Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Gustave Choquet

Théorèmes de convergence

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 3 (1958-1959), exp. nº 12, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1958-1959__3__A10_0>

-:-:-:-

Séminaire de
THÉORIE DU POTENTIEL
Année 1958/59

-:-:-:-

THÉORÈMES DE CONVERGENCE

par Gustave CHOQUET

Pour éviter des complications d'énoncé nous ferons la théorie dans un espace compact.

NOYAU. - Soit E compact ; le noyau N est une application universellement mesurable de $E \times E$ dans $[0, \infty]$. On appelle $\check{N}$ l'adjoint de N ; on définit la N-capacité et la $\check{N}$-capacité comme dans [2], auquel nous renvoyons pour les notations. Les mesures utilisées seront de Radon et positives.

On montre aisément que l'ensemble des x où $N\mu(x) \geqslant h$ a une $\check{N}$-$\mathrm{cap}_* < \|\mu\| / h$; et que la capacité intérieure est dénombrablement sous-additive pour les ensembles universellement mesurables.

Les expressions "à peu près partout" (p. p. p.) et "quasi-partout" (q. p.) associées à une capacité se définissent respectivement avec la capacité intérieure et la capacité extérieure.

DÉFINITION. - On dit que N satisfait au <u>théorème de convergence</u> à p. p. p. (resp. q. p.) si, pour toute suite $\mu_n \to \mu$, on a : $\liminf N\mu_n \leqslant N \leqslant \limsup N\mu_n$ $\check{N}$ - à p. p. p. (resp. q. p.) .

DÉFINITION. - Soit f une fonction de compact (définie sur $\mathcal{K}(E)$). On pose : $V_f(K)$ = variation de f sur $K = \sup \Sigma f(K_i)$ pour toutes les sous-familles finies disjointes de compacts de K.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> N <u>un noyau sur</u> E <u>tel que</u>

(1) <u>Pour tout</u> K <u>de $\check{N}$-capacité non nulle, il existe</u> μ <u>sur</u> K <u>telle que</u> $\check{N}\mu$ <u>soit finie et continue hors de</u> K, <u>avec</u> $\check{N}\mu \leqslant 1$ <u>partout, et</u> $\|\mu\|$ <u>arbitrairement voisine de</u> $\check{N}$-cap K.

(2) <u>Pour tout</u> K <u>de $\check{N}$-capacité non nulle, la variation de</u> $\check{N}$-cap <u>sur</u> K <u>est infinie</u> (ceci a lieu pour tous les noyaux usuels).

Alors N satisfait au théorème de convergence à p. p. p.

Notons que (1) est satisfaite lorsque par exemple $\check{N}$ est régulier ou N continu. La condition (2) est inutile lorsque N est semi-continu inférieurement (s. c. i.), et que μ (limite des μ_n) est somme d'une mesure portée par un ensemble de $\check{N}$-capacité intérieure nulle, et d'une mesure normale.

REMARQUE. - Lorsque N est s. c. i. , dire que (2) n'est pas vraie équivaut à :
$(\bar{2})$: Il existe un A compact et une μ sur A avec $\check{N}\mu$ continu, et un $h \geqslant 1$ tels que

$$\mu(K) \leqslant \check{N}\text{-cap } K \leqslant h\mu(K) \qquad \text{pour tout } K \subset A .$$

Pour démontrer le théorème 1, on utilisera le lemme 1 :

LEMME 1. - Soit N satisfaisant à (1), et soit $\mu_n \to \mu$; alors :
$\liminf N\mu_n \leqslant N\mu \leqslant \limsup N\mu_n$, $\check{N}$ - à p. p. p. sur K pour tout K tel que $\mu(K) = 0$ (et $\check{N}$ - q. p. si N est s. c. i.) .

DÉMONSTRATION. - Soit $\varepsilon > 0$; μ se décompose en $\mu = \mu' + \pi'$ où $\|\pi'\| < \varepsilon$ et μ' portée par un compact C disjoint de K .

On peut écrire $\mu_n = \mu'_n + \pi'_n$ où $\|\pi'_n\| < \varepsilon$ et les μ'_n sont portés par un voisinage compact V de C disjoint de K , avec $\mu'_n \to \mu'$.

