SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

GUSTAVE CHOQUET

Sur les fondements de la théorie fine du potentiel

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 1 (1957), exp. n° 1, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1957__1__A1_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de
THÉORIE DU POTENTIEL
Année 1957
-:-:-:-

4 et 11 février 1957

SUR LES FONDEMENTS DE LA THÉORIE FINE DU POTENTIEL

par Gustave CHOQUET

INTRODUCTION. - Dans la théorie classique du potentiel, les noyaux et les potentiels sont des fonctions ; il est parfois commode d'associer à un tel potentiel-fonction une mesure définie comme produit d'une mesure fixe (par exemple la mesure de Lebesgue dans R^n) par cette fonction ; on est ainsi conduit à l'étude d'une théorie du potentiel dans laquelle noyaux et potentiels sont des mesures ; l'utilisation de la topologie faible sur l'ensemble des mesures apporte alors de grandes simplifications. Mais la question se pose de traduire les résultats obtenus dans cette théorie assouplie, en termes de potentiel-fonction ; si on peut le faire on aura la possibilité de développer la théorie du potentiel de la façon suivante :

1° Etudier d'abord l'aspect potentiel-mesure.

2° Au moyen de quelques théorèmes-clefs, traduire les résultats obtenus, en termes de théorie fine (potentiels-fonctions).

Nous donnerons ici les théorèmes-clefs qui permettent cette traduction ; nos énoncés souligneront l'importance des noyaux réguliers et des potentiels continus.

1. Rappel de définitions et propriétés simples.

Les mesures μ dont il s'agira seront des mesures de Radon positives, sauf mention du contraire, et tous les espaces E envisagés seront localement compacts.

DÉFINITION 1. - Un noyau G dans un espace E est une application semi-continue inférieurement de $E \times E$ dans $\overline{R}_+$ ($[0 , + \infty]$). Son adjoint est $\check{G}$, défini par

$$\check{G}(x , y) = G(y , x)$$

Le cône convexe des mesures de Radon $\geqslant 0$ sur E , muni de la topologie faible, est désigné par $\mathfrak{M}_+$; pour $\mu \in \mathfrak{M}_+$, $S\mu$ désigne le support fermé de μ .

Le G-potentiel de μ est la fonction $G\mu$ définie par

$$G\mu(x) = \int G(x , y)\, d\mu(y)$$

On montre que l'application $(\mu , x) \to G\mu(x)$ de $\mathfrak{M}_+ \times E$ dans $\overline{R}_+$ est semi-continu inférieurement. En particulier, pour toute suite convergente $\mu_n \to \mu$, on a :

$$\liminf G\mu_n(x) \geqslant G\mu(x) \qquad \text{pour tout } x .$$

DÉFINITION 2. - On dit que G est régulier si, pour toute mesure $\mu \in \mathfrak{M}_+$, de support compact, le fait que la restriction de $G\mu$ à $S\mu$ soit finie et continue, entraîne que $G\mu$ soit fini et continu dans E (Voir [1]).

On dit que G est très régulier si

a. G et $\check{G}$ sont réguliers

b. G est fini et continu hors de la diagonale Δ de $E \times E$

c. Pour tout $x \in \mathcal{O}_\infty \cup \check{\mathcal{O}}_\infty$ ([1]) ou bien on a $G(x , x) = +\infty$, ou bien x a une base dénombrable de voisinages.

LEMME 1. - Soit G un noyau régulier, et soit μ une mesure positive de support compact, telle que $G\mu$ soit fini en tout point de $S\mu$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mu' \leqslant \mu$ telle que $\mu(E) - \mu'(E) \leq \varepsilon$, et telle que $G\mu'$ soit continu dans E.

En effet, comme $G\mu$ est mesurable, il existe un ouvert $\omega \subset E$ tel que $\mu(\omega) \leqslant \varepsilon$, et que la restriction de $G\mu$ à $\complement\omega$ soit continue.

Posons μ' = restriction de μ à $\complement\omega$; et $\mu'' = \mu - \mu'$.

On a $G\mu = G\mu' + G\mu''$; sur $\complement\omega$, $G\mu'$ et $G\mu''$ sont semi-continus inférieurement et leur somme est continue. Donc $G\mu'$ et $G\mu''$ sont aussi continus ; et comme G est régulier, $G\mu'$ est continu dans tout l'espace.

