :

(H_1) $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X)$.

(H_2) La fonction constante 1 appartient à $\mathcal{H}$.

(H_3) $\mathcal{H}$ sépare les points de X, à savoir : pour tout couple de points différents x_1, $x_2 \in X$, il existe une fonction $h \in \mathcal{H}$ telle que l'on ait $h(x_1) \neq h(x_2)$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ de tous les sous-compacts S de X tels que toute $h \in \mathcal{H}$ atteigne son maximum global (et d'après (H_1), aussi son minimum global) en au moins un point de S. Cela signifie :

$$\sup_{x \in S} h(x) = \sup_{x \in X} h(x) \qquad \text{pour toute } h \in \mathcal{H} .$$

D'après G. SILOV [11] et D. P. MILMAN [15] (cf. aussi [1] et [14], p. 80), il existe un ensemble $X^* \in \mathcal{S}$ tel que : $X^* \subset S$ quel que soit $S \in \mathcal{S}$. On appelle X^* la frontière de Silov de X par rapport à $\mathcal{H}$: $X^* = \partial_{\mathcal{H}} X$.

Les applications montreront que $\partial_{\mathcal{H}} X$ contient en général des points peu naturels. Nous donnerons donc d'abord une nouvelle démonstration de l'existence de $\partial_{\mathcal{H}} X$ dont le point de départ sera l'introduction des points "naturels" de $\partial_{\mathcal{H}} X$.

DÉFINITION 1. - Nous dirons qu'un point $x_0 \in X$ est $\mathcal{H}$-extrémal si ε_{x_0} est la seule mesure $\mu \in \mathcal{M}(X)$ telle que l'on ait :

$$h(x_0) = \int h \, d\mu \qquad \text{pour toute } h \in \mathcal{H} .$$

Nous désignerons par $X_e = X_e(\mathcal{H})$ l'ensemble des points $\mathcal{H}$-extrémaux de X.

EXEMPLES.

1° Nous dirons qu'un point $x_0 \in X$ est $\mathcal{H}$-exposé s'il existe une $h \in \mathcal{H}$ telle que l'on ait $h(x_0) < h(x)$ pour tout $x \neq x_0$, $x \in X$. Il est évident que tout point $\mathcal{H}$-exposé est $\mathcal{H}$-extrémal. (L'inverse n'est pas vrai en général ; cf. la remarque 4 au numéro 4).

2° Soient $X = [0, 1]$ et $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions linéaires $x \longrightarrow \alpha + \beta x$ dans X (α, $\beta \in R$). On a alors : $X_e = \{0, 1\}$.

3° Soient $X = [0, 1]$ et $\mathcal{H}$ l'espace des polynômes quadratiques $x \longrightarrow \alpha + \beta x + \gamma x^2$ dans X $(\alpha, \beta, \gamma \in R)$. Tout point de X est $\mathcal{H}$-exposé ; on a donc $X_e = X$.

L'existence et une propriété fondamentale des points $\mathcal{H}$-extrémaux résulteront du théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Toute fonction de $\mathcal{H}$ atteint son maximum (et minimum) global en au moins un point $\mathcal{H}$-extrémal.

Pour la démonstration, nous dirons qu'une partie K de X est $\mathcal{H}$-extrémale si K est compacte, non vide, et si K possède la propriété suivante : étant donnée une mesure $\mu \in \mathfrak{M}(X)$, telle que l'on ait $h(x_0) = \int h d\mu$ pour un $x_0 \in K$ et toute $h \in \mathcal{H}$, alors le support S_μ de μ est contenu dans K. L'espace total X est évidemment $\mathcal{H}$-extrémal ; pour qu'un point $x_0 \in X$ soit $\mathcal{H}$-extrémal, il faut et il suffit que l'ensemble $\{x_0\}$ le soit. On vérifie aisément que l'ensemble $\mathcal{E}$ des parties $\mathcal{H}$-extrémales de X est inductif pour la relation d'ordre $\supset$.

Pour une fonction quelconque $f \in \mathcal{H}$, soit K_f l'ensemble (compact, non vide) de tous les points où f atteint son maximum global. Nous avons à démontrer : $K_f \cap X_e \neq \emptyset$. D'abord, on a $K_f \in \mathcal{E}$. En effet, soient $x_0 \in K_f$ et $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ tels que $h(x_0) = \int h d\mu$ pour toute $h \in \mathcal{H}$, donc en particulier pour $h = f$; soit T un sous-compact non vide de X, disjoint de K_f. On a alors

$$\alpha = \sup_{x \in T} f(x) < f(x_0)$$

et par conséquent :

$$\int f d\mu = \int_T f d\mu + \int_{\complement T} f d\mu \leq \alpha \mu(T) + f(x_0) \mu(\complement T) \quad .$$

Comme $\int f d\mu = f(x_0)$, il en résulte $\mu(T) = 0$ pour tout tel T, donc $\mu(\complement K_f) = 0$, et finalement $S_\mu \subset K_f$. K_f appartient donc à $\mathcal{E}$. D'après le lemme de Zorn, il existe au moins un élément minimal de $\mathcal{E}$ contenu dans K_f. Il nous reste donc à démontrer que tout élément minimal de $\mathcal{E}$ ne contient qu'un seul point ou, autrement dit : un ensemble $K \in \mathcal{E}$ contenant deux points différents n'est pas minimal. D'après (H_2), il existe une fonction $h_0 \in \mathcal{H}$ dont la restriction à K n'est pas constante ;

$$K' = \left\{x' \in K : h_0(x') = \sup_{x \in K} h_0(x)\right\}$$

est alors une partie compacte, non vide de K et on a $K' \neq K$. Elle est même $\mathcal{H}$-extrémale. En effet, si $x \in K'$, $\mu \in \mathfrak{M}(X)$, et $h(x) = \int h d\mu$ pour toute $h \in \mathcal{H}$, on a d'abord $S_\mu \subset K$ puisque $K' \subset K$ et $K \in \mathcal{E}$. En répétant le raisonnement sur K_f employé plus haut, on montre qu'il en résulte : $S_\mu \subset K'$, c'est-à-dire $K' \in \mathcal{E}$. Cela prouve que K n'est pas minimal. Le théorème est donc démontré.

Voici la nouvelle démonstration de l'existence de $\partial_{\mathcal{H}} X$:

THÉORÈME 2. - L'adhérence de l'ensemble $X_e(\mathcal{H})$ des points $\mathcal{H}$-extrémaux de X est la frontière de Silov $\partial_{\mathcal{H}} X$.

Soit Y un élément quelconque de $\mathcal{S}$ (cf. p. 2). Désignons par h_Y la restriction à Y d'une $h \in \mathcal{H}$, et par $\mathcal{H}_Y$ l'ensemble de ces restrictions h_Y. $\mathcal{H}_Y$ est alors un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(Y)$; $h \longrightarrow h_Y$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_Y$. Considérons une mesure $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ telle que l'on ait $h(x_0) = \int h d\mu$ pour un $x_0 \in X$ et toute $h \in \mathcal{H}$. L'application $h_Y \longrightarrow \int h d\mu$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{H}_Y$ qui, d'après un théorème connu de M. G. KREIN (cf. [4], p. 75, proposition 6), peut être prolongée en une mesure $\mu_Y \in \mathfrak{M}(Y)$. L'image $\mu' = j(\mu_Y)$ de μ_Y par rapport à l'injection canonique $j : Y \longrightarrow X$ est une mesure de $\mathfrak{M}(X)$, concentrée sur Y telle que $h(x_0) = \int h d\mu'$ pour toute $h \in \mathcal{H}$. Pour un point $\mathcal{H}$-extrémal x_0, il en résulte : $x_0 \in Y$. On a donc $X_e \subset Y$ et $\overline{X_e} \subset Y$. D'après le théorème 1, on a aussi $\overline{X_e} \in \mathcal{S}$, ce qui prouve que $\overline{X_e}$ est la frontière de Silov $\partial_{\mathcal{H}} X$.

2. Fonctions $\mathcal{H}$-harmoniques.

Pour le problème de Dirichlet abstrait que nous voulons traiter, il sera nécessaire de remplacer l'espace $\mathcal{H}$ par un sous-espace vectoriel $\widehat{\mathcal{H}}$ de $\mathcal{C}(X)$ plus vaste, qui en outre sera fermé dans $\mathcal{C}(X)$. On arrivera à la définition de $\widehat{\mathcal{H}}$ d'une manière naturelle à l'aide de certaines mesures "harmoniques".