Soit ν sur K avec $\check{N}\nu$ bornée (par a) et $\check{N}\nu$ continue sur V . Supposons qu'on ait sur K : $N\mu + b \leqslant N\mu_n$. Alors :

$$\int (N\mu_n - N\mu)\, d\nu \geq b\|\nu\| \quad .$$

Or l'intégrale s'écrit :

$$\int \check{N}\nu\,(d\mu'_n - d\mu + d\pi_n - d\pi) \quad .$$

L'un des morceaux $\to 0$; l'autre est majoré par εa ; or ε est indépendant de a et ν , d'où contradiction.

On se ramène ensuite à ceci :

Soit K de capacité $\neq 0$, avec sur K : $N\mu + b \leqslant N\mu_n$, K portant une mesure $\nu \leqslant \mu$.

D'après (2), pour tout entier k, il existe $K' \subset A$ avec $\operatorname{cap} K' \neq 0$ et $\check{N}$-cap $K' > k\nu(K')$; posons $\nu(K') = \varepsilon$.

On peut remplacer μ et μ_n par μ', μ'_n portées par un compact disjoint de K', et $\mu'_n \to \mu'$, avec les compléments π_n et π de norme $\leq 2\varepsilon$. Soit λ la mesure sur K', avec $\check{N}\lambda < 1$ et $\check{N}\lambda$ continue hors de K', et $\|\lambda\|$ voisine de $\check{N}$-cap K'. On a :

$$\int (N\mu_n - N\mu)\, d\lambda \geq b\, \|\check{N}\text{-cap } K\| \geq kb\varepsilon .$$

Comme plus haut, une partie $\to 0$, l'autre est majorée par 2ε. Il y a contradiction car kb peut être arbitrairement grand, donc dépasser 2.

THÉORÈME 2. - *Soit* N s. c. i., *continu hors de* Δ, *et vérifiant* (2). Alors N *satisfait au théorème de convergence* q. p.

On utilisera le théorème 1 et le fait (étudié ailleurs) qu'il y a N et $\check{N}$-capacitabilité pour les $K'_{\sigma\delta}$, et qu'un $K_{\sigma\delta\sigma}$ de capacité intérieure 0 est aussi de capacité extérieure 0.

Familles filtrantes décroissantes de potentiels.

LEMME topologique. - *Soit* E *un espace topologique ; il y a équivalence des propriétés* A, B *suivantes* :

(A) *Tout sous-espace partout dense de* E *contient une partie dénombrable partout dense* (*par exemple* E *est à base dénombrable d'ouverts, ou bien* E *contient une partie dénombrable* D *partout dense et tout point de* D *a une base dénombrable de voisinages*).

(B) *Pour toute famille* f_i *d'applications de* E *dans* $[-\infty, \infty]$, *il existe* I_0 *dénombrable contenu dans* I *avec* $(f_I)_* = (f_{I_0})_*$

(*où* f_* *désigne la plus grande fonction* s. c. i. $\leq f$, *et où* $f_J = \inf_{i \in J} f_i$).

En effet, si (A) est faux, soit $X \subset E$, avec $\overline{X} = E$ et X non séparable. Soit (f_a) $(a \in X)$ la famille suivante :

$$f_a(a) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \neq a .$$

Evidemment $(f_X)_* = 0$; mais pour tout X_0 dénombrable, $(f_{X_0})_* = 0$ seulement sur $\overline{X} \neq E$.

Si (A) est vrai, soit X_ε l'ensemble des points x de E tels que $|f_I - (f_I)_*| < \varepsilon$; l'ensemble X_ε est partout dense.

Soit Y_ε une partie dénombrable partout dense de X_ε . Pour tout $x \in Y_\varepsilon$, il existe $i \in I$ tel que $|f_i(x) - (f_I)_*| < \varepsilon$; soit I_ε l'ensemble de ces i . L'ensemble cherché est :

$$I_0 = \bigcup_1^\infty I_{1/2^n} \quad .$$

Ce lemme étend un résultat utilisé antérieurement dans [1].

DÉFINITION. - Soit $\check{G}$ un noyau et f une application de E dans $\overline{R}$.

On dit que f est $\check{G}$-continu si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert ω tel que $\check{G}$-cap $\omega < \varepsilon$ et tel que la restriction de f à $(E \mathbin{\dot{-}} 0)$ soit finie et continue.