COROLLAIRE. - Si G est régulier, si μ est portée par un ensemble A compact ou réunion dénombrable de compacts, et si $G\mu$ est fini en tant point de A, il existe une suite croissante $\mu_n \to \mu$ telle que $G\mu_n$ soit fini et continu

---

([1]) $\mathcal{O}_\infty$ désigne l'ensemble des points x au voisinage desquels G ne satisfait au principe du maximum λ-dilaté pour aucun λ. Et $\check{\mathcal{O}}_\infty$ est l'ensemble analogue pour $\check{G}$ (voir [1]).

dans E ; $G\mu$ est alors évidemment la limite de la suite croissante $G\mu_n$.

2. Notion de capacité. Applications.

Nous supposerons désormais, pour simplifier les énoncés, que l'espace E est compact ; le cas de E non compact s'en déduira en général par une localisation facile.

DÉFINITION 3. - Pour tout noyau G et pour tout compact $K \subset E$ la G-capacité de K est la borne supérieure de $\mu(K)$ pour toutes les mesures positives μ telle que :

$$S\mu \subset K \quad \text{et} \quad G\mu \leq 1 \quad \text{partout dans} \quad E .$$

Il résulte de la définition que pour toute mesure μ portée par K , on a :

$$G\text{-cap}\, K \geq \mu(E)/\|G\mu\| \quad , \quad \text{où} \quad \|G\mu\| = \sup \text{ de } \; G\mu(x) \; \text{ sur } \; E .$$

Si G-cap $K < \infty$, il existe alors une telle μ_0 qui réalise ce maximum ; l'ensemble de ces distributions capacitaires μ_0 est convexe et compact.

La G-capacité est une fonction croissante, continue à droite et sous-additive ; plus généralement on a même

$$G\text{-cap}^*\Big(\bigcup_1^\infty A_n\Big) \leq \sum_1^\infty G\text{-cap}^*(A_n)$$

On définit de manière classique les G-capacités intérieure et extérieure, $G\text{-cap}_* X$ et $G\text{-cap}^* X$, pour tout ensemble X .

On dit qu'une propriété a lieu G-quasi-partout (G.q.p.) si elle a lieu en tout point de E sauf aux points d'un ensemble de G-capacité extérieure 0 .

On montre que, lorsque G est régulier, il y a équivalence entre les énoncés :

A : $G(x , x) = + \infty$ pour tout $x \in E$.

B : La G-capacité est dichotomique.

(Une fonction croissante $f(K) \geq 0$ du compact K de E est dite dichotomique si pour tout K et toute constante $\varepsilon > 0$, il existe deux sous-compacts K_1 , K_2 de K tels que $f(K_1)$ et $f(K_2)$ soient $\geq f(K) - \varepsilon$) .

Nous n'aurons d'ailleurs pas à utiliser cette propriété dans ce qui suit.

Grandes valeurs d'un potentiel. - Notons que pour toute $\mu \in \mathfrak{M}_+$, l'ensemble des x tels que $G\mu(x) > h$ est un ouvert ω tel que

$$(1) \qquad \check{G}\text{-cap}\,\omega \leq \mu(E)/h$$

En effet, soit K un compact de ω , et soit ν une $\check{G}$-distribution capacitaire de K . On a évidemment :

$$h.\check{G}\text{-cap } K \leq \int G\mu(x)\, d\nu = \int \check{G}\nu(x)\, d\mu \leq \int d\mu = \mu(E) \quad .$$

Comme $\check{G}$-cap K peut être pris arbitrairement voisin de $\check{G}$-cap ω , la relation est établie.

En particulier, l'ensemble $I(\mu)$ des x tels que $G\mu(x) = +\infty$ est un G_δ de $\check{G}$-capacité extérieure nulle ; autrement dit $G\mu(x)$ est fini $\check{G}$-quasi-partout.

Nous allons déduire de la relation (1) un important théorème. Etablissons d'abord un lemme.

LEMME 2. - Soit G régulier et fini continu hors de Δ . Pour toute $\mu \geq 0$, tout $\varepsilon \geq 0$ et tout $\eta \geq 0$, il existe un ouvert $\omega \subset E$ tel que $\check{G}$-cap$\,\omega < \varepsilon$, et deux mesures ν et π telles que :

a. $\mu = \nu + \pi$; $\pi(E) \leq \varepsilon$.

b. La restriction de $G\nu$ à $\complement\omega$ est continue et $\leq \mu(E)/\varepsilon$.

