Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Jacques Deny

Sur les espaces de Dirichlet

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 1 (1957), exp. nº 5, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1957__1__A5_0>

SUR LES ESPACES DE DIRICHLET (1)

par Jacques DENY

1. Contraction normale d'une fonction.

Soient u et v deux fonctions à valeurs complexes, définies sur le même ensemble X. On dit que v est une contraction normale de u si on a

$$|v(x)| \leqslant |u(x)| \quad \text{pour tout} \quad x \in X$$

$$|v(x) - v(y)| \leqslant |u(x) - u(y)| \quad \text{pour tout couple} \quad x, y \in X .$$

Par exemple $|u|$, $\bar{u}$, $\mathcal{R}u$ (partie réelle de u) sont des contractions normales de u ; de même u^+ et u^-, si u est à valeurs réelles.

Plus généralement si T est une contraction "normale" du plan complexe C, c'est-à-dire une application de C dans lui-même qui conserve l'origine et n'augmente pas les distances ($|T\zeta' - T\zeta''| \leqslant |\zeta' - \zeta''|$ pour tout couple $\zeta', \zeta'' \in C$), $v = Tu$ est une contraction normale de u. On peut d'ailleurs montrer inversement que si v est une contraction normale de u, il existe au moins une contraction normale T de C telle que $v = Tu$.

L'application "projection sur un fermé convexe e de C contenant l'origine" est une contraction normale de C. Le cas où e est le segment unité $0 \leqslant \mathcal{R}\zeta \leqslant 1$ de l'axe réel jouera un rôle particulièrement important. De même le cas où e est un disque fermé de centre 0.

---

(1) Les idées qui sont développées dans cet exposé sont, en majeure partie, dues à A. BEURLING. Un premier travail BEURLING-DENY vient de paraître (Acta Math., t. 99, 1958, p. 203-224). Il est consacré au "cas élémentaire" (l'espace X n'ayant qu'un nombre fini de points ; les méthodes utilisées dans ce cas très particulier peuvent d'ailleurs être adaptées le plus souvent au cas général). La théorie générale des espaces de Dirichlet a été exposée par A. BEURLING et J. DENY dans un Séminaire à l'Institute for advanced Study (Princeton, octobre-décembre 1957), et résumée par A. BEURLING au Symposium sur les algèbres de Banach et l'analyse harmonique (Stanford, avril 1958). Le présent exposé reproduit, à quelques détails près, deux conférences faites au Séminaire de Théorie du potentiel (Paris, mars-avril 1957). Il comprend deux parties : les éléments de la théorie du potentiel dans un espace de Dirichlet général, et la représentation des espaces de Dirichlet "spéciaux". Parmi les questions importantes non abordées ici, signalons la représentation des espaces de Dirichlet généraux, le théorème de synthèse spectrale, l'étude des "algèbres de Dirichlet", etc.

2. Définition générale des espaces de Dirichlet.

Soit X un espace localement compact. On suppose qu'il existe une mesure de Radon positive ξ partout dense sur X. On appelle espace de Dirichlet relativement à X et ξ tout espace hilbertien complet $D = D(X, \xi)$ dont les éléments sont des (classes de) fonctions à valeurs complexes localement sommables pour ξ, les 3 axiomes suivant étant vérifiés :

a. $\|u_n\| \to 0$ entraîne $\int_K |u_n(x)|\, d\xi(x) \to 0$ pour tout compact $K \subset X$.

b. $\mathcal{C} \cap D$ est dense dans $\mathcal{C}$ et dans D.

c. Si u est dans D et si v est une contraction normale de u, alors $v \in D$ et $\|v\| \leq \|u\|$.

Dans cette définition $\mathcal{C}$ est l'espace des fonctions continues sur X, à valeurs complexes et à support compact. On désigne par $\|u\|$ la norme de l'élément $u \in D$. Deux fonctions égales localement presque partout (pour la mesure ξ) définissent le même élément $u \in D$. Une fonction v est une contraction de l'élément $u \in D$ si, dans la classe de fonctions définies par u, il en existe une dont v soit une contraction.

EXEMPLES.

1° $D = L^2(\xi)$.

2° X est l'intervalle borné $]\alpha, \beta[$ de R ; ξ est la mesure de Lebesgue. D est l'ensemble des fonctions absolument continues (2) nulles aux extrémités à dérivée de carré sommable la norme étant définie par

$$\|u\|^2 = \int |u'(x)|^2\, dx \ .$$

3° X est un domaine de R^n (quelconque si $n \geq 3$, de complémentaire non polaire si $n = 2$) ; ξ est la mesure de Lebesgue. On munit l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans X de la norme de Dirichlet classique, définie par

$$\|u\|^2 = \int |\operatorname{grad} u|^2\, dx \ .$$

L'espace obtenu par complétion est un espace de Dirichlet.

---

(2) D'une façon plus précise : dans chaque classe de fonctions définie par un élément de D, il existe une fonction absolument continue. Par la suite on se permettra fréquemment des abus de langage analogues.

Cet exemple est à l'origine de la terminologie utilisée. Contrairement à l'exemple 2 (espace de Dirichlet classique pour $n = 1$), les éléments ne sont pas tous définis par des fonctions continues. On peut remplacer le domaine euclidien X par un espace de Green au sens de Brelot-Choquet.