LEMME 2. - *Pour tout noyau* G s. c. i., *et toute* μ *qui soit* G-*normale*, $G\mu$ *est* $\check{G}$-*continue*.

C'est immédiat.

COROLLAIRE. - *Soit* G *régulier et* s. c. i. *et* $G\mu$ *fini* μ-*presque partout*. *Alors* $G\mu$ *est* $\check{G}$-*continu*.

Par exemple, si G est régulier et μ d'énergie finie, $G\mu$ est $\check{G}$-continu.

THÉORÈME 3 (conséquence du lemme 2). - *Soit* G régulier et s. c. i., et $\mu_n \to \mu$ *avec les* $G\mu_n$ *qui soient* $\check{G}$-*continus*. *Alors*

$$G\mu = \inf G\mu_n \ , \quad \check{G}\text{-quasi partout.}$$

Par exemple G et $\check{G}$ réguliers et chaque $G\mu_n$ est fini μ_n-presque partout.

On utilisera le fait que l'ensemble exceptionnel se ramène ici à l'étude d'un K_σ .

Construction de noyaux singuliers.

1° Il existe des noyaux de composition dans R^n, symétriques, finis continus hors de Δ, et infinis sur Δ, et pour lesquels le théorème de convergence à p. p. p. est faux.

Par exemple, dans R^2 prendre $N(x, y) = F(x - y)$ où F est une fonction dont le support ne rencontre l'axe des x_1 qu'en 0, avec

$$\int F(x_1, x_2)\, dx_1 = 1 \qquad \text{pour tout } x_2 \neq 0 .$$

Pour un tel noyau, la capacité d'un ensemble contenu dans une droite $x_2 =$ constante est égale à sa mesure de Lebesgue ; donc N ne vérifie pas la condition (2). On vérifiera que le théorème de convergence n'est pas satisfait.

Dans R^2, $1/r^{1/2}$ + le noyau précédent convient aussi.

2° De même il existe des noyaux de composition dans R^2 ne satisfaisant pas à (1), par exemple en prenant $F = 1/r$ sauf sur $x_2 = 1$, où $F = 0$.

Bons noyaux.

On appellera bon noyau sur E compact $(N \in B)$ si $N \geq 0$, s. c. i., continu hors de Δ, satisfait à (2), vérifie le théorème de convergence, et la capacitabilité des $K'_{\sigma\delta}$.

Par exemple N régulier continu hors de Δ ; (en particulier, dans R^2 les $\Phi(r)$ décroissants).

Notons que pour tout noyau de composition $N \in B$ avec $N(0) = \infty$, $N > 0$ et continu hors de Δ, il y a des $N' < N$ où $N' \notin B$, malgré un comportement assez régulier.

Par exemple, dans R^2, prendre N' partout nul sauf dans de petits carrés très rares convergeant vers 0.

Equilibre et capacité.

Soit G un noyau ≥ 0 et s. c. i. sur E localement compact.

DÉFINITION. - On dira que G satisfait au principe de l'équilibre pour le compact K s'il existe une $\mu \geq 0$ sur K telle que

$$G\mu \leq 1 \text{ partout, et } G\mu = 1, \ \check{G}\text{-q. p sur } K .$$

Une telle μ s'appelle mesure d'équilibre de K.

Il est immédiat qu'on pourrait remplacer la condition $\check{G}$ - q. p par $\check{G}$ - à p. p. p. parce que l'ensemble exceptionnel est un K_σ et que tout K_σ de capacité intérieure nulle est aussi de capacité extérieure nulle.

Il est évident que la masse totale $\|\mu\|$ est $\leq$ G-cap K .

PROPOSITION 1. - <u>Si</u> G <u>satisfait au principe de l'équilibre pour</u> K , <u>on a</u> $\check{G}$-cap K $\leq$ G-cap K .

En effet soient μ la mesure d'équilibre, et K' l'ensemble des points où $G\mu = 1$; on a alors (voir l'inégalité rappelée en tête de ce travail)

$$\check{G}\text{-cap } K' \leq \|\mu\| \leq G\text{-cap } K .$$

Or K et K' ne diffèrent que par un ensemble de $\check{G}$-capacité 0 , d'où la relation.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> G <u>et</u> $\check{G}$ <u>satisfont à l'équilibre pour</u> K , <u>on a</u>

$$G\text{-cap } K = \check{G}\text{-cap } K$$

<u>et pour toute mesure d'équilibre</u> μ <u>sur</u> K <u>on a</u> $\|\mu\|$ = G-cap K .