A partir de X et $\mathcal{H}$, nous nous donnons un élément quelconque $Y \in \mathcal{S}$, c'est-à-dire un sous-compact Y de X tel que : $\partial_{\mathcal{H}} X \subset Y$. On désignera par f_Y la restriction à Y d'une fonction f définie dans X.

Pour tout $s \in X$, on notera $\mathfrak{M}_Y^s = \mathfrak{M}_Y^s(\mathcal{H})$ l'ensemble des mesures $\mu \in \mathfrak{M}(Y)$ telles que l'on ait

$$(1) \qquad h(s) = \int h_Y \, d\mu \qquad \text{pour toute } h \in \mathcal{H} .$$

D'après (H_2), on a $\int d\mu = 1$ pour toute $\mu \in \mathfrak{M}_Y^s$. Pour tout $s \in Y$, on a

$\varepsilon_s \in \mathcal{M}_Y^s$; pour tout $s \in X_e$, on a même $\mathcal{M}_Y^s = \{\varepsilon_s\}$. On verra plus tard que les points $\mathcal{H}$-extrémaux sont en réalité caractérisés par cette dernière propriété (proposition 8).

Par un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème 2, on peut montrer que $\mathcal{M}_Y^s$ n'est jamais vide. Mais cela résultera aussi des considérations suivantes :

Pour toute $f \in \mathcal{C}(Y)$ et tout $s \in X$, nous poserons :

(2a) $$\overline{H}_Y^s(f) = \inf_{f \leq h_Y, h \in \mathcal{H}} h(s) \quad ;$$

(2b) $$\underline{H}_Y^s(f) = - \overline{H}_Y^s(- f) \quad .$$

La démonstration du lemme suivant est alors élémentaire et peut être supprimée :

LEMME 1. - <u>Pour tout</u> $s \in X$ <u>et tout couple de fonctions</u> f , $g \in \mathcal{C}(Y)$, <u>on a</u> :

(3) $$- \infty < \underline{H}_Y^s(f) \leq \overline{H}_Y^s(f) < + \infty \quad ;$$

(4) $$f \leq g \Longrightarrow \overline{H}_Y^s(f) \leq \overline{H}_Y^s(g) \quad ;$$

(5) $$\overline{H}_Y^s(f + g) \leq \overline{H}_Y^s(f) + \overline{H}_Y^s(g) \quad ;$$

(6) $$\overline{H}_Y^s(\lambda f) = \lambda \overline{H}_Y^s(f) \qquad (\lambda \geq 0) \quad ;$$

(7) $$\underline{H}_Y^s(h_Y) = \overline{H}_Y^s(h_Y) = h(s) \qquad \underline{\text{pour toute}} \quad h \in \mathcal{H} \quad .$$

Il en résulte alors :

PROPOSITION 1.

(a) <u>Quels que soient</u> $s \in X$, $\mu \in \mathcal{M}_Y^s$, <u>et</u> $f \in \mathcal{C}(Y)$, <u>on a</u>

(8) $$\underline{H}_Y^s(f) \leq \int f d\mu \leq \overline{H}_Y^s(f) \quad .$$

(b) <u>Soient</u> $s \in X$, $f_0 \in \mathcal{C}(Y)$, <u>et</u> $\gamma \in R$ <u>tels que</u> :

$$\underline{H}_Y^s(f_0) \leq \gamma \leq \overline{H}_Y^s(f_0) \quad .$$

<u>Il existe alors au moins une</u> $\mu \in \mathcal{M}_Y^s$ <u>telle que</u> : $\gamma = \int f_0 \, d\mu$.

La démonstration de (a) est évidente ; démontrons donc (b). Soit $\mathcal{F}_0 = \{\lambda f_0\}_{\lambda \in R}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(Y)$, engendré par f_0 .

$\lambda f_0 \longrightarrow \lambda \gamma$ est alors une forme linéaire μ_0 sur $\mathcal{F}_0$ telle que : $\mu_0(f) \leq \overline{H}_Y^s(f)$ pour toute $f \in \mathcal{F}_0$. La fonction $\overline{H}_Y^s$ possédant les propriétés (3), (5), (6), il existe, d'après une généralisation connue du théorème de Hahn-Banach (cf. [4], p. 105, exercice 16), une forme linéaire μ prolongeant μ_0 à $\mathcal{C}(Y)$ tout entier telle que : $\mu(f) \leq \overline{H}_Y^s(f)$ pour toute $f \in \mathcal{C}(Y)$. Ainsi : $\underline{H}_Y^s(f) \leq \mu(f) \leq \overline{H}_Y^s(f)$ pour toute $f \in \mathcal{C}(Y)$. En liaison avec le lemme 1, il en résulte que μ est une mesure de $\mathcal{M}_Y^s$ telle que : $\gamma = \int f_0 \, d\mu$.

PROPOSITION 2. - <u>Pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{C}(Y)$, <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) $f(s) = \int f_Y \, d\mu$ <u>pour tout</u> $s \in X$ <u>et toute</u> $\mu \in \mathcal{M}_Y^s$;

(b) $f(s) = \underline{H}_Y^s(f_Y) = \overline{H}_Y^s(f_Y)$ <u>pour tout</u> $s \in X$.

(c) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de fonctions $h_1', \dots, h_m'$; $h_1'', \dots, h_n''$ de $\mathcal{H}$ telles que :

$$\underline{h} \leq f \leq \overline{h} \qquad \text{et} \qquad \overline{h} - \underline{h} \leq \varepsilon \quad ,$$

<u>où</u> $\underline{h} = \sup(h_1', \dots, h_m')$ <u>et</u> $\overline{h} = \inf(h_1'', \dots, h_n'')$.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : c'est une conséquence immédiate de la proposition 1.

(b) $\Longrightarrow$ (c) : selon (2a) et (2b), il existe des fonctions h_1^s, $h_2^s \in \mathcal{H}$ telles que l'on ait $(h_1^s)_Y \leq f_Y \leq (h_2^s)_Y$ et $h_2^s(s) - h_1^s(s) < \varepsilon$, quels que soient $\varepsilon > 0$ et $s \in X$. En vertu de (4), (7), et de la condition (b), il résulte de la première propriété : $h_1^s \leq f \leq h_2^s$; de la deuxième propriété résulte l'existence d'un voisinage ouvert U^s de s tel que : $h_2^s(t) - h_1^s(t) < \varepsilon$ pour tout $t \in U^s$. L'espace X étant compact, il suffit d'un nombre fini de voisinages U^s, $s \in X$, pour recouvrir X : $X = U^{s_1} \cup \dots \cup U^{s_n}$. Les fonctions $h_i' = h_1^{s_i}$, $h_i'' = h_2^{s_i}$, $i = 1, \dots, n$, répondent alors à la question.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : pour un $\varepsilon > 0$ donné, choisissons $h_1', \dots, h_m'$; $h_1'', \dots, h_n''$ selon (c). Comme $h_i' \leq f \leq h_j''$ implique $h_i'(s) \leq \int f_Y \, d\mu \leq h_j''(s)$ $(i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n)$, on a $\underline{h}(s) \leq \int f_Y \, d\mu \leq \overline{h}(s)$ pour tout $s \in X$ et $\mu \in \mathcal{M}_Y^s$. En vertu des relations $\underline{h} \leq f \leq \overline{h}$ et $\overline{h} - \underline{h} \leq \varepsilon$, il en résulte (a).

Le sous-compact Y de X n'intervient pas dans la condition (c). Les conditions équivalentes (a) et (b) sont donc vérifiées pour tout sous-compact $Y \in \mathcal{S}$

quand elles sont vérifiées pour un tel sous-compact.

DÉFINITION 2. - Nous dirons qu'une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$ est $\mathcal{H}$-harmonique si elle satisfait aux conditions équivalentes (a), (b), (c) de la proposition 2 pour un sous-compact Y de X tel que $\partial_{\mathcal{H}} X \subset Y$ (et alors pour tout tel sous-compact).

Nous noterons $\hat{\mathcal{H}}$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{H}$-harmoniques. $\hat{\mathcal{H}}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}(X)$ tel que $\mathcal{H} \subset \hat{\mathcal{H}}$.

La proposition suivante caractérisera l'espace $\hat{\mathcal{H}}$ d'une manière nouvelle. Suivant G. CHOQUET et J. DENY ([10]), nous dirons qu'un cône convexe $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{C}(X)$ est semi-réticulé inférieurement (s. r. inf.) si $\mathcal{E}$ contient l'enveloppe inférieure $\inf(f , g)$ de tout couple f , g de fonctions de $\mathcal{E}$. Evidemment, il existe dans $\mathcal{C}(X)$ un plus petit cône convexe, fermé, s. r. inf. de sommet 0 contenant $\mathcal{H}$. On le notera $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$.