3. Conséquences immédiates de la définition.

Si u est dans D, $\bar{u}$ est dans D et a même norme.

Si u et v sont deux éléments réels de D, leur produit scalaire (u, v) est réel.

Si f est une fonction mesurable (pour ξ), bornée, à support compact, il existe un élément de D et un seul, soit u_f, tel que

(1) $$(u, u_f) = \int u \bar{f} \, d\xi \quad \text{pour tout } u \in D .$$

Cette dernière propriété est évidente d'après l'axiome a.

4. Potentiels.

Un élément $u \in D$ est appelé potentiel s'il existe une mesure de Radon μ sur X (dite associée à u), telle que

(2) $$(u, \varphi) = \int \bar{\varphi} \, d\mu \quad \text{pour toute } \varphi \in C \cap D .$$

Si une telle μ existe, elle est unique (d'après l'axiome b). Si μ est positive, on dit que u est un <u>potentiel pur</u>. La propriété (1) montre que les potentiels, et même les combinaisons linéaires de potentiels purs, sont denses dans D.

LEMME 1. - <u>Les potentiels purs sont positifs. Pour qu'un élément u de D soit un potentiel pur, il faut et il suffit qu'on ait :</u>

(3) $$\|u + v\| \geq \|u\| \quad \underline{\text{pour tout}} \quad v \in D \quad \underline{\text{avec}} \quad \mathcal{R} v \geq 0$$

<u>ou encore, ce qui est équivalent :</u>

(3') $$\mathcal{R}(u, v) \geq 0 \quad \underline{\text{pour tout}} \quad v \in D \quad \underline{\text{avec}} \quad \mathcal{R} v \geq 0 .$$

DÉMONSTRATION. - Tout $u \in D$ satisfaisant à (3) est réel ≥ 0 ; en effet l'ensemble $\mathcal{U} = \{w \in D \, ; \, \mathcal{R}(w - u) \geq 0\}$ est convexe, fermé, non vide, et son élément (unique) de norme minimum est u (par définition) ; comme $|u|$ est dans $\mathcal{U}$ et a une norme au plus égale à celle de u (axiome c), on a $u = |u|$, d'où le résultat.

Tout potentiel pur satisfait à (3) pour $v \in C \cap D$ avec $\mathcal{R} v \geq 0$ (évident d'après (2)), d'où, par un passage à la limite facile, pour toute $v \in D$ avec

$\mathcal{R}\, v \geqslant 0$ (à ce propos il peut être intéressant de dégager le lemme suivant, que nous énonçons sans en donner la démonstration, qui est simple : $\mathcal{C} \cap D^+$ est dense dans D^+, ensemble des éléments positifs de D).

Les propriétés (3) et (3') sont évidemment équivalentes. Il reste donc à montrer que tout $u \in D$ satisfaisant à (3') est un potentiel pur. Or, pour un tel u, le produit scalaire (u, v) est une forme semi-linéaire positive sur $\mathcal{C} \cap D$ qui, d'après l'axiome b, peut être prolongée à $\mathcal{C}$ tout-entier, d'où l'existence d'une mesure positive μ satisfaisant à (2) ; le lemme 1 est donc établi.

Si D est l'espace de Dirichlet classique (exemple 3), les potentiels purs ne sont autres que les potentiels de Green d'énergie finie engendrés par des mesures $\geqslant 0$

$$u(x) = \int G(x, y)\, d\mu(y)$$

où le noyau G est la fonction de Green de X (à un facteur positif près).

Les deux théorèmes suivants peuvent être considérés comme les résultats fondamentaux de la théorie du potentiel dans les espaces de Dirichlet. On notera qu'ils sont énoncés sans jamais faire appel explicitement au noyau sous-jacent (qui, dans le cas général, est une mesure positive sur l'espace produit $X \times X$).

THÉORÈME 1. (théorème des condensateurs). - <u>Soient</u> ω_0 <u>et</u> ω_1 <u>deux ouverts de</u> X, <u>d'adhérences disjointes</u>, ω_1 <u>étant relativement compact</u>. <u>Il existe un potentiel réel</u> u, <u>de mesure associée</u> μ, <u>tel que</u>

i. $0 \leq u(x) \leq 1$ <u>presque partout</u>.

ii. $u(x) = 0$ <u>presque partout sur</u> ω_0, $u(x) = 1$ <u>presque partout sur</u> ω_1

iii. μ^+ <u>est portée par</u> $\bar{\omega}_1$, μ^- <u>est portée par</u> $\bar{\omega}_0$.

DÉMONSTRATION. - L'ensemble

$$E = \{f \in D\ ;\ \mathcal{R} f \geqslant 1 \text{ presque partout sur } \omega_1,\ \mathcal{R} f \leq 0 \text{ presque partout sur } \omega_0\}$$

est convexe, fermé, (d'après l'axiome a) non vide (d'après l'axiome b). Soit u l'unique élément de E dont la norme soit minimum ; soit T la contraction normale du plan complexe, qui est la projection sur le segment unité $0 \leq \mathcal{R}\, \xi \leq 1$ de l'axe réel. On a $Tu \in E$ et $\|Tu\| \leq \|u\|$ (axiome c), d'où $u = Tu$ (d'après l'unicité) et par conséquent u est réel, $0 \leq u \leq 1$ presque partout. Donc u satisfait à i. et ii.