On a donc aussi pour tout ensemble X égalité des G et $\check{G}$-capacités intérieure et extérieure, lorsqu'il y a équilibre pour tout compact, pour G et $\check{G}$.

THÉORÈME 4. - <u>Si maintenant en outre</u> E <u>est compact, et que tout ouvert de</u> E <u>est un</u> K_σ , <u>et si</u> G <u>et</u> $\check{G}$ <u>sont réguliers et satisfont au principe de l'équilibre pour tout compact, il existe pour tout</u> $X \subset E$ <u>une</u> μ <u>sur</u> $\overline{X}$ <u>telle que</u> $\|\mu\| = \text{cap}^* X$ <u>et</u> $G\mu = 1$, q. p. <u>sur</u> X , <u>et</u> $G\mu \leq 1$ <u>partout</u>.

<u>En outre la capacité satisfait à la propriété de croissance</u> :

$$\text{cap}^*(\cup X_n) = \lim \text{cap}^* X_n \quad \text{si} \quad X_n \nearrow$$

<u>et toute</u> ν <u>sur</u> $\overline{X}$ <u>telle que</u> $G\nu \geq 1$ q. p. <u>sur</u> X <u>vérifie</u> $\|\nu\| \geq \text{cap}^* X$.

DÉMONSTRATION. -

(a) Soient X ouvert et $X = \cup K_n$, K_n compact croissant avec cap $K_n \to$ cap X . Soit μ_n une mesure d'équilibre de K_n . Par extraction, on se ramène au cas où $\mu_n \to \mu$; et alors $\|\mu\|$ = cap X . Comme $G\mu_n \leq 1$ partout, idem pour $G\mu$. Puis comme $\lim G\mu_n = 1$, q. p. sur X on a (théorème de convergence)

$$G\mu = 1 \text{ , q. p. sur } X$$

(b) Soit ω_n une suite décroissante d'ouverts contenant un ensemble X donné, avec $\text{cap}^* X = \lim \text{cap } \omega_n$, et tels que $\overline{X} = \overline{\bigcap \overline{\omega}_n}$.

Soit μ_n une mesure d'équilibre de ω_n (portée par $\overline{\omega}_n$) ; par extraction $\mu_n \to \mu$. On a $G\mu \leq 1$ et $G\mu = 1$, q. p. sur X , puisque $G\mu_n = 1$ q. p. sur X (théorèmes de convergence).

(c) Soit ν sur X avec $G\nu \geq 1$, q. p. sur X . Soit X' l'ensemble des x où $G\nu(x) \geq 1$. On sait que $\check{G}\text{-cap } X' \leq \|\nu\|$; or $X' \supset X$, à un q. p. près, donc

$$G^*\text{-cap } X = \check{G}^*\text{-cap } X \leq \check{G}\text{-cap } X' \leq \|\nu\| \quad .$$

(d) Soit (X_n) croissante, et soit μ_n une mesure d'équilibre de X_n . Par extraction $\mu_n \to \mu$; et $G\mu_n = 1$, q. p. sur X_n , d'où grâce au théorème de convergence, la propriété de base de la cap^*. Cet énoncé étend un énoncé analogue de Kishi qui supposait en outre G symétrique, partout continu, fini hors de Δ , et E-métrisable.

Application de la notion d'encombrement.

Dans notre travail sur le diamètre transfini (exposé n° 4), nous avons défini une notion générale d'encombrement ; nous allons en étudier ici un cas particulier.

DÉFINITION. - Soit G un noyau sur E compact (cette restriction évitera certaines complications d'énoncé). Pour tout $X \subset E$, on posera $f(X) = \inf \|\mu\|$ pour toutes les $\mu \geq 0$ sur E telles que l'on ait $G\mu \geq 1$, $\check{G}$ - q. p. sur X .

Propriétés de f (encombrement).

On suppose G fini continu hors de Δ , G et $\check{G}$ réguliers.

1° Croissance et sous-additivité dénombrable.