PROPOSITION 3. - On a $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{E}_{\mathcal{H}} \cap (-\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$.

Les fonctions $\bar{h}$ et $\underline{h}$ de la condition (c), proposition 2, appartiennent à $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ et $-\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ respectivement. Il résulte donc de la proposition 2 que l'on a $\hat{\mathcal{H}} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{H}} \cap (-\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$. L'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $v \in \mathcal{C}(X)$ vérifiant l'inégalité

$$\int v\, d\mu \leq v(s)$$

pour tout $s \in X$ et toute $\mu \in \mathcal{M}_X^s$ est un cône convexe, fermé, s. r. inf. de sommet 0 dans $\mathcal{C}(X)$ (cf. [10]) contenant $\mathcal{H}$. On a donc : $\mathcal{E}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{E}$. Mais comme $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{E} \cap (-\mathcal{E})$, il en résulte l'assertion.

COROLLAIRE. - L'identité des espaces $\mathcal{H}$ et $\hat{\mathcal{H}}$ équivaut à l'existence d'un cône convexe, fermé, s. r. inf. $\mathcal{E}$ de sommet 0 dans $\mathcal{C}(X)$ tel que : $\mathcal{H} = \mathcal{E} \cap (-\mathcal{E})$.

REMARQUES.

1° On peut montrer que le cône $\mathcal{E}$ construit dans la démonstration de la proposition 3 est même identique à $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$.

2° L'exemple 3 du numéro 1 montre que $\hat{\mathcal{H}}$ peut être différent de $\mathcal{H}$. En effet, dans cet exemple, on a $X_e(\mathcal{H}) = X$, ce qui entraîne $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(X)$ comme la proposition 5 le démontrera. Par contre, $\mathcal{H}$ est fermé et $\neq \mathcal{C}(X)$.

Dans un cas particulier, $\hat{\mathcal{H}}$ est l'adhérence de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{C}(X)$:

PROPOSITION 4. - <u>Si</u> $\mathcal{H}$ <u>est un treillis pour la relation d'ordre naturelle</u> $\leq$ <u>, l'espace</u> $\hat{\mathcal{H}}$ <u>est l'adhérence de</u> $\mathcal{H}$ <u>dans</u> $\mathcal{C}(X)$.

En vertu de la proposition 2, à toute $f \in \hat{\mathcal{H}}$ et tout $\varepsilon > 0$ correspondent des fonctions $h'_1, \dots, h'_m$; $h''_1, \dots, h''_n \in \mathcal{H}$ telles que

$$\underline{h} = \sup(h'_1, \dots, h'_m) \leq f \leq \bar{h} = \inf(h''_1, \dots, h''_n)$$

et

$$\bar{h} - \underline{h} \leq \varepsilon \quad .$$

Désignons par Sup et Inf les opérations dans le treillis $\mathcal{H}$. Pour

$$\underline{h}_0 = \mathrm{Sup}(h'_1, \dots, h'_m) \qquad \text{et} \qquad \bar{h}_0 = \mathrm{Inf}(h''_1, \dots, h''_n) \quad ,$$

on a alors $\underline{h} \leq \underline{h}_0 \leq \bar{h}_0 \leq \bar{h}$, d'où résulte $|f - \bar{h}_0| \leq \varepsilon$. C'est-à-dire : f est adhérent à $\mathcal{H}$; $\hat{\mathcal{H}}$ étant fermé, cela nous donne le résultat en question : $\bar{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}$.

On reviendra à cette propriété particulière de $\mathcal{H}$ au numéro 3.

Remarquons maintenant que $\hat{\mathcal{H}}$ possède les propriétés (H_1), (H_2), (H_3) de son sous-espace $\mathcal{H}$. Par conséquent, les ensembles suivants sont définis : $X_e(\hat{\mathcal{H}})$, $\partial_{\hat{\mathcal{H}}} X$, $\mathfrak{M}^s_Y(\hat{\mathcal{H}})$, et $\hat{\hat{\mathcal{H}}}$. D'abord, il résulte de la définition 2 (condition (a), $Y = X$).

(9) $$X_e(\hat{\mathcal{H}}) = X_e(\mathcal{H}) \quad .$$

En vertu du théorème 2, on a donc :

(10) $$\partial_{\hat{\mathcal{H}}} X = \partial_{\mathcal{H}} X \quad .$$

La définition des fonctions $\mathcal{H}$-harmoniques (condition (a)) donne :

(11) $$\mathfrak{M}^s_Y(\hat{\mathcal{H}}) = \mathfrak{M}^s_Y(\mathcal{H})$$

pour tout $s \in X$ et tout sous-compact Y de X contenant $\partial_{\mathcal{H}} X$. Finalement, la proposition 3 et son corollaire entraînent :

(12) $$\hat{\hat{\mathcal{H}}} = \hat{\mathcal{H}} \quad .$$

Nous constatons donc l'indépendance des notions du numéro 1 par rapport au passage de $\mathcal{H}$ à $\hat{\mathcal{H}}$.

Montrons encore :

PROPOSITION 5. - <u>Pour que tout point de</u> X <u>soit</u> $\mathcal{H}$<u>-extrémal, il faut et il suffit que l'on ait</u> $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(X)$.

Supposons : $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(X)$. On a alors l'égalité $X_e(\hat{\mathcal{H}}) = X$, d'où résulte $X_e(\mathcal{H}) = X$ en vertu de (9). Réciproquement : si $X_e(\mathcal{H}) = X$, on a $\mathcal{M}_Y^s(\mathcal{H}) = \{\varepsilon_s\}$ pour tout $s \in X$. La condition (a) de la définition 2 montre alors que $\mathcal{H} = \mathcal{C}(X)$.

3. Le problème de Dirichlet abstrait.

Nous poserons désormais :

$$X^* = \partial_{\mathcal{H}} X = \partial_{\hat{\mathcal{H}}} X \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}^s = \mathcal{M}^s_{X^*}(\mathcal{H}) = \mathcal{M}^s_{X^*}(\hat{\mathcal{H}}) \qquad (s \in X) \quad .$$

Les éléments de $\mathcal{M}^s$ seront appelés les <u>mesures $\mathcal{H}$-harmoniques associées au point</u> $s \in X$. Pour qu'une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$ soit $\mathcal{H}$-harmonique, il faut et il suffit que l'on ait :

$$h(s) = \int h_{X^*}\, d\mu$$

pour tout $s \in X$ et toute mesure $\mathcal{H}$-harmonique $\mu \in \mathcal{M}^s$.

Comme toute fonction de $\hat{\mathcal{H}}$ est uniquement déterminée par sa restriction à X^* , il se pose le problème de Dirichlet abstrait suivant : quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction donnée ou toute fonction de $\mathcal{C}(X^*)$ puisse être prolongée en une fonction $\mathcal{H}$-harmonique ?

DÉFINITION 3. - <u>Nous dirons qu'une fonction</u> $f \in \mathcal{C}(X^*)$ <u>est $\mathcal{H}$-résolutive si elle peut être prolongée en une fonction</u> $h \in \hat{\mathcal{H}}$.

PROPOSITION 6. - <u>Pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{C}(X^*)$, <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) f <u>est résolutive.</u>

(b) <u>Pour tout point</u> $s \in X$ <u>et tout couple</u> μ_1 , μ_2 <u>de mesures de</u> $\mathcal{M}^s$, <u>on a</u> :

$$\int f\, d\mu_1 = \int f\, d\mu_2 \qquad .$$

(c) <u>Pour tout</u> $s \in X$, <u>on a</u> $\underline{H}^s_{X^*}(f) = \overline{H}^s_{X^*}(f)$.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : on a $f = h_{X^*}$ pour une $h \in \hat{\mathcal{H}}$. Il en résulte ; $h(s) = \int f\, d\mu$ pour tout $s \in X$ et toute $\mu \in \mathcal{M}^s$, donc aussi (b).

(b) $\Longrightarrow$ (c) : c'est une conséquence immédiate de la proposition 1.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : définissons une fonction h dans X en posant :

$h(s) = \underline{H}^s_{X^*}(f) = \overline{H}^s_{X^*}(f)$ pour tout $s \in X$. En vertu de (2a) et (2b), h est alors semi-continue supérieurement et inférieurement, donc continue. D'après la proposition 1, on a alors $h(s) = \int f d\mu$ pour tout $s \in X$ et toute $\mu \in \mathfrak{M}^s$. Comme ε_s appartient à $\mathfrak{M}^s$ quel que soit $s \in X^*$, cela entraîne que h est un prolongement de f . On a donc : $h(s) = \int h_{X^*} d\mu$ pour $s \in X$ et $\mu \in \mathfrak{M}^s$, ce qui signifie que h est $\mathcal{H}$-harmonique. Par conséquent, f est résolutive.