Pour établir iii. considérons les sous-ensembles de $\mathcal{C} \cap D$

$V = \{v \in \mathcal{C} \cap D$; v réelle à support dans $\complement \bar{\omega}_0$, $v \geqslant 0$ sur $\omega_1\}$

$W = \{w \in \mathcal{C} \cap D$; w réelle à support dans $\complement \bar{\omega}_1$, $w \geqslant 0$ sur $\omega_0\}$

Comme $u + hv \in E$ pour tout nombre réel $h \geqslant 0$ et tout élément $v \in V$, on a $\|u + hv\| \geqslant u$, d'où $(u , v) \geqslant 0$; il existe donc une mesure de Radon σ positive portée par $\bar{\omega}_1$, avec

$$(u , v) = \int v \, d\sigma \quad \text{pour tout } v \in V .$$

De même il existe une mesure $\tau \geqslant 0$ portée par $\bar{\omega}_0$ avec

$$(u , w) = - \int w \, d\tau \text{ pour tout } w \in W .$$

Soit alors $\varphi \in \mathcal{C} \cap D$, réelle ; soient v' et $v'' \in V$, $v' \leq \varphi \leq v''$ sur ω_1 ; soient w' et $w'' \in W$, $w' \leq \varphi \leq w''$ sur ω_0 . On a

$$(u , v'' + w' - \varphi) \geqslant 0 \text{ , car } u + h(v'' + w' - \varphi) \in E \text{ pour tout } h \geqslant 0$$

$$(u , \varphi - v' - w'') \geqslant 0 \text{ , car } u + h(\varphi - v' - w'') \in E \text{ pour tout } h \geqslant 0 .$$

Il en résulte

$$(v' + w'' , u) \leq (u , \varphi) \leq (v'' + w' , u)$$

$$\int v' d\sigma - \int w'' \, d\tau \leq (u , \varphi) \leq \int v'' \, d\sigma - \int w' \, d\tau$$

d'où la relation à établir

$$(u , \varphi) = \int \varphi d\sigma - \int \varphi d\tau$$

en faisant converger uniformément v' et v'' vers φ sur ω_1 , w' et w'' vers φ sur ω_0 (les supports restant portés par un compact fixe).

Une étude plus appronfondie montrerait qu'on a $\int d\tau \leq \int d\sigma$ (on le vérifiera dans le cas des espaces de Dirichlet spéciaux). Noter que si ω_0 est vide, le théorème 1 se réduit au <u>théorème d'équilibre</u>. L'élément u de norme minimum satisfaisant aux conditions de l'énoncé est le potentiel d'équilibre de ω_1 ; la mesure associée est positive ; sa masse totale, égale au carré de la norme de u , est la capacité de ω_1 .

Avant d'énoncer le théorème du balayage, nous allons dégager un lemme important par lui-même :

LEMME 2. (théorème de l'enveloppe inférieure). - <u>L'enveloppe inférieure de deux potentiels purs est un potentiel pur.</u>

Soient en effet u et v deux potentiels purs ; l'ensemble

$$E = \{ w \in D \ ; \ \mathcal{R} w \geqslant \inf(u\ ,\ v) \}$$

est convexe, fermé, non vide. Son élément (unique) f de norme minima est un potentiel pur d'après le lemme 1, car pour toute $g \in D$ avec $\mathcal{R} g \geqslant 0$ on a $f + g \in E$ d'où $\|f + g\| \geqslant \|f\|$.

L'élément $\inf(u\ ,\ f) = \frac{u+f}{2} - \frac{|u-f|}{2}$ est dans E ; or on a, d'après le lemme 1 et l'axiome c :

$$\begin{aligned} 4\,\|\inf(u\ ,\ f)\|^2 &= \|u+f\|^2 + \|\,|u-f|\,\|^2 - 2(u+f, |u-f|) \\ &= \|u+f\|^2 + \|\,|u-f|\,\|^2 - 2(u+f, u-f) - 2(u+f, |u-f| - u+f) \\ &\leq \|u+f\|^2 + \|u-f\|^2 - 2(u+f, u-f) = 4\,\|f\|^2 . \end{aligned}$$

On a donc $\|\inf(u\ ,\ f)\| \leq \|f\|$ d'où (définition de f comme élément de norme minima) $\inf(u\ ,\ f) = f$. On a de même $\inf(v\ ,\ f) = f$, d'où $f \leq \inf(u\ ,\ v)$ et par suite $f = \inf(u\ ,\ v)$.

THÉORÈME 2 (théorème du balayage). - <u>Etant donné un potentiel pur</u> u <u>et un ouvert quelconque</u> ω <u>de</u> X, <u>il existe un autre potentiel pur</u> u' <u>satisfaisant aux condtions suivantes</u> :

i. <u>la mesure associée à</u> u' <u>est portée par</u> $\bar{\omega}$;

ii. $u'(x) \leq u(x)$ (presque partout) ;

iii. $u'(x) = u(x)$ (presque partout) dans ω.