2° Pour tout X , il existe μ avec $\|\mu\| = f(X)$ et $G\mu \geq 1$, $\check{G}$ - q. p. sur X (conséquence du théorème 1).

3° $(\check{G}\text{-cap}^* X = 0) \iff (f(X) = 0)$. Le $\Longrightarrow$ résulte de la définition, le $\Longleftarrow$ résulte de 3°.

4° Si (X_n) est croissante, $f(\bigcup X_n) = \lim f(X_n)$

5° (f continue à droite pour tout compact) $\Longleftrightarrow$ (f continue à droite pour tout compact de $\check{G}$-cap nulle) $\Longleftrightarrow$ (Pour tout compact K de $\check{G}$-cap nulle, il existe μ sur E avec $G\mu = \infty$ sur K).

6° Pour tout X et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert ω tel que $X \subset \omega$ à l'exception d'un ensemble de $\check{G}$-cap^* nulle et tel que $\text{cap}^*\,\omega \leq \text{cap}^*\,X + \varepsilon$. Dire que l'inclusion peut être stricte équivaut à la condition 5°.

7° On a $\check{G}$-cap $\leq f$; car soit $\mu \geq 0$ avec $\mu(E) = f(X)$ à ε près et $G\mu \geq 1$, $\check{G}$ - q. p. sur X. L'ensemble Y des x où $G\mu \geq 1$ est de $\check{G}$-$\text{cap}^* < \mu(E) = f(X)$; or $X \subset Y$, à un ensemble près de $\check{G}$-cap^* nulle ; d'où la relation (en fait ceci serait vrai en supposant seulement G semi-continu inférieurement).

COROLLAIRE (de 4° et 5°). - Même hypothèse sur G ; de plus on suppose que pour tout K de $\check{G}$-cap nulle, il existe une μ telle que $G\mu = \infty$ sur K.

Alors tout ensemble K-analytique est f-capacitable.

CONSÉQUENCES. - Sous les hypothèses faites, on sait que

$$(G\text{-cap } K = 0) \Longleftrightarrow (\check{G}\text{-cap } K) = 0 \,, \quad \text{donc} \quad (G\text{-cap}_* X = 0) \Longleftrightarrow (\check{G}\text{-cap}_* X = 0) .$$

Soit alors X un ensemble K-analytique.

$$(\check{G}\text{-cap}_* X = 0) \implies (f_*(X) = 0) \implies (f(X) = 0) \implies (\check{G}\text{-cap}^* X = 0) .$$

Donc $(G\text{-cap}_* X = 0) \implies (G\text{-cap}^* X = 0)$ si G est très-régulier au sens de [1]. On peut donc énoncer :

COROLLAIRE. - Soit $G \geq 0$, s. c. i., symétrique et régulier, fini continu hors de Δ, et $+\infty$ sur Δ (ce qui entraîne d'ailleurs E métrisable. Alors tout K-analytique X est f-capacitable, et en outre

$$(G\text{-cap}_* X = 0) \implies (G\text{-cap}^* X = 0) \quad .$$

Si, de plus on a G-cap $K = f(K)$ pour tout compact (ou même seulement pour une famille de compacts dont les intersections décroissantes constituent tous les compacts de E), on a

$$G\text{-cap}^* X = f(X) \qquad \text{pour tout } X .$$

La théorie se simplifie un peu lorsque dans E, tout ouvert non vide a une G-capacité non nulle ; c'est le cas des noyaux classiques.

BIBLIOGRAPHIE.

Depuis cette conférence, certains des résultats ont été retrouvés indépendamment et publiés par Masanori KISHI [3], [4].

[1] CHOQUET (Gustave). - Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, Séminaire Brelot : Théorie du Potentiel, t. 1, 1957, n° 1, 10 p.

[2] BRELOT (M.) et CHOQUET (G.). - Le théorème de convergence en théorie du potentiel, J. Madras Univ., t. 27, 1957, p. 277-286.

[3] KISHI (Masanori). - Capacitability of analytic sets, Nagoya math. J., t. 16, 1960, p. 91-109.

[4] KISHI (Masanori). - A continuity theorem in the potentiel theory, Proc. Japan Acad., t. 36, 1960, p. 65-67.

(Manuscrit reçu en octobre 1960)