Voici un premier critère pour que notre problème de Dirichlet possède une solution pour toute $f \in \mathcal{C}(X^*)$.

THÉORÈME 3. - Pour que toute fonction de $\mathcal{C}(X^*)$ soit résolutive, il faut et il suffit que, pour tout $s \in X$, il n'existe qu'une seule mesure $\mathcal{H}$-harmonique associée.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

PROPOSITION 7. - Si toute fonction de $\mathcal{C}(X^*)$ est résolutive, tout point de X^* est $\mathcal{H}$-extrémal.

En vertu du théorème 3, il n'y a qu'une seule mesure $\mu^s \in \mathfrak{M}^s$, quel que soit $s \in X$; en particulier, on a $\mu^s = \varepsilon_s$ pour tout $s \in X^*$. L'application $\varphi : X \to \mathfrak{M}(X^*)$ définie par $\varphi(s) = \mu^s$ est continue. En effet, soit $\mathfrak{f}$ un filtre dans X convergeant vers un point $s_0 \in X$; toute fonction $\mathcal{H}$-harmonique étant continue, il en résulte : $h(s_0) = \lim_{\mathfrak{f}} h(s)$, donc

$$\int h_{X^*} d\mu^{s_0} = \lim_{\mathfrak{f}} \int h_{X^*} d\mu^s$$

pour toute $h \in \widehat{\mathcal{H}}$. Or, toute $f \in \mathcal{C}(X^*)$ étant de la forme $f = h_{X^*}$ pour une $h \in \widehat{\mathcal{H}}$, cela signifie que : $\varphi(s_0) = \lim_{\mathfrak{f}} \varphi(s)$, donc la continuité de φ . Choisissons maintenant $x_0 \in X$ et $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ d'une manière telle que l'on ait $h(x_0) = \int h d\mu$ pour toute $h \in \mathcal{H}$. L'intégrale $\int \varphi d\mu$ existe et $\mu_\varphi = \int \varphi d\mu = \int \mu^s d\mu(s)$ est une mesure de $\mathfrak{M}(X^*)$. On a

$$\int h_{X^*} d\mu_\varphi = \int \left(\int h_{X^*} d\mu^s \right) d\mu(s) = \int h(s)\, d\mu(s) = h(x_0)$$

pour toute $h \in \mathcal{H}$. Il en résulte $\mu_\varphi \in \mathfrak{M}^{x_0}$, c'est-à-dire $\mu_\varphi = \varepsilon_{x_0}$. Or, il résulte facilement de l'égalité $\varepsilon_{x_0} = \int \mu^s d\mu(s)$ et du fait que toute μ^s possède une masse totale égale à 1 que $\mu = \varepsilon_{x_0}$. Le point x_0 est donc $\mathcal{H}$-extrémal.

Considérons maintenant l'application $h \to h_{X^*}$ de $\hat{\mathcal{H}}$ dans $\mathcal{C}(X^*)$. Il s'agit d'un monomorphisme pour la relation d'ordre naturelle ; $g \leq h$ entraîne $g_{X^*} \leq h_{X^*}$, et réciproquement. Si toute fonction de $\mathcal{C}(X^*)$ est résolutive, il s'agit même d'un isomorphisme de l'ensemble ordonné $\hat{\mathcal{H}}$ sur l'ensemble ordonné $\mathcal{C}(X^*)$. Ce dernier étant un treillis, $\hat{\mathcal{H}}$ l'est aussi (et par conséquent même un espace de Riesz). Si on note Sup et Inf les opérations dans ce treillis, on a

$$\mathrm{Inf}(h_1 , h_2) \leq \inf(h_1 , h_2) \leq \sup(h_1 , h_2) \leq \mathrm{Sup}(h_1 , h_2) \qquad (h_1 , h_2 \in \hat{\mathcal{H}}) ;$$

en général, $\mathrm{Sup}(h_1 , h_2)$ est différent de $\sup(h_1 , h_2)$.

THÉORÈME 4. - <u>Pour que toute fonction de</u> $\mathcal{C}(X^*)$ <u>soit résolutive, il faut et il suffit que</u> $\hat{\mathcal{H}}$ <u>soit un treillis (donc forcément un espace de Riesz) pour la relation d'ordre naturelle</u> $\leq$.

Il nous reste à démontrer : si $\hat{\mathcal{H}}$ est un treillis, toute fonction de $\mathcal{C}(X^*)$ est résolutive. La démonstration demande quelques préparations.

Soit H un <u>espace de Riesz</u> quelconque (cf. [3], chapitre 2); notons Sup et Inf les opérations dans le treillis H. On dit qu'un sous-espace vectoriel N de H est <u>épais</u> si tout élément de N est la différence de deux éléments $\geqslant 0$ de N et si les relations $0 \leq g \leq f$, $f \in N$, $g \in H$ entraînent : $g \in N$. On dit qu'un sous-espace épais N de H est <u>maximal</u> si $N \neq H$ et si N et H sont les seuls sous-espaces épais N' de H tels que : $N \subset N' \subset H$.

Pour toute forme linéaire positive χ sur H, un calcul simple montre l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(E) $\quad \chi(\mathrm{Inf}(f , g)) = 0 \Rightarrow \chi(f) = 0$ ou $\chi(g) = 0 \qquad (f , g \in H)$;

(E_I) $\quad \chi(\mathrm{Inf}(f , g)) = \inf(\chi(f) , \chi(g)) \qquad (f , g \in H)$;

(E_S) $\quad \chi(\mathrm{Sup}(f , g)) = \sup(\chi(f) , \chi(g)) \qquad (g , g \in H)$.

Les énoncés suivants sont alors connus (cf. [2], chapitre 15 ; et [12]).

(A) Tout sous-espace épais maximal N de H est un hyperplan. Il existe une forme linéaire positive χ sur H telle que l'on ait $N = \overset{-1}{\chi}(0)$. Toute telle forme linéaire χ possède la propriété (E).

(B) Pour toute forme linéaire positive $\chi \neq 0$ sur H ayant la propriété (E),

$\chi^{-1}(0)$ est un sous-espace épais maximal de H .

Montrons maintenant pour notre espace de Riesz particulier $\hat{\mathcal{H}}$:

LEMME 2. - Soit $\hat{\mathcal{H}}$ un treillis. Pour tout sous-espace épais maximal $\mathcal{N}$ de $\hat{\mathcal{H}}$, il existe alors un seul point $x_0 \in X$ tel que $\mathcal{N}$ soit l'ensemble des fonctions $h \in \hat{\mathcal{H}}$ s'annulant en x_0 .

Comme $\hat{\mathcal{H}}$ sépare les points de X , il existe au plud un tel point x_0 . Supposons que l'on ait $h(x_0) \neq 0$ pour toute $h \in \mathcal{N}$ et tout $x_0 \in X$. $\mathcal{N}$ étant épais, il existe alors une $h_x \in \mathcal{N}$ telle que : $h_x \geqslant 0$ et $h_x(x) > 0$ quel que soit le point $x \in X$. Pour tout $x \in X$, il existe donc un voisinage ouvert U_x de x tel que : $h_x(y) > 0$ pour tout $y \in U_x$. L'espace X étant compact, il suffit d'un nombre fini de U_x pour recouvrir X : $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. La fonction $h_0 = h_{x_1} + \ldots + h_{x_n}$ appartient à $\mathcal{N}$ et est strictement positive dans X . Quelle que soit la fonction $h \geqslant 0$ de $\hat{\mathcal{H}}$, il existe donc un nombre $\alpha > 0$ tel que : $0 \leq h \leq \alpha h_0$; il en résulte $h \in \mathcal{N}$. On a donc $\mathcal{N} = \hat{\mathcal{H}}$ ce qui est absurde. Par conséquent, nous avons démontré l'existence d'un $x_0 \in X$ tel que : $h(x_0) = 0$ pour toute $h \in \mathcal{N}$. Le sous-espace $\mathcal{N}$ est égal à l'ensemble $\mathcal{N}'$ des fonctions de $\hat{\mathcal{H}}$ s'annulant en x_0 . En effet, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont des hyperplans dans $\hat{\mathcal{H}}$ (cf. (B)) ; la relation $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$ implique donc $\mathcal{N} = \mathcal{N}'$.