Posons $\omega =$ ensemble des x tels que $G\mu(x) > \mu(E)/\varepsilon$; on a bien alors (relation 1) $\check{G}$-cap $\omega \leq \varepsilon$.

Soient μ_ω et $\mu_{\complement\omega}$ les traces de μ sur ω et $\complement\omega$.

Il existe un compact $K \subset \omega$ tel que $\mu(\omega - K) \leq \eta/2$; d'autre part, comme $G\mu_{\complement\omega}$ est bornée sur $\complement\omega$, il existe d'après le lemme 1 une mesure $\mu' \leq \mu_{\complement\omega}$ de G-potentiel continu, telle que

$$\mu_{\complement\omega}(E) - \mu'(E) < \eta/2$$

On pose $\nu = \mu' + \mu_K$; comme G est fini et continu hors de Δ et que les compacts K et $\complement\omega$ sont disjoints, $G\mu_K$ est continu sur $\complement\omega$; donc la restriction de $G\nu$ à $\complement\omega$ est continue. Si on pose $\pi = \mu - \nu$, les mesures ν et π possèdent bien les propriétés cherchées.

THÉORÈME 1. - Soit G régulier et fini continu hors de Δ (on suppose E compact). Pour toute $\mu \geq 0$, et tout $a > 0$, il existe un ouvert Ω tel que

1° $\check{G}\text{-cap}\,\Omega \leq a$

2° la restriction de $G\mu$ à $\complement\Omega$ soit finie et continue.

Désignons par ω_1, ν_1, π_1, les éléments associés par le lemme 2 aux données μ, $\varepsilon = \frac{a}{2}$, $\eta = (\frac{a}{2})^2$.

On définit alors ainsi (ω_n, ν_n, π_n) par récurrence : (ω_n, ν_n, π_n) sont les éléments associés par le lemme 2 aux données π_{n-1}, $\varepsilon = \frac{a}{2^n}$, $\eta = (\frac{a}{2^n})^2$.

Posons $\Omega = \bigcup_1^\infty \omega_n$.

De la sous-additivité de la capacité résulte que

$$\check{G}\text{-cap}\,\Omega \leq \sum_1^\infty \check{G}\text{-cap}\,\omega_n \leq \sum_1^\infty \frac{a}{2^n} = a .$$

D'autre part $\mu = \sum_1^\infty \nu_n$, donc $G\mu = \sum_1^\infty G\nu_n$.

Or, par définition, la restriction de $G\nu_n$ à $\complement\omega_n$, donc aussi à $\complement\Omega$, est continue ; d'autre part, sur $\complement\omega_n$ on a :

$$0 \leq G\nu_n(x) \leq \pi_{n-1}(E)/(\frac{a}{2^n}) \leq (\frac{a}{2^{n-1}})^2 / (\frac{a}{2^n}) = \frac{a}{2^{n-2}} \quad \text{pour tout } n \geq 1 .$$

La convergence des $G\nu_n$ sur $\complement\Omega$ est uniforme, donc la restriction de $G\mu$ à $\complement\Omega$ est continue.

Comparaison des capacités pour G et $\check{G}$.

DÉFINITION 4. - On appelle G-énergie d'une mesure μ la quantité, finie ou infinie $\int G\mu \, d\mu$.

L'énergie de μ est évidemment la même pour G et $\check{G}$. L'énergie de μ est une fonction semi-continue inférieurement de $\mu \in \mathfrak{M}_+$; en particulier, l'ensemble des μ d'énergie $\leq k$ est fermé.

LEMME 3. - Soit G un noyau quelconque ; et soit K un compact de E : on a :

(G-cap $K \neq 0$) $\Rightarrow$ (Il existe une mesure μ non nulle et d'énergie finie portée par K)

Lorsque G est régulier, la réciproque est vraie.

En effet, si G-cap $K \neq 0$, soit μ une distribution capacitaire de K ; on a $G\mu$ fini et continu, donc l'énergie de μ est finie.