En effet l'ensemble

$$E = \{ v \in D \ ; \ \mathcal{R} v(x) \geqslant u(x) \ \text{presque partout dans } \omega \}$$

est convexe, fermé et non vide ; soit u' l'élément (unique) de E dont la norme est minima. Pour tout $v \in D$ avec $\mathcal{R} v \geqslant 0$ sur ω on a $u' + v \in E$, donc $\|u' + v\| \geqslant \|u'\|$, ce qui montre que u' est un potentiel pur (lemme 1) et de plus que sa mesure associée est portée par $\bar{\omega}$. Donc u' vérifie i. Pour montrer que u' vérifie ii. et iii, il suffit de vérifier qu'on a $u'(x) \leq u(x)$ presque partout. Or si on pose $w = \inf(u\ ,\ u')$, cet élément est un potentiel pur (lemme 2) et on a, par application répétée de la relation (3) :

$$||u' - w||^2 = (u' , u' - w) - (w , u' - w) \leq (u' , u' - w) = ||u'||^2 - (u' , w)$$

$$= ||u'||^2 - (w , w) - (w , u' - w) \leq ||u'||^2 - ||w||^2$$

d'où $||w|| \leq ||u'||$ et par suite $w = u'$ (d'après la propriété minimale de u'). On a donc bien $u' \leq u$ (presque partout).

Il peut exister plusieurs éléments u' satisfaisant aux conditions du théorème 2. L'élément u' de norme minimum (considéré dans la démonstration précédente) est appelé potentiel <u>balayé</u> de u sur ω. On peut démontrer que la masse totale de la mesure associée à u' est inférieure ou égale à la masse totale de la mesure associée à u.

5. <u>Espaces de Dirichlet spéciaux</u>.

On appelle ainsi tout espace de Dirichlet $D(X , \xi)$ lorsque X est un groupe abélien localement compact, ξ est la mesure invariante sur X, et l'axiome suivant est vérifié (outre les axiomes a, b et c) :

d. <u>Si</u> u <u>est un élément de</u> D <u>et</u> x <u>un point de</u> X, <u>la translatée de</u> u <u>par</u> x <u>est un élément</u> $U_x u$ <u>de</u> D, <u>et l'application</u> $x \to U_x$ <u>est une représentation unitaire de</u> X <u>dans</u> $\mathcal{L}(D)$.

Autrement dit les opérateurs U_x sont unitaires, on a $U_{x-y} = U_x U_y^*$ pour tout couple $x , y \in X$, et U_x converge fortement vers l'identité lorsque x tend vers l'élément neutre de X.

Comme il est bien connu, l'axiome d. permet de définir des opérateurs de convolution sur D : si μ est une mesure de Radon sur X, de variation totale bornée, il existe un opérateur linéaire borné U sur D tel que, pour tout couple $u , v \in D$, on ait :

$$(U_\mu u , v) = \int (U_x u , v) \, d\mu(x) .$$

On a évidemment $||U_\mu|| \leq \int |d\mu|$ et $U_{\mu * \tilde{\nu}} = U_\mu U_\nu^*$.

Notons encore que $U_\mu u$ est représenté par le produit de composition ordinaire $u * \mu$.

Pour déterminer tous les espaces de Dirichlet spéciaux, nous allons rappeler la définition et les propriétés essentielles d'une classe remarquable de fonctions :

5. Fonctions définies négatives (3).

Une fonction λ à valeurs complexes, définie continue sur un groupe abélien localement compact G, est dite définie négative si, pour tout système de n points $x_i \in G$ $(n = 1, 2, \dots)$, la forme hermitienne

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [\lambda(x_i) + \overline{\lambda(x_j)} - \lambda(x_i - x_j)] \rho_i \bar{\rho}_j$$

est positive.

Les fonctions définies négatives admettent la symétrie hermitienne ($\lambda(-x) = \overline{\lambda(x)}$; celles qui sont à valeurs réelles sont donc symétriques). En particulier $\lambda(0)$ est réel $\geqslant 0$; on a d'ailleurs $\Re \lambda(x) \geqslant \lambda(0)$ pour tout $x \in G$. Si λ est définie négative, $\lambda - \lambda(0)$ est définie négative.

Si C est une constante positive et φ une fonction de type positif, la fonction

$$\lambda(x) = C + \varphi(0) - \varphi(x) \tag{4}$$

est définie négative. Inversement toute fonction définie négative est limite uniforme sur tout compact de fonctions λ_n de cette forme ; il suffit de prendre $\lambda_n(x) = C + \varphi_n(0) - \varphi_n(x)$, avec $C = \lambda(0)$ et $\varphi_n(x) = n \exp \frac{\lambda(0) - \lambda(x)}{n}$, et d'utiliser le résultat suivant : <u>pour qu'une fonction</u> λ <u>continue sur</u> G <u>soit définie négative, il faut et il suffit que</u> $\lambda(0)$ <u>soit réel</u> $\geqslant 0$ <u>et que</u> $\exp(-t\lambda)$ <u>soit de type positif pour tout nombre réel</u> $t \geqslant 0$. (4)

Voici deux conséquence simples du résultat précédent (on les démontre d'abord pour des fonctions de la forme (4), puis on passe à la limite) :

---

(3) Nous conservons cette terminologie de BEURLING, bien qu'elle ne soit pas très heureuse (une fonction "définie négative" n'est pas l'opposée d'une fonction de type positif). Ces fonctions semblent avoir été considérées pour la première fois par SCHOENBERG, dans ses recherches sur le plongement isométrique de certains espaces métriques dans un espace de Hilbert. BEURLING a mis en évidence un grand nombre de propriétés remarquables de ces fonctions.