LEMME 3. - Si $\hat{\mathcal{H}}$ est un treillis, $X^* = \partial_{\hat{\mathcal{H}}} X$ est l'ensemble des points $x \in X$ ayant la propriété suivante :

(13) $\quad \mathrm{Inf}(h_1 , h_2) = 0 \Longrightarrow h_1(x) = 0 \quad$ ou $\quad h_2(x) = 0 \qquad (h_1 , h_2 \in \hat{\mathcal{H}})$.

Autrement dit : X^* est l'ensemble X^0 des $x \in X$ tels que la forme linéaire positive $h \longrightarrow h(x)$ satisfasse aux conditions équivalentes (E), (E_I), (E_S).

On vérifie d'abord aisément que X^0 est fermé, donc compact. Toute fonction $h_0 \in \hat{\mathcal{H}}$ atteint son minimum global en au moins un point de X^0 . En effet, soient $\alpha = \inf\limits_{x \in X} h_0(x)$ et M l'ensemble des $x \in X$, où on a $h_0(x) = \alpha$. Considérons l'ensemble $\mathcal{N}_0$ de toutes les fonctions $h \in \hat{\mathcal{H}}$ ayant la propriété : $h = h_1 - h_2$, où $h_i \geqslant 0$, $h_i \in \hat{\mathcal{H}}$, $h_i(x) = 0$ pour tout $x \in M$ ($i = 1 , 2$). $\mathcal{N}_0$ est un sous-espace épais de $\hat{\mathcal{H}}$ tel que : $h_0 - \alpha \in \mathcal{N}_0$, mais $1 \notin \mathcal{N}_0$. Le lemme de Zorn assure alors l'existence d'un sous-espace ~~épais maximal~~ $\mathcal{N}$ de $\hat{\mathcal{H}}$ contenant $\mathcal{N}_0$. Soit x_0 le point unique de X correspondant à $\mathcal{N}$ au sens du lemme 2. En vertu de (A), la forme linéaire $h \to h(x_0)$ possède la propriété (E), c'est-à-dire que l'on a $x_0 \in X^0$. Comme $h_0 - \alpha \in \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$, il en résulte que h_0 atteint son minimum global au point x_0. On a donc : $X^* \subset X^0$. Finalement, considérons l'application $h \longrightarrow h_{X^*}$ de $\hat{\mathcal{H}}$ sur le sous-espace vectoriel $\hat{\mathcal{H}}_{X^*}$ des fonctions h_{X^*} de $\mathcal{C}(X^*)$. Il s'agit d'un isomorphisme pour la structure d'ordre, ce qui entraîne que $\hat{\mathcal{H}}_{X^*}$ est un treillis pour sa relation d'ordre naturelle. Par conséquent, pour tout $x_0 \in X^0$ et la forme linéaire correspondante $\chi(h) = h(x_0)$ sur $\hat{\mathcal{H}}$, la forme linéaire $\chi^*(h_{X^*}) = \chi(h)$ sur $\hat{\mathcal{H}}_{X^*}$ possède la propriété (E). Il résulte alors de (B) et du lemme 2 que le point x_0 appartient à X^*. Ainsi, nous avons montré que $X^0 \subset X^*$, donc que $X^0 = X^*$.

La démonstration du théorème 4 est maintenant une simple conséquence du lemme 3. En effet, d'après ce lemme, on a

$$[\mathrm{Inf}(g\ ,\ h)]_{X^*} = \inf(g_{X^*}\ ,\ h_{X^*}) \qquad \text{et} \qquad [\mathrm{Sup}(g\ ,\ h)]_{X^*} = \sup(g_{X^*}\ ,\ h_{X^*})$$

quelles que soient les fonctions $g\ ,\ h \in \hat{\mathcal{H}}$. Le sous-espace vectoriel $\hat{\mathcal{H}}_{X^*}$ de $\mathcal{C}(X^*)$ satisfait donc aux hypothèses du théorème d'approximation de M. H. STONE En vertu de ce théorème, $\hat{\mathcal{H}}_{X^*}$ est partout dense dans $\mathcal{C}(X^*)$. On, la convergence uniforme d'une suite $(h^n_{X^*})$ de fonctions de $\hat{\mathcal{H}}_{X^*}$ entraîne la convergence de la suite correspondante (h^n) dans $\mathcal{C}(X)$. L'espace $\hat{\mathcal{H}}$ étant fermé dans $\mathcal{C}(X)$, il en résulte que $\hat{\mathcal{H}}_{X^*}$ est fermé dans $\mathcal{C}(X^*)$, donc même égale à $\mathcal{C}(X^*)$. Ainsi, toute fonction de $\mathcal{C}(X^*)$ est résolutive.

REMARQUES.

1° On vérifie facilement que le treillis $\hat{\mathcal{H}}$ est un (M -)espace au sens de S. KAKUTANI ([12]), qui, d'après un résultat de [12], est isomorphe à un espace $\mathcal{C}(Q)$ pour un compact Q convenablement choisi. Notre théorème 4 affirme que Q est homéomorphe à la frontière de Silov $\partial_{\mathcal{H}} X$.

2° Ajoutons encore le résultat suivant sans démonstration. Pour que toute fonction de $\mathcal{C}(X^*)$ soit résolutive, il faut et il suffit que toute fonction du cône $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ (cf. le numéro 2) possède une plus grande minorante $\mathcal{H}$-harmonique.

4. Application.: Caractérisation de certains simplexes de G. CHOQUET.

L'espace compact X sera maintenant une partie compacte et convexe d'un espace vectoriel localement convexe E (sur le corps R). Notons $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions $h \in \mathcal{C}(X)$ qui sont linéaires dans X, c'est-à-dire concaves et convexes dans X. Alors $\mathcal{H} = \mathcal{L}$ possède les propriétés fondamentales (H_1), (H_2), (H_3) cpmme on le vérifie facilement. (La propriété (H_3) résulte d'un théorème connu sur la séparation des ensembles convexes ([4], page 73, proposition 4)). Ainsi notre théorie générale peut être appliquée.

Interprétons d'abord les notions les plus importantes de cette théorie dans notre cas particulier. L'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions concaves de $\mathcal{C}(X)$ est un cône convexe, fermé, s. r. inf. de sommet 0 dans $\mathcal{C}(X)$ tel que : $\mathcal{L} = \mathcal{E} \cap (-\mathcal{E})$.

D'après le corollaire de la proposition 3, on a donc

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \quad . \tag{14}$$

Pour tout $s \in X$ et tout sous-compact Y de X contenant $\partial_{\mathcal{L}} X$, nous avons défini l'ensemble $\mathcal{M}_Y^s = \mathcal{M}_Y^s(\mathcal{L})$. Il résulte de (1) que $\mathcal{M}_Y^s$ est l'ensemble des mesures $\mu \in \mathcal{M}(Y)$ de masse totale 1 avec s somme barycentre :

$$\int d\mu = 1 \quad , \quad s = \int x\, d\mu \qquad (\mu \in \mathcal{M}_Y^s) \tag{15}$$

(cf. [3], page 87, et [7], page 236).

D'après le théorème 2, la frontière de Silov $\partial_{\mathcal{H}} X$ est complètement déterminée par les points $\mathcal{L}$-extrémaux. Nous allons montrer qu'il y a identité entre ces points et les points extrémaux géométriques. Un point $x_0 \in X$ est un point extrémal géométrique si l'ensemble $X \cap \complement\{x_0\}$ est convexe.

LEMME 4. - Pour tout point $x_0 \in X$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) x_0 est un point extrémal géométrique de X.

(b) Pour tout voisinage U de x_0 dans X, il existe une forme linéaire continue f sur E et un nombre réel η tels que l'on ait :

$$x_0 \in \{x \in X : f(x) > \eta\} \subset U \quad . \tag{16}$$

(c) x_0 possède un système fondamental de voisinages V pour lesquels $X \cap \complement V$ est convexe.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : Le voisinage U peut être supposé ouvert. L'ensemble $K = X \cap \complement U$ et son enveloppe fermée convexe K_0 sont alors compacts. Tous les points extrémaux géométriques de K_0 appartiennent donc à K (cf. [4], page 84, proposition 4) ; on a ainsi : $x_0 \notin K_0$. Il en résulte l'existence d'une forme linéaire continue sur E telle que : $f(x_0) > f(x)$ pour tout $x \in K_0$ (cf. [4], page 73, proposition 4) . La forme linéaire f et le nombre $\eta = \sup_{x \in K_0} f(x)$ possèdent alors la propriété (16).