Inversement soit μ, portée par K et d'énergie finie ; comme $G\mu$ est μ-intégrable, il existe une μ' non nulle $\leq \mu$ telles que la restriction de $G\mu'$ à $S\mu'$ soit finie continue ; si G est régulier, $G\mu'$ est continue partout, donc bornée ; il existe donc des mesures non nulles sur K, de potentiel $G\mu \leq 1$ partout, d'où G-cap $K \neq 0$.

PROPOSITION 1. - Soit G-régulier ; pour tout compact K, on a la relation :

$$(G\text{-cap } K = 0) \Rightarrow (\check{G}\text{-cap } K = 0)$$

D'après le lemme 3, de G-cap $K = 0$ résulte, comme G est régulier, que toute mesure μ non nulle portée par K est de G-énergie infinie, donc aussi de $\check{G}$-énergie infinie, d'où

$$\check{G}\text{-cap } K = 0$$

En particulier, si G et $\check{G}$ sont réguliers, les relations G-cap $K = 0$ et $\check{G}$-cap $K = 0$ sont équivalentes.

On va préciser la proposition 1 lorsque G satisfait à une condition supplémentaire.

LEMME 4. - Si G satisfait au principe du maximum λ-dilaté (voir [1], définition 3, corollaire des propositions 1 et 2), on a pour tout compact K :

$$\check{G}\text{-cap } K \leq 4\lambda . G\text{-cap } K \tag{2}$$

En effet, soit μ une $\check{G}$-distribution capacitaire de K, et posons $\check{G}$-cap $K = a$. Pour $h > 1$, soit A' (resp. A'') l'ensemble des points de K tels que $G\mu(x) > h$ (resp. $< h$) ; et soient μ' et μ'' les traces de μ sur A' et A''.

On a :

$$h . \mu'(E) \leq \int G\mu' d\mu' \leq \int G\mu \, d\mu = \int \check{G}\mu \, d\mu \leq a$$

Donc $\mu'(E) \leq a/h$.

On en déduit $\mu''(E) \geqslant a(1 - \frac{1}{h})$; et comme $G\mu'' \leq G\mu \leq h$ sur le compact A'' qui porte μ'', on a $G\mu'' \leqslant \lambda h$ partout.

Donc (en utilisant une remarque qui suit la définition 3), on a :

$$\text{G-cap } K \geqslant a(1 - \frac{1}{h})/\lambda h = \frac{a}{\lambda}(\frac{1}{h} - \frac{1}{h^2}) \geqslant \frac{a}{4\lambda}$$

d'où le lemme.

REMARQUE. - L'inégalité (2) s'étend immédiatement aux capacités extérieures de tout ensemble.

PROPOSITION 2. - Soit G régulier, fini et continu hors de Δ , et tel que $G(x , x) = \infty$ en tout point d'ondulation forte de G ([1], définition 3, corollaire des propositions 1 et 2). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(\text{G-cap}^* A < \eta) \Rightarrow (\check{G}\text{-cap}^* A < \varepsilon)$$

Si G est régulier, l'ensemble ω_∞ des points d'ondulation forte de G est discret, donc fini ; t ut $x \in \omega_\infty$ est un ensemble de G-capacité et $\check{G}$-capacité nulle puisque $G(x , x) = 0$, donc il existe un ouvert ω de G-capacité et de $\check{G}$-capacité arbitrairement petite et contenant ω_∞ ; sur le compact $\complement\omega$, G satisfait au principe du maximum λ-dilaté, pour un certain λ ; du lemme 4 résulte alors aisément la proposition.

Cas d'un groupe. - Si G est un groupe localement compact quelconque et si G est un noyau de composition régulier sur E , $(G(x, y) = f(x y^{-1}))$, ω_∞ est vide et $\check{G}$ est aussi régulier. Si en particulier G est compact, il existe deux constantes k_1 et $k_2 > 0$ telles que

$$k_1 . \text{G-cap}^* A \leqslant \check{G}\text{-cap}^* A \leqslant k_2 . \text{G-cap}^* A$$

PROPOSITION 3. - Soit G régulier, fini et continu hors de Δ . Si pour tout $x \in \omega_\infty$, ou bien $G(x , x) = \infty$, ou bien x a une base dénombrable de voisinages (automatiquement vérifié si E est métrique), on a :

$$(\text{G-cap}^* A = 0) \Rightarrow (\check{G}\text{-cap}^* A = 0)$$

Il suffit de remarquer que tout ensemble A est de la forme $A = \bigcup_1^\infty A_n$, les

A_n étant tels que, pour tout $x \in \bar{A}_n \cap \omega_\infty$, on a $G(x, x) = \infty$; on applique alors la proposition 2 à la restriction de G aux $\bar{A}_n$.