(4) Ce lemme, capital dans l'étude des fonctions définies négatives, est une conséquence facile de cette remarque élémentaire : si $\sum\sum a_{ij} \rho_i \bar{\rho}_j$ est une forme hermitienne positive, il en est de même de la forme

$$\sum\sum \exp(t a_{ij}) \rho_i \bar{\rho}_j \quad \text{pour tout nombre } t \geqslant 0 .$$

Si λ est définie négative, il en est de même de λ^α, quel que soit α réel avec $0 \leq \alpha \leq 1$.

Si λ est définie négative, la fonction $1/\lambda$ est de type positif si elle est sommable sur tout compact.

Dans le cas du groupe R^n, la fonction $|x|^2$ est définie négative ; par suite $|x|^\alpha$ est définie négative pour tout α réel, $0 \leq \alpha \leq 2$. D'ailleurs l'expression générale des fonctions définies négatives sur R^n est :

$$\lambda(x) = C + i\, L(x) + Q(x) + \int \left[1 - e^{-ixy} - i \frac{x \cdot y}{1+|y|^2}\right] \frac{1+|y|^2}{|y|^2}\, d\sigma(y)$$

où C est une constante réelle ≥ 0, $L(x)$ une forme linéaire réelle par rapport aux coordonnées de x, $Q(x)$ une forme quadratique positive, enfin σ une mesure positive sur R^n, de masse totale finie, ne chargeant pas l'origine. Cette formule est bien connue dans la théorie des lois de probabilités indéfiniment divisibles.

THÉORÈME 3. - <u>Si</u> D <u>est un espace de Dirichlet spécial sur le groupe abélien</u> X, <u>il existe une fonction définie négative réelle sur le groupe dual</u> $\hat{X}$, <u>dont l'inverse</u> $1/\lambda$ <u>est sommable sur tout compact de</u> $\hat{X}$, <u>telle que, pour tout élément</u> $u \in C \cap D$, <u>on ait</u>

$$\|u\|^2 = \int |\hat{u}(\hat{x})|^2\, \lambda(\hat{x})\, d\hat{x}\,. \tag{5}$$

DÉMONSTRATION. - L'existence de λ va être déduite du théorème des condensateurs. Soit en effet α un voisinage ouvert relativement compact de 0 (origine de X). Prenons pour ouvert ω_1 ce voisinage α, pour ouvert ω_0 le complémentaire de l'adhérence du voisinage $\alpha + \alpha$; soit u_α le potentiel réel associé à ω_0 et ω_1 par le théorème 1, et $\mu_\alpha = \sigma_\alpha - \tau_\alpha$ sa mesure associée. Soit enfin u_β, de mesure associée $\mu_\beta = \sigma_\beta - \tau_\beta$ le potentiel correspondant à un second voisinage ouvert borné de β de 0. D'après les propriétés des opérateurs de convolution sur D, on a, pour toute fonction $f \in C$:

$$(u_\alpha * f\, ,\, u_\beta) = (u_\alpha\, ,\, u_\beta * \tilde{f})$$

d'où ($u_\alpha * f$ étant dans C) :

$$\int (u_\alpha * f)\, d\mu_\beta = \int (u_\beta * \check{f})\, d\mu_\alpha$$

(on a posé $\check{f}(x) = f(-x)$), et par suite

$$u_\alpha * \check{\mu}_\beta = \check{u}_\beta * \mu_\alpha \tag{6}$$

Faisons "tendre" β vers X ; la mesure τ_β , qui est portée par le complémentaire de $\beta+\beta$, converge vaguement vers 0 ; il résulte de (6) que la masse totale de μ_α est $\geqslant 0$, d'où $\int d\tau_\alpha \leqslant \int d\sigma_\alpha$ (résultat énoncé sans démonstration à la fin du théorème 1, dans un cas plus général).

Comme u_α est à support compact, et μ_α de masse totale finie, on peut transformer (6) par Fourier ; il vient

$$\hat{u}_\alpha \bar{\hat{\mu}}_\beta = \bar{\hat{u}}_\beta \hat{\mu}_\alpha$$

(égalité de deux fonctions continues sur $\hat{X}$). Posons

$$\lambda(\hat{x}) = \frac{\hat{\mu}_\alpha(\hat{x})}{\hat{u}_\alpha(\hat{x})} = \frac{\overline{\hat{\mu}_\beta(\hat{x})}}{\overline{\hat{u}_\beta(\hat{x})}} .$$

Cette fonction est définie pour tout $\hat{x}$, car, pour $\alpha \to 0$, $\hat{u}_\alpha/\hat{u}_\alpha(0)$ tend vers 1 uniformément sur tout compact de $\hat{X}$ (puisque u_α est $\geqslant 0$ non identiquement nulle, et son support tend vers 0). Elle est à valeurs réelles (faire $\alpha = \beta$), et elle est définie négative car on a, uniformément sur tout compact

$$\lambda(\hat{x}) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\hat{\sigma}_\alpha(0) - \hat{\tau}_\alpha(\hat{x})}{\hat{u}_\alpha(0)}$$

où $\hat{\tau}_\alpha$ est de type positif et $\hat{\tau}_\alpha(0) = \int d\tau_\alpha \leqslant \int d\sigma_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha(0)$.