(b) $\Longrightarrow$ (c) : C'est une conséquence immédiate de (b). Il suffit de considérer $V = \{x \in X : f(x) > \eta\}$.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : Pour tout couple de points x_1 , $x_2 \in X \cap \complement \{x_0\}$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $X \cap \complement V$ soit convexe et tel que x_1 , x_2 n'appartiennent pas à V . Le segment formé d'extrémités x_1 et x_2 est alors contenu dans $X \cap \complement V$, donc aussi dans $X \cap \complement \{x_0\}$. Ainsi x_0 est un point extrémal géométrique.

LEMME 5. - <u>Pour tout point</u> $x_0 \in X$ <u>et tout compact</u> Y <u>tel que</u> $\partial_{\mathcal{L}} X \subset Y \subset X$, <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) x_0 <u>est un point extrémal géométrique de</u> X .

(b) <u>On a</u> $\mathfrak{M}_Y^{x_0}(\mathcal{L}) = \{\varepsilon_{x_0}\}$.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : En vertu du lemme 4, x_0 possède un système fondamental de voisinages dans X de la forme : $V_{h,\eta} = \{x : h(x) > \eta\}$, où $h \in \mathcal{L}$ et $\eta \in R$. Comme h n'atteint son maximum global qu'en des points de $V_{h,\eta}$, on a $V_{h,\eta} \cap \partial_{\mathcal{L}} X \neq \emptyset$. Il en résulte : $x_0 \in \partial_{\mathcal{L}} X$ et $\varepsilon_{x_0} \in \mathfrak{M}_Y^{x_0}$. Soit maintenant μ une mesure quelconque de $\mathfrak{M}_Y^{x_0}$. On a $\mu = \varepsilon_{x_0}$ si on peut montrer que le support S_μ de μ ne contient qu'un seul point. Supposons x_1 , $x_2 \in S_\mu$ et $x_1 \neq x_2$; nous allons voir que cela entraîne contradiction. On a alors $h(x_1) < 0 < h(x_2)$ pour une $h \in \mathcal{L}$. Nous posons :

$$F = \{x : h(x) \leq 0\} \cap Y \quad ,$$

$$G = \{x : h(x) > 0\} \cap Y \quad ,$$

et

$$\mu_1' = \chi_F \mu \quad , \quad \mu_2' = \chi_G \mu \quad ,$$

où χ_A désigne la fonction caractéristique d'un ensemble $A \subset Y$ relativement à Y . F et G étant des voisinages dans Y de points de S_μ , on a

$$c_1 = \int d\mu_1' = \mu(F) > 0 \quad \text{et} \quad c_2 = \int d\mu_2' = \mu(G) > 0 \quad .$$

$\mu_i = c_i^{-1}\,\mu'_i$ ($i = 1 , 2$) sont des mesures de $\mathfrak{M}(Y)$ de masse totale 1 . Pour les barycentres correspondants $x_i^* = \int x\,d\mu_i$, on a :

$$x_0 = c_1\,x_1^* + c_2\,x_2^* \quad , \quad c_1 > 0 \ , \quad c_2 > 0 \ , \quad c_1 + c_2 = 1 \quad .$$

x_0 étant extrémal, il en résulte ; $x_0 = x_1^* = x_2^*$. Comme F et G sont des ensembles convexes, on a $x_1^* \in F$ et $x_2^* \in \bar{G}$, donc $h(x_1^*) \leqslant 0$ et $h(x_2^*) \geqslant 0$, c'est-à-dire $h(x_2^*) = \int_G h\,d\mu = 0$. Mais cette égalité est absurde, car la restriction de h à G est continue et strictement positive, et $\mu(G) > 0$. Ainsi : S_μ ne contient qu'un seul point.

non (a) $\Longrightarrow$ non (b) : Comme x_0 n'est pas un point extrémal géométrique, il existe deux points différents $x_1 \neq x_2$ de X et un $\lambda \in R$ tels que :

$$x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)\,x_2 \quad , \quad 0 < \lambda < 1 \quad .$$

En vertu de la proposition 1, il existe un couple de mesures $\mu_i \in \mathfrak{M}_Y^{x_i}$, $i = 1 , 2$; l'inégalité $x_1 \neq x_2$ entraîne $\mu_1 \neq \mu_2$. Par conséquent, $\mu = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$ est une mesure de $\mathfrak{M}_Y^{x_0}$ différente de ε_{x_0} . En effet, $\mu = \varepsilon_{x_0}$ entraîne $S_{\mu_1} = S_{\mu_2} = \{x_0\}$, donc $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_{x_0}$ ce qui est absurde.

La caractérisation déjà annoncée des points $\mathcal{L}$-extrémaux est maintenant une conséquence immédiate du lemme précédent pour $Y = X$:

COROLLAIRE. - Il y a identité entre les points $\mathcal{L}$-extrémaux de X et les points extrémaux géométriques de X .

La frontière de Silov $\partial_{\mathcal{L}} X$ est donc l'adhérence $\bar{X}_e$ de l'ensemble X_e des points extrémaux géométriques de X . Par conséquent, notre problème de Dirichlet est ici le problème de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que toute fonction de $\mathcal{C}(\bar{X}_0)$ puisse être prolongée en une fonction continue linéaire dans X . Nous nous proposons de caractériser les ensembles convexes compacts $X \subset E$ ayant cette propriété par des propriétés géométriques.

Rappelons la définition des simplexes de G. CHOQUET ([8] et [9]). Un sous-compact convexe X de E est un simplexe si, pour tout couple d'images positivement homothétiques de X

$$X_i = a_i + \lambda_i\,X \qquad (a_i \in E \ , \ \lambda_i \geqslant 0 \ ; \ i = 1 , 2) \quad ,$$

on a l'alternative : l'intersection $X_1 \cap X_2$ est vide, ou elle est elle-même une image positivement homothétique de X. En vertu d'un théorème d'unicité de G. CHOQUET ([8] et [9]), pour tout point s d'un tel simplexe X, il existe au plus une mesure $\mu \in \mathcal{M}^s_{X^*}(\mathcal{L})$ portée par X_e.

THÉORÈME 5. - Pour toute partie convexe compacte X d'un espace localement convexe E, les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) X est un simplexe dont l'ensemble X_e des points extrémaux géométriques est fermé.

(b) Tout point $s \in X$ est le barycentre d'une seule mesure $\mu^s \in \mathcal{M}(\overline{X}_e)$ de masse totale 1.

(c) Toute fonction de $\mathcal{C}(\overline{X}_e)$ peut être prolongée en une fonction de $\mathcal{L}$.

(d) $\mathcal{L}$ est un treillis pour la relation d'ordre naturelle.

L'équivalence des conditions (b), (c), (d) est une conséquence immédiate des théorèmes 3 et 4. La condition (a) entraîne (b) en vertu du théorème d'unicité de G. CHOQUET cité plus haut. Si (b) est vérifiée, l'application $s \longrightarrow \mu^s$ est un isomorphisme et homéomorphisme canonique de X sur l'ensemble convexe compact $\mathcal{M}_1(\overline{X}_e)$ des mesures $\mu \in \mathcal{M}(\overline{X}_e)$ de masse totale 1. Le cône $\mathcal{M}(\overline{X}_e)$ étant un treillis et $\mathcal{M}_1(X_e)$ étant une base de ce cône, $\mathcal{M}_1(\overline{X}_e)$ est un simplexe d'après un résultat de G. CHOQUET ([8] et [9]). L'image isomorphe X de $\mathcal{M}_1(\overline{X}_e)$ est donc aussi un simplexe. Finalement, il résulte du théorème 3 et de la proposition 7 que X_e est fermé.

REMARQUES.

1° Le théorème 5 caractérise les simplexes X dont l'ensemble des points extrémaux géométriques est fermé par des propriétés intrinsèques. L'implication "(a) $\Longrightarrow$ (c)" se trouve déjà dans [8] et [9].

2° On peut montrer que le cône $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ du numéro 2 est l'ensemble des fonctions continues concaves dans X.

3° Soit $\mathcal{L}_0$ l'ensemble des fonctions $x \longrightarrow f(x) + \text{Cte}$ dans X, où f est une forme linéaire continue dans X. Alors $\mathcal{L}_0$ possède aussi les propriétés (H_1), (H_2), (H_3) ; on a $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$. En remplaçant $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L}_0$ dans ce numéro, on arrive aux mêmes résultats parce que : $\widehat{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{L}$.

4° On sait (cf. [4], page 85, remarque 2) qu'un ensemble convexe compact X dans E peut avoir des points extrémaux géométriques par lesquels ne passe aucun hyperplan d'appui de X. Un tel point extrémal géométrique ne peut pas être

$\mathcal{L}_0$-exposé.