3. Mesures normales et mesures singulières.

DÉFINITION 5. - Pour tout noyau G sur E, une mesure $\mu \in \mathfrak{M}_+$ est dite G-normale si $\mu = \lim$ croissante (μ_n), où chaque $G\mu_n$ est fini continu.

Une mesure μ est dite G-singulière si aucune $\mu' \leq \mu$ n'est G-normale.

De cette définition résultent aussitôt les propriétés suivantes :

Les mesures G-normales (resp. G-singulières) constituent un sous-cône convexe héréditaire $\mathfrak{N}_G$ (resp. $\mathcal{S}_G$) de $\mathfrak{M}_+$; la limite d'une suite croissante d'éléments de ce cône y appartient aussi. En outre $\mathfrak{M}_+$ est somme directe de $\mathfrak{N}_G$ et $\mathcal{S}_G$ en ce sens que toute μ s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme $\mu = \mu_n + \mu_s$, où μ_n est normale et μ_s singulière.

PROPOSITION 4. - Soit G régulier. Pour toute μ, la trace de μ sur $\complement I(\mu)$ (où $I(\mu)$ est l'ensemble des x tels que $G\mu(x) = \infty$, est G-normale.

Il en résulte que toute mesure μ qui est G-singulière est portée par $I(\mu)$.

En effet, soit μ' la trace de μ sur $\complement I(\mu)$. On a $G\mu' < \infty$ sur $\complement I(\mu)$; comme cet ensemble est un F_σ, la proposition résulte immédiatement du corollaire du lemme 1.

REMARQUES (Cas de G régulier).

1° Toute μ portée par un ensemble A de G-capacité extérieure 0 est G-singulière (sinon il existerait $\mu' \leq \mu$ avec $G\mu'$ borné, d'où G-cap$^* A \neq 0$). On peut même remplacer le mot "extérieure" par "intérieure".

2° Si μ est G-singulière, son énergie est infinie ; il en est de même a fortiori de toute $\nu \geq \mu$. Donc toute mesure d'énergie finie est G-normale. (Notons que même pour les noyaux les plus classiques, il peut exister des mesures normales d'énergie infinie).

PROPOSITION 5. - Soit G un noyau régulier, et soit μ une mesure G-normale. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $X \subset E$, on ait

$$(\text{G-cap}^* X < \eta) \Rightarrow (\mu(X) < \varepsilon)$$

Sinon il existe $a > 0$, et une suite d'ouverts A_n tels que

$$G\text{-cap}\, A_n < \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \mu(A_n) > a$$

Posons $\omega_n = \bigcup_{p>n} A_p$.

On a $G\text{-cap}\, \omega_n < \frac{1}{2^n}$ et $\mu(\omega_n) > a$.

Si $B = \bigcap \omega_n$, on a donc $G\text{-cap}\, B = 0$ et $\mu(B) \geq a$.

Donc la trace de μ sur l'ensemble B est une mesure normale non nulle, ce qui est impossible puisque B a une G-capacité nulle.

PROPOSITION 6. - <u>Soit</u> G <u>très régulier</u> ; <u>alors</u>,

1° (μ G-singulière) $\rightleftarrows$ (μ portée par un ensemble de $G\text{-cap}^*$ nulle)

2° <u>Les mesures normales</u> (resp. singulières) <u>sont les mêmes pour</u> G et $\check{G}$.

3° <u>Pour toute</u> μ, <u>les parties singulière et normale de</u> μ <u>sont les traces de</u> μ <u>sur</u> $I(\mu)$ <u>et</u> $\complement I(\mu)$.

Cette proposition va résulter du fait que les relations $G\text{-cap}^* A = 0$ et $\check{G}\text{-cap}^* A = 0$ sont équivalentes, d'après la proposition 3.

Montrons (1) : Pour toute μ, $I(\mu)$ a une capacité nulle ; or la trace de μ sur $\complement I(\mu)$ est G-normale (proposition 4) ; donc si μ est singulière, cette trace est nulle, autrement dit μ est portée par $I(\mu)$; inversement, si μ est portée par A où $G\text{-cap}^* A = 0$, nous savons déjà (remarque 1 de la proposition 4) que μ est G-singulière.