Normalisons maintenant u_α en posant $v_\alpha = u_\alpha / \int u_\alpha\, dx$; soit $\nu_\alpha = \mu_\alpha / \int u_\alpha\, dx$ la mesure associée ; si $u \in \mathcal{C} \cap D$, on a

$$\|u * v_\alpha\|^2 = (u * v_\alpha , u * v_\alpha) = (v_\alpha * u * \tilde{u} , v_\alpha) = \int v_\alpha * u * \tilde{u}\, d\nu_\alpha$$
$$= \int \hat{v}_\alpha |\hat{u}|^2 \hat{\nu}_\alpha\, d\hat{x} = \int |\hat{u}|^2 |\hat{v}_\alpha|^2 \lambda\, d\hat{x} .$$

Lorsque α tend vers l'origine, la mesure de densité v_α converge vers la mesure de Dirac ; donc $u * v_\alpha$ converge fortement vers u dans D , et la fonction continue $\hat{v}_\alpha$, de module ≤ 1 , converge uniformément vers 1 sur tout compact de $\hat{X}$. A la limite on obtient la relation (5).

Il reste à prouver que $1/\lambda$ est sommable sur tout compact de $\hat{X}$. A cet effet on va d'abord montrer que l'application $u \to \hat{u}$, qui est une isométrie de $\mathcal{C} \cap D$ dans $L^2(\lambda)$, se prolonge en une isométrie de D <u>sur</u> $L^2(\lambda)$.

Soit $\hat{D}$ l'image de D par cette application. Tout revient à ~~prouver~~ que $\hat{D}$ contient $\hat{\mathcal{C}}$ (ensemble des fonctions continues à support compact sur $\hat{X}$), car $\hat{D}$ est fermé dans $L^2(\lambda)$ et $\hat{\mathcal{C}}$ est dense dans $L^2(\lambda)$. Pour cela il suffit de montrer que $\hat{D}$ contient toutes les fonctions $\hat{g}$ de la forme $\hat{\varphi} * \tilde{\hat{\varphi}}$, avec $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{C}}$ (les combinaisons linéaires de telles fonctions étant denses dans $\hat{\mathcal{C}}$, donc dans $L^2(\lambda)$). Une telle fonction $\hat{g}$ est la transformée de Fourier d'une fonction $g \geq 0$ sommable ($\int g\,dx = \int |\hat{\varphi}|^2\,d\hat{x}$). Donc (propriété des opérateurs de convolution), $f * g$ est un élément de D, d'où facilement $\hat{f}\hat{g} \in \hat{D}$. Il suffit alors de faire converger convenablement f vers la mesure de Dirac ; $\hat{f}$ converge vers 1 uniformément sur le support de $\hat{g}$, d'où $\hat{g} \in \hat{D}$.

Soit maintenant f une fonction mesurable bornée à support compact sur X. Soit u_f le potentiel dont la mesure associée a pour densité f, et soit $\hat{u}_f$ l'image de u_f dans l'isométrie de D sur $L^2(\lambda)$. Pour toute $\hat{\varphi} \in \hat{C}$ on a, d'après l'isométrie et la relation de Parseval :

$$\int \hat{u}_f\,\hat{\varphi}\,\lambda\,d\hat{x} = (u_f\,,\,\varphi) = \int f\,\bar{\varphi}\,dx = \int \hat{f}\,\bar{\hat{\varphi}}\,d\hat{x}$$

d'où $\hat{u}_f\lambda = \hat{f}$ presque partout.

On en déduit que l'ensemble des zéros de λ est de mesure nulle et qu'on a $\hat{u}_f = \hat{f}/\lambda$ presque partout. D'après l'isométrie on a donc :

$$\|u_f\|^2 = \int |\hat{u}_f|^2\,\lambda\,d\hat{x} = \int \frac{|\hat{f}|^2}{\lambda}\,d\hat{x}\ .$$

Cette dernière expression est finie, d'où la sommabilité de $1/\lambda$ sur tout compact, grâce à l'arbitraire sur f. Ceci achève la démonstration du théorème 3.

Remarquons encore que $1/\lambda$ étant de type positif, c'est la transformée de Fourier (en un sens convenable) d'une mesure positive K ; la formule $\hat{u}_f = \hat{f}/\lambda$ montre que le potentiel u_f est le produit de composition $K * f$; le carré de la norme de u_f est la trace de $K * f * \tilde{f}$; ces deux remarques font le lien avec la théorie classique du potentiel.