5. Retour à la théorie générale.

Considérons de nouveau un espace compact X quelconque et une partie $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}(X)$ ayant les propriétés (H_1), (H_2), (H_3). Munissons $\mathcal{H}$ de la topologie de la convergence uniforme sur X et son dual (topologique) E de la topologie faible. L'ensemble X' des formes linéaires positives I sur $\mathcal{H}$, telles que $I(1) = 1$, est une partie compacte convexe de E. Pour tout $x \in E$, l'application $h \longrightarrow h(x)$ est un élément $I_x \in X'$; l'application φ définie par $\varphi(x) = I_x$ est continue et biunivoque. L'espace X étant compact, il en résulte que φ est une homéomorphie de X sur $\varphi(X) \subset X'$.

LEMME 6. - <u>L'application $\varphi : X \longrightarrow X'$ applique l'ensemble X_e des points $\mathcal{H}$-extrémaux de X (biunivoquement) sur l'ensemble X'_e des points extrémaux géométriques de X'</u>

Pour toute $h \in \mathcal{H}$, $I \longrightarrow I(h)$ est une forme linéaire continue sur E ; comme E est muni de la topologie faible, réciproquement toute forme linéaire continue sur E est de cette forme (cf. [5], page 50, proposition 1). Il en résulte d'abord $X'_e \subset \varphi(X)$. En effet, supposons l'existence d'un point $I_0 \in X'_e \cap \complement\varphi(X)$. L'ensemble $\varphi(X)$ et son enveloppe fermée convexe $\widehat{\varphi(X)}$ étant compacts, I_0 ne peut pas appartenir à $\widehat{\varphi(X)}$. Autrement, I_0 serait un point extrémal géométrique de $\widehat{\varphi(X)}$, donc un élément de $\varphi(X)$ (cf. [4], page 84, proposition 4). Par conséquent, il existe un hyperplan fermé dans E séparant I_0 et $\widehat{\varphi(X)}$ strictement. En vertu de notre remarque préliminaire, cela signifie l'existence d'une $h_0 \in \mathcal{H}$ telle que l'on ait

$$I(h_0) < I_0(h_0)$$

pour toute $I \in \widehat{\varphi(X)}$, donc en particulier pour toute $I \in \varphi(X)$. Ainsi, on a $h_0(x) < I_0(h_0)$, quel que soit $x \in X$. Il en résulte $\alpha = \sup\limits_{x \in X} h_0(x) < I_0(h_0)$, ce qui est absurde, car $h_0 \leq \alpha$ entraîne $I_0(h_0) \leq I_0(\alpha) = \alpha$. Nous avons donc montré : $X'_e \subset \varphi(X)$.

Ce résultat, en liaison avec le lemme 5 (pour $Y = \varphi(X)$), nous fournit maintenant la proposition affirmée. En effet, soient $x_0 \in X$ et $\mu \in \mathcal{M}(X)$ choisis d'une manière telle que l'on ait :

$$h(x_0) = \int h\,d\mu \qquad \text{pour toute } h \in \mathcal{H} .$$

Alors $\mu' = \varphi(\mu)$ est une mesure $\geqslant 0$ sur $\varphi(X)$ de masse totale 1 avec $\varphi(x_0)$ comme barycentre, et réciproquement.

Remarquons encore qu'il résulte du lemme 6 et du théorème de Krein-Milman que X' est l'enveloppe fermée convexe de X'_e, donc aussi de $\varphi(X)$.

Voici un supplément utile à la théorie générale des numéros 1, 2 et 3.

PROPOSITION 8. - Pour qu'un point $x_0 \in X$ soit $\mathcal{H}$-extrémal, il faut et il suffit que ε_{x_0} soit la seule mesure $\mathcal{H}$-harmonique associée à x_0.

Nous n'avons qu'à montrer que x_0 est $\mathcal{H}$-extrémal si $\mathfrak{M}^{x_0} = \{\varepsilon_{x_0}\}$. Il résulte du lemme précédent que l'on a $X'_e \subset \varphi(X^*) \subset X'$, où $X^* = \partial_{\mathcal{H}} X$. Le même raisonnement qu'à la fin de la démonstration du lemme 6 montre que, pour toute $\mu \in \mathfrak{M}^{x_0}$, $\varphi(\mu)$ est une mesure de $\mathfrak{M}(\varphi(X^*))$ de masse totale 1 avec $\varphi(x_0)$ comme barycentre, et réciproquement. En vertu du lemme 5, $\varphi(x_0)$ est alors un point extrémal géométrique de X' ; en vertu du lemme 6, x_0 est donc un point $\mathcal{H}$-extrémal.

REMARQUES.

1° Il serait intéressant d'avoir une démonstration directe de la proposition 8 qui n'utilise pas l'immersion $\varphi : X \to X'$ de X dans E.

2° Il résulte encore de la proposition 8 : pour qu'un point $x_0 \in X$ soit $\mathcal{H}$-extrémal, il faut et il suffit que l'on ait $\mathfrak{M}^{x_0}_Y(\mathcal{H}) = \{\varepsilon_{x_0}\}$ pour un (et alors nécessairement pour tout) sous-compact Y de X contenant $\partial_{\mathcal{H}} X$.

3° Pour X et $\mathcal{H}$ donnés, définissons l'immersion $\varphi : X \to X'$ de X dans E comme plus haut. En remplaçant le couple $(X, \mathcal{H})$ par $(X, \hat{\mathcal{H}})$, on arrive à des espaces et applications $\hat{E}$, $\hat{X}'$, $\hat{\varphi} : X \to \hat{X}'$ définis respectivement. En associant à tout élément de E, c'est-à-dire à toute forme linéaire continue sur $\hat{\mathcal{H}}$ sa restriction à $\mathcal{H}$, on définit une application linéaire continue $\Phi : \hat{E} \to E$ de $\hat{E}$ sur E. (Φ est surjective en vertu du théorème de Hahn-Banach). D'après le théorème de M. G. KREIN sur le prolongement des formes linéaires positives (cf. [4], page 75, proposition 6), on a $\Phi(\hat{X}') = X'$; de plus : $\varphi = \Phi \circ \hat{\varphi}$. Les points $\mathcal{H}$-extrémaux de X étant identiques aux points $\hat{\mathcal{H}}$-extrémaux, il résulte du lemme 6 que Φ applique l'ensemble des points extrémaux géométriques de X' de façon homéomorphe sur l'ensemble des points extrémaux géométriques de $\hat{X}'$. (Φ applique même $\hat{\varphi}(X)$ de façon homéomorphe sur $\varphi(X)$). Mais Φ n'est pas une application biunivoque de $\hat{X}'$ sur X' en général, comme on le vérifie facilement dans le cas de l'exemple 3 du numéro 1.

6. Application au problème de Dirichlet classique.

Considérons dans l'espace euclidien R^N à $N \geqslant 2$ dimensions une partie ouverte relativement compacte Ω ; désignons par F la frontière euclidienne de Ω. L'espace compact X sera maintenant l'adhérence de Ω : $X = \bar{\Omega} = \Omega \cup F$. L'espace $\mathcal{H}$ sera l'ensemble des fonctions $h \in \mathcal{C}(X)$ dont la restriction à Ω est harmonique au sens usuel. Il est alors évident que $\mathcal{H}$ possède les propriétés (H_1), (H_2), (H_3).

Aussi, dans ce cas particulier, on a $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ en vertu du corollaire de la proposition 3. En effet, l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $f \in \mathcal{C}(X)$ dont le restriction à Ω est surharmonique est un cône convexe, fermé, s. r. inf. de sommet 0 dans $\mathcal{C}(X)$ tel que l'on ait $\mathcal{H} = \mathcal{E} \cap (-\mathcal{E})$.

La détermination des points $\mathcal{H}$-extrémaux et de la frontière de Silov est ici un problème plus délicat que le problème correspondant au numéro 4. Montrons d'abord que $\partial_{\mathcal{H}} X$ est compris entre des parties topologiquement intéressantes de X. Dans ce qui suit, $K(x , y)$ sera le noyau newtonien usuel de la théorie du potentiel :

$$(17) \qquad K(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|^{2-N} & (\text{pour } N \geqslant 3) \\ -\log\|x - y\| & (\text{pour } N = 2) \end{cases} \qquad (x, y \in R^N),$$

où $\|\ldots\|$ note la norme euclidienne dans R^N.