Montrons (2) : De (1) résulte que $\mathcal{S}_G = \mathcal{S}_{\check{G}}$; comme les mesures normales peuvent se définir en termes de mesures singulières, on a donc aussi $\mathcal{N}_G = \mathcal{N}_{\check{G}}$.

Montrons (3) : Nous savons déjà que les traces de μ sur $I(\mu)$ et $\complement I(\mu)$ sont respectivement singulière et normale ; l'énoncé résulte donc de l'unicité de la décomposition de μ en ses parties singulières et normale.

COROLLAIRE du (3). - <u>Soit</u> G <u>très régulier ; pour toute</u> μ, <u>on a</u> μ-<u>presque partout</u> $G\mu(x)$ <u>et</u> $\check{G}\mu(x)$ <u>simultanément finis ou simultanément infinis</u>.

4. <u>Convergence des potentiels</u>.

Nous allons utiliser le théorème 1 pour démontrer le théorème de base de la théorie du potentiel ; notons que ce théorème n'exige, sur le noyau, aucune hypothèse du type "balayage", "principe de domination".

Par contre il impose au noyau d'être régulier.

THÉORÈME 2. - Soit G un noyau fini et continu hors de Δ, avec G et $\check{G}$ réguliers (E est supposé compact).

Pour toute suite convergente $(\mu_n) \to \mu$ dans $\mathfrak{M}_+$, telle que $\check{G}$-quasi-partout $G\mu_n(x) \to f(x)$, on a $\check{G}$-quasi-partout $G\mu(x) = f(x)$.

DÉMONSTRATION. - Soit $a > 0$; d'après le théorème 1, il existe des ouverts Ω et Ω_n tels que :

$\check{G}$-cap $\Omega \leq a$, et la restriction de $G\mu$ à $\complement\Omega$ est continue

$\check{G}$-cap $\Omega_n \leq a$, et la restriction de $G\mu_n$ à $\complement\Omega_n$ est continue.

Par hypothèse, il existe aussi un ouvert Ω' tel que $\check{G}$-cap $\Omega' \leq a$ et tel qu'hors de Ω', $G\mu_n(x) \to f(x)$.

Soit K le compact intersection des $\complement\Omega_n$, $\complement\Omega$ et $\complement\Omega'$; sur K, on a $f(x) \geqslant G\mu(x)$.

Soit A (resp. A_{pq}) l'ensemble des $x \in K$ tels que $f(x) > G\mu(x)$ (resp. $G\mu_{p+r}(x) \geqslant G\mu(x) + \frac{1}{q}$ pour tout $r \geqslant 1$) ; chaque ensemble A_{pq} est compact à cause de la continuité des $G\mu_n$ et $G\mu$ sur K, et $A = \bigcup_{p,q} A_{p,q}$.

On va montrer que $\check{G}$-cap$^* A = 0$; pour cela il suffit de montrer que pour tout $A_{p,q}$, on a $\check{G}$-cap $A_{pq} = 0$. Or si ceci n'est pas vrai, il existe, d'après le lemme 1, une mesure $\nu \neq 0$ portée par $A_{p,q}$, telle que $\check{G}\nu$ soit continu dans E. On a $\int \check{G}\nu \, d\mu_n = \int G\mu_n \, d\nu \geqslant \int (G\mu + \frac{1}{q}) \, d\nu$ pour tout $n \geqslant p$. Or comme $\check{G}\nu$ est continue, $\int \check{G}\nu \, d\mu_n \to \int G\nu \, d\mu = \int G\mu \, d\nu$. On a donc $\int G\mu \, d\nu \geqslant \int (G\mu + \frac{1}{q}) \, d\nu$, ce qui est absurde puisque $\int d\nu \neq 0$.

On a donc, $\check{G}$-quasi-partout sur K : $G\mu(x) = f(x)$. Or

$$\check{G}\text{-cap } (\complement K) \leq a + a + \sum_1^\infty \frac{a}{2^n} = 3\,a \quad ;$$

comme a est arbitraire le théorème est bien établi.

Le reste du travail est résumé dans deux Notes parues dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (Gustave). - Les noyaux réguliers en théorie du potentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 635-638.

[2] CHOQUET (Gustave). - Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 1606-1609.