Avant d'énoncer la réciproque du théorème 3, nous allons faire une remarque préliminaire :

LEMME 3. - <u>Soit</u> λ <u>une fonction définie négative sur</u> $\hat{X}$; <u>soient</u> u <u>une fonction de carré sommable sur</u> $\hat{X}$, <u>et</u> v <u>une contraction normale de</u> u ; <u>on a</u>

$$\int |\hat{v}(\hat{x})|^2\,\lambda(\hat{x})\,d\hat{x} \leq \int |\hat{u}(\hat{x})|^2\,\lambda(\hat{x})\,d\hat{x}\ .$$

En effet posons $\lambda_n(\hat{x}) = \lambda(0) + \hat{\sigma}_n(0) - \hat{\sigma}_n(\hat{x})$, avec

$$\hat{\sigma}_n(\hat{x}) = n\,\exp\frac{\lambda(0) - \lambda(\hat{x})}{n}$$

La fonction de type positif $\hat{\sigma}_n$ est la transformée de Fourier d'une mesure positive symétrique σ_n de masse totale finie (théorème de Bochner). On a

$$\begin{aligned}\int |\hat{u}(\hat{x})|^2\,\lambda_n(\hat{x})\,d\hat{x} &= [\lambda(0) + \sigma_n(0)]\int |\hat{u}|^2\,d\hat{x} - \int |\hat{u}|^2\,\hat{\sigma}_n\,d\hat{x}\\ &= [\lambda(0) + \int d\sigma_n]\int |\hat{u}|^2\,d\hat{x} - \mathrm{Tr}(u * \tilde{u} * \sigma_n)\end{aligned}$$

d'où, par un calcul élémentaire

$$\int |\hat{u}|^2 \lambda_n \, d\hat{x} = \lambda(0) \int |u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \iint |u(x+y) - u(x)|^2 \, d\sigma_n(y) \, dx \ .$$

Tous les calculs effectués ont un sens, car λ_n est bornée et σ_n est de masse totale finie. On a donc, par définition des contractions normales :

$$\int |\hat{v}|^2 \ \lambda_n \, d\hat{x} \leq \int |\hat{u}|^2 \ \lambda_n \, d\hat{x} \ ,$$

d'où le résultat, car λ_n tend en croissant vers λ lorsque n augmente indéfiniment.

RÉCIPROQUE du théorème 3. - Soit λ une fonction définie négative réelle sur $\hat{X}$, dont l'inverse $1/\lambda$ est sommable sur tout compact. Il existe un espace de Dirichlet spécial D_λ sur X (et un seul) tel qu'on ait

$$\|u\|^2 = \int |\hat{u}(\hat{x})|^2 \ \lambda(\hat{x}) \, d\hat{x}$$

pour tout $u \in \mathcal{C} \cap D$.

DÉMONSTRATION sommaire. - On commence par montrer qu'à toute fonction $\hat{u} \in L^2(\lambda)$ on peut associer une fonction (unique à une équivalence près) u sur X telle que

$$\int u \bar{\varphi} \, dx = \int \hat{u} \, \bar{\hat{\varphi}} \, d\hat{x} \quad \text{pour} \quad \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{C}} \ .$$

En effet si $\hat{u} \in \hat{\mathcal{C}}$ il suffit de prendre pour u la fonction continue dont $\hat{u}$ est la transformée de Fourier (au sens de L^2, par exemple). Sinon prendre une suite de fonctions $\hat{u}_n \in \hat{\mathcal{C}}$ convergeant vers $\hat{u}$ dans $L^2(\lambda)$. D'après Parseval on a, pour toute $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}$:

$$\int |u_m - u_n| \ \bar{\varphi} \, dx = \int \hat{v} \ \bar{\hat{\varphi}} \, d\hat{x} \quad \text{avec} \quad v = |u_m - u_n|$$

$$\left| \int |u_m - u_n| \ \bar{\varphi} \, dx \right| = \left| \int \hat{v}\sqrt{\lambda} \, \frac{\bar{\hat{\varphi}}}{\sqrt{\lambda}} \, d\hat{x} \right| \leq \left(\int |\hat{v}|^2 \lambda \, d\hat{x} \right)^{1/2} \left(\int \frac{|\hat{\varphi}|^2}{\lambda} \, d\hat{x} \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int |\hat{u}_m - \hat{u}_n|^2 \lambda \, d\hat{x} \right)^{1/2} \left(\int \frac{|\hat{\varphi}|^2}{\lambda} \, d\hat{x} \right)^{1/2}$$

d'après le lemme 3 (car v est une contraction normale de $u_m - u_n$) . Il en résulte que, pour tout compact K de X , u_n converge dans $L^1(K)$ vers une fonction u répondant à la question.

On appellera D_λ l'ensemble de ces fonctions u . Muni de la norme

$$\|u\| = \left(\int |\hat{u}|^2 \lambda \, d\hat{x} \right)^{1/2}$$

D_λ est isométrique à $L^2(\lambda)$. Il s'agit de vérifier que D_λ est un espace de Dirichlet spécial.

Les inégalités écrites au cours de la démonstration précédente montrent que si u tend vers 0 dans D_λ, alors u tend vers 0 dans $L^1(K)$ pour tout compact K de X (il suffit de choisir convenablement la fonction φ). L'axiome a est donc vérifié.

L'axiome d est évidemment vérifié.