Par un calcul simple qui peut être supprimé ici, on montre :

LEMME 7. - <u>Soient</u> A <u>une partie compacte de</u> R^N, $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ <u>une suite convergente de points</u> $x_n \in R^N$ <u>dont la limite</u> $x_0 = \lim x_n$ <u>n'appartient pas à</u> A, <u>et</u> f_n <u>la restriction à</u> A <u>de la fonction</u> $x \to K(x , x_n)$ $(n = 0 , 1 , \ldots)$. <u>Alors la suite</u> $(f_n)_{n=1,2,\ldots}$ <u>converge uniformément vers</u> f_0 <u>dans</u> A.

Le résultat déjà annoncé peut être énoncé comme suit :

PROPOSITION 9. - <u>Pour la frontière de Silov</u> $X^* = \partial_{\mathcal{H}} X$, <u>on a</u> :

$$F \cap \complement \overset{\circ}{X} \subset X^* \subset F$$

<u>(où</u> $\overset{\circ}{X}$ <u>désigne l'intérieur de</u> X <u>dans</u> R^N).

En vertu du principe classique du maximum, toute fonction de $\mathcal{H}$ atteint son maximum global en un point au moins de F ; la frontière F étant compacte, il en résulte : $X^* \subset F$. Il reste donc à démontrer la relation : $F \cap \complement \mathring{X} \subset X^*$. Supposons l'existence d'un $x_0 \in F \cap \complement \mathring{X} \cap \complement X^*$; nous allons voir que cela entraîne contradiction. En effet, il existe une suite $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ de points $x_n \notin X$ tels que : $\lim x_n = x_0$. Désignons par h_n^* et h_n respectivement la restriction à X^* et X de la fonction $x \rightarrow K(x , x_n)$, $(n = 1 , 2 , \ldots)$. A cause de $x_n \in \complement X$, la fonction h_n appartient à $\mathcal{H}$ pour tout n . Comme x_0 n'appartient pas à X^* , la suite (h_n^*) converge uniformément dans X^* en vertu du lemme 7. Grâce aux propriétés de la frontière de Silov, il en résulte la convergence uniforme de la suite (h_n) dans X , donc en particulier la convergence de la suite $(h_n(x_0))$ vers une limite finie. Mais comme

$$\lim h_n(x_0) = \lim K(x_0 , x_n) = + \infty \quad ,$$

nous aboutissons à une contradiction. On a donc $F \cap \complement \mathring{X} \subset X^*$.

COROLLAIRE. - Si Ω est égale à l'intérieur de X , la frontière de Silov $\partial_{\mathcal{H}} X$ est identique à la frontière euclidienne F .

En effet, on a $F = F \cap \complement \Omega \subset X^* \subset F$.

Dans le cas $\Omega = \mathring{X}$, les résultats du numéro 3, surtout les théorèmes 3 et 4, fournissent des critères nouveaux pour que le problème de Dirichlet classique possède une solution pour toute fonction de $\mathcal{C}(F)$.

Pour la caractérisation des points $\mathcal{H}$-extrémaux et la détermination exacte de X^* , nous rappelons qu'à toute fonction $f \in \mathcal{C}(F)$ correspond une solution généralisée du problème de Dirichlet classique. Il s'agit de la fonction de N. WIENER H_f qui est définie de la manière suivante (pour plus de détails, voir par exemple [6]): on considère l'ensemble $\mathcal{O}_f$ des fonctions v surharmoniques dans Ω , bornées inférieurement, et telles que :

$$\liminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} v(x) \geqslant f(x_0) \qquad \text{quel que soit } x_0 \in F \; . \tag{18}$$

On considère aussi l'ensemble $\mathcal{U}_f = - \mathcal{O}_{-f}$. On montre alors l'égalité de l'enveloppe inférieure de $\mathcal{O}_f$ avec l'enveloppe supérieure de $\mathcal{U}_f$ et définit :

$$H_f(x) = \inf_{v \in \mathcal{O}_f} v(x) = \sup_{w \in \mathcal{U}_f} w(x) \qquad \text{pour tout } x \in \Omega \; . \tag{19}$$

H_f est alors une fonction harmonique (au sens usuel), définie dans Ω .

On appelle régulier tout point $x_0 \in F$ pour lequel on a

(20) $$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} H_f(x) = f(x_0) \qquad \text{quelle que soit} \quad f \in \mathcal{C}(F) \quad .$$

THÉORÈME 6. - Il y a identité entre les points $\mathcal{H}$-extrémaux de X et les points réguliers de F .

Soit x_0 un point $\mathcal{H}$-extrémal. En vertu de la proposition 9, x_0 appartient à F et F est un sous-compact de X contenant X^* . On a donc $\mathcal{M}_F^{x_0}(\mathcal{H}) = \{\varepsilon_{x_0}\}$. Il en résulte $\underline{H}_F^{x_0}(f) = \overline{H}_F^{x_0}(f)$ quelle que soit la fonction $f \in \mathcal{C}(F)$, en vertu de la proposition 1. Pour toute $f \in \mathcal{C}(F)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe donc deux fonctions h_1 , $h_2 \in \mathcal{H}$ telles que :

(21) $$h_1(x) \leq f(x) \leq h_2(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in F \quad \text{et} \quad h_2(x_0) - h_1(x_0) \leq \varepsilon \quad .$$

Pour les restrictions h_i^{Ω} de h_i à Ω ($i = 1 , 2$), on a donc : $h_1^{\Omega} \in \mathcal{U}_f$ et $h_2^{\Omega} \in \mathcal{O}_f$. Les égalités (19) entraînent alors :

$$h_1^{\Omega} \leq H_f \leq h_2^{\Omega} \quad .$$

Pour $x \in \Omega$ tendant vers x_0 , il en résulte :

$$h_1(x_0) \leq \liminf H_f(x) \leq \limsup H_f(x) \leq h_2(x_0) \quad ,$$

d'où, en liaison avec (21) :

$$f(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} H_f(x)$$

quelle que soit $f \in \mathcal{C}(F)$. Ainsi, le point x_0 est régulier. En vertu d'un théorème de M. V. KELDYCH [13], tout point régulier de F est $\mathcal{H}$-exposé, donc aussi $\mathcal{H}$-extrémal (cf. numéro 1, exemple 1).

REMARQUE. - La plupart des résultats précédents s'étendent sans difficulté à certaines généralisations du problème de Dirichlet, par exemple pour un ouvert relativement compact d'un espace de Green. Cette remarque concerne aussi le théome 6 dont la démonstration utilise le théorème de Keldych. En effet, M. BRELOT a démontré simplement un lemme valable en particulier dans le cas précédent, ce qui entraîne, soit directement le fait que tout point régulier est $\mathcal{H}$-extrémal, soit, comme nous l'avons remarqué, le théorème de Keldych.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARENS (R.) and SINGER (I. M.). - Function values as boundery integrals, Proc. Amer. math. Soc., t. 5, 1954, p. 735-745.

[2] BIRKHOFF (Garrett). - Lattice theory. - New-York, American mathematical Society, 1948 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 25).

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, Chap. 1-4. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 1175 ; Eléments de Mathématique, 13).

[4] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques, Chap. 1-2. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Eléments de Mathématique, 15).

[5] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques, Chap. 3-5. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1229 ; Eléments de Mathématique, 18).

[6] BRELOT (Marcel). - Familles de Perron et problème de Dirichlet, Acta scient. math., Szeged, t. 9, 1939, p. 133-153.

[7] CHOQUET (Gustave). - Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, N. S., t. 5, 1953-1954, p. 131-295.

[8] CHOQUET (Gustave). - Unicité des représentations intégrales au moyen de points extrémaux dans les cônes convexes réticulés, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 555-557.

[9] CHOQUET (Gustave). - Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956/57, n° 139.

[10] CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 36, 1957, p. 179-189.

[11] GELFAND (I.), RAIKOV (D.) and ŠILOV (G.). - Commutative normed rings [en russe], Uspekhi Mat. Nauk, N. S., t. 2, 1946, p. 48-146.

[12] KAKUTANI (Shizuo). - Concrete representation of abstract (M -)spaces, Annals of Math., t. 42, 1941, p. 994-1024.

[13] KELDYCH (M. V.). - Sur la résolubilité et la stabilité du problème de Dirichlet [en russe], Uspekhi Mat. Nauk, t. 8, 1941, p. 171-231.

[14] LOOMIS (Lynn H.). - An introduction to abstract harmonic analysis. - Toronto, New-York, London, D. Van Nostrand, 1953.

[15] MILMAN (D. P.). - Characteristics of extremal points of regulary compact sets [en russe], Doklady Akad. Nauk SSSR, N. S., t. 57, 1947, p. 119-122.