Montrons que l'axiome c est vérifié. Soit $u \in D_\lambda$, et soit T une contraction normale du plan complexe. Si u est dans $L^2 \cap D_\lambda$ on a, d'après le lemme 3, $Tu \in D_\lambda$ et $\|Tu\| \leq \|u\|$ (pour appliquer le lemme 3, observer que dans ce cas $\hat{u}$ est la transformée de Fourier-Plancherel de u). Sinon prenons une suite de fonctions $u_n \in L^2 \cap D_\lambda$ convergeant fortement vers u ; tout revient à montrer que Tu_n converge faiblement vers Tu (car alors $\|Tu\| \leq \underline{\lim} \|Tu_n\| \leq \lim \|u_n\| = \|u\|$) Or, étant donnée f bornée mesurable à support compact sur X, on a $\|Tu_n\| \leq \|u_n\|$ et

$$(Tu_n , u_f) = \int Tu_n \overline{f} \, dx \to \int Tu \overline{f} \, dx$$

d'après la relation

$$\left| \int (Tu - Tu_n) \overline{f} \, dx \right| \leq \int |u - u_n| \; |f| \, dx \to 0 ,$$

d'où facilement la convergence faible (rappelons que l'existence des "potentiels" u_f est une conséquence du seul axiome a, et que ces éléments u_f sont denses dans D_λ).

Il reste à montrer que l'axiome b est vérifié. A cet effet on utilisera la contraction normale T_ε du plan complexe qui consiste à projeter sur le disque fermé $|\zeta| \leq \varepsilon$.

La première partie de l'axiome b se déduira du résultat suivant : quel que soit le voisinage V de l'origine de X, il existe une fonction $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{C}}$, positive et de type positif, telle que la fonction continue φ (qui est aussi positive et de type positif) satisfasse à $\varphi(x) < \varphi(0)$ hors de V. Si donc on appelle α la borne supérieure de $\varphi(x)$ pour x hors de V, on voit que la fonction continue $\varphi - T_\alpha \varphi$, qui est dans D_λ, est nulle hors de V ; dans V elle est ≥ 0, mais non identiquement nulle ; les combinaisons linéaires de ces diverses fonctions (correspondant à tous les voisinages compacts V) et de leurs translatées sont, comme il est bien connu, denses dans $\mathcal{C}$.

Les fonctions u dont la transformée de Fourier est dans $\hat{\mathcal{C}}$ sont continues et tendent vers 0 à l'infini. Par définition elles sont denses dans D_λ. Pour montrer que $\mathcal{C} \cap D_\lambda$ est dense dans D_λ il suffit donc de vérifier que si u est un élément de D_λ, $\|T_\varepsilon u\|$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 (car alors $u - T_\varepsilon u$, qui est dans $\mathcal{C} \cap D_\lambda$ pour tout $\varepsilon > 0$, tendra vers u fortement). Or $T_\varepsilon u$ tend faiblement vers 0 ($\|T_\varepsilon u\| \leq \|u\|$ et $(T_\varepsilon u, u_f) = \int T_\varepsilon u \bar{f}\, dx \longrightarrow 0$ pour tout u_f) ; donc un barycentre convenable v_n des $T_{\frac{1}{k}} u$ $(0 \leq k \leq n)$ tend fortement vers 0. Par conséquent $T_{\frac{1}{n}} u = T_{\frac{1}{n}} v_n$ tend fortement vers 0, ce qui achève la démonstration.

6. Cas du groupe R^n.

Certaines démonstrations se simplifient un peu, surtout en ce qui concerne la réciproque du théorème 3. D'autre part la représentation explicite des fonctions définies négatives permet de donner une expression de la norme ne faisant pas intervenir la transformation de Fourier : tout espace de Dirichlet spécial sur R^n contient les fonctions continuement dérivables à support compact, et on a, pour une telle fonction :

$$\|u\|^2 = C\int |u|^2\, dx + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\int \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\overline{\frac{\partial u}{\partial x_j}}\, dx + \frac{1}{2}\iint |u(x+y) - u(x)|^2\, d\sigma(y)\, dx$$

où C est une constante positive, les a_{ij} sont les coefficients d'une forme quadratique positive, et σ est une mesure positive dans $R^n - \{0\}$, symétrique, de masse totale finie hors tout voisinage de 0, telle enfin que

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^2\, d\sigma(x) < \infty .$$

Mais si on se donne arbitrairement C, Q et σ, on ne définit pas toujours un véritable espace de Dirichlet ; il faut encore ajouter une condition traduisant le fait que $1/\lambda$ doit être sommable sur tout compact, λ étant la fonction définie négative réelle associée à C, Q et σ. Une condition suffisante très simple est $C > 0$.

Pour $C = 0$, $\sigma = 0$, $a_{ij} = \delta_{ij}$, on retrouve la norme de Dirichlet classique ; on a alors $\lambda(x) = |x|^2$. Plus généralement, pour $\lambda(x) = |x|^\alpha$, avec $0 < \alpha \leq 2$ et $n > 2$, l'espace D_λ n'est autre que l'espace des potentiels généralisés d'énergie finie par rapport au noyau $|x|^{\alpha - n}$ (pour $n = 1$ ou 2, il faut supposer $0 < \alpha < n$, pour que $1/\lambda$ soit sommable sur tout compact).