G. PISIER

Sur les espaces de Banach K-convexes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. n^{o} 11, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980____A9_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1979-1980

SUR LES ESPACES DE BANACH K-CONVEXES

G. PISIER

Exposé No XI

18 Janvier 1980

Cet exposé étudie les espaces K-convexes qui ont été introduits dans la remarque 2.10 de [8]. Bien que la principale question concernant ces espaces ("Tout espace B-convexe est-il K-convexe ? ") soit toujours ouverte, plusieurs articles récents (en particulier [2] et [4])ont provoqué un regain d'intérêt pour ces espaces.

Rappelons tout d'abord la

Définition 1 : Soit P la projection orthogonale de $L^2([0,1],dt)$ sur le sous-espace engendré par les fonctions de Rademacher. Un espace de Banach X est dit K-convexe si $P \otimes Id_X$ (noté aussi $\tilde{P}$) s'étend en un opérateur borné sur $L^2(d\mathbb{P};X)$.

Soulignons tout de suite que cette notion dépend étroitement de la nature particulière de P. En effet, il résulte de théorèmes connus (cf. [6]) que si pour toute projection orthogonale P sur $L^2([0,1],dt)$ l'opérateur $\tilde{P}$ est borné sur $L^2(dt;X)$, alors X est nécessairement isomorphe à un Hilbert. Les espaces K-convexes ont été introduits parce qu'ils forment la classe la plus générale d'espaces dans lesquels il y a une bonne dualité entre les notions de type et de cotype ; précisément, si X est K-convexe, alors X est de type p' $(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1)$. Nous renvoyons à [8] pour plus de détails sur les notions de type et de cotype. On note que X est K-convexe si et seulement si X' l'est aussi ; la K-convexité passe évidemment aux sous-espaces et aux quotients. De plus, si X est K-convexe, il en est de même de $L^p(X)$ pour tout p tel que $1<p<\infty$♦.
Rappelons que L^1 est de cotype 2 mais par contre L^∞ n'est de type p pour aucun $p>1$. Par conséquent, L^1 n'est pas K-convexe (on peut d'ailleurs s'en convaincre par un calcul très simple). Plus généralement, si L^1 (ou ce qui revient au même ℓ^1) est finiment représentable dans un espace X, alors X n'est pas K-convexe. En effet, la K-convexité est une superpropriété au sens de [5] ; cela se voit aisément sur la définition en écrivant que $P \otimes Id_X$ est borné sur les éléments de $L^2(dt;X)$ qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.

La principale question ouverte concernant les espaces K-convexes est de savoir si la réciproque est vraie :

♦ Pour le voir, il faut utiliser les inégalités de Khintchine-Kahane (cf. [13] exposé No 7).

Problème 1 : Si ℓ^1 n'est pas finiment représentable dans un espace X (ce qui revient à dire que X est "B-convexe", ou encore que X est de type p pour un $p>1$, voir [11] exposé 7 pour plus de détails), est-ce que X est K-convexe ?
Signalons qu'on ne sait pas non plus si les espaces uniformément convexes sont K-convexes.

On sait néanmoins répondre à la question ci-dessus sous l'hypothèse additionnelle que X est un treillis de Banach, ou plus généralement si X a une structure locale inconditionnelle (cf. [11] exposé 24-25). On sait d'autre part que tout espace de type 2 est K-convexe (cf. [8] remarque 2.10).
Nous allons voir que l'on peut présenter une synthèse des deux résultats précédents qui pourra peut-être permettre de nouveaux progrès sur le problème 1.

En réalité, le théorème qui suit est le produit d'un échec ; j'ai longtemps cherché à donner une réponse négative au problème 1 en me basant sur l'observation suivante : soit (A_0,A_1) un couple d'interpolation d'espaces de Banach (cf. e.g. [3]). Si l'un des espaces, disons A_1, est de type $p_1>1$, alors l'espace interpolé complexe $[A_0,A_1]_\theta$ est de type $p_\theta>1$ pour tout θ dans $]0,1[$ avec p_θ défini par $\frac{1}{p_\theta}=\frac{1-\theta}{1}+\frac{\theta}{p_1}$.
La même chose est vraie pour l'interpolé par la méthode d'interpolation de Lions-Peetre, soit $[A_0,A_1]_{\theta,p}$ à condition que $p_\theta\le p<\infty$.
C'est une conséquence immédiate de la définition des espaces de type p et des théorèmes connus sur l'interpolation entre $L^1(A_0)$ et $L^{p_1}(A_1)$. (Pour plus de détails, cf. B. Beauzamy, exposé No 14 dans [12]). En d'autres termes, si <u>l'un</u> des espaces A_0, A_1 est B-convexe alors $[A_0,A_1]_\theta$ et $[A_0,A_1]_{\theta,p}$ le sont aussi pour tous θ,p avec $0<\theta<1$ et $1<p<\infty$. Par contre, pour la K-convexité, il n'y a a priori pas d'analogue, la seule chose évidente est que si A_0 <u>et</u> A_1 sont <u>tous deux</u> K-convexes, alors $[A_0,A_1]_\theta$ et $[A_0,A_1]_{\theta,p}$ le sont aussi.

J'ai donc eu l'espoir de répondre négativement au problème en montrant que la K-convexité ne possède pas la "bonne" propriété d'interpolation mentionnée ci-dessus pour la B-convexité. Un premier échec partiel m'a conduit aux résultats de [10] ; en réalité, cette tentative était vouée à l'échec, en effet, on a le

Théorème 1 : Soit (A_0,A_1) un couple d'interpolation d'espaces de Banach réels (resp. complexes). Si l'un des espaces A_0, A_1 est K-convexe, alors l'espace $[A_0,A_1]_{\theta,p}$ (resp. $[A_0,A_1]_\theta$) l'est aussi pour tous θ, p vérifiant

$0 < \theta < 1$ et $1 < p < \infty$.

Remarque : En particulier, si A_1 est un espace de Hilbert (donc a fortiori K-convexe) alors $[A_o, A_1]_\theta$ est K-convexe. Les espaces θ-hilbertiens au sens de l'exposé 17 de [14] sont donc K-convexes pour tout $\theta > 0$. D'après l'exposé 17 de [14], tout treillis de Banach B-convexe est nécessairement θ-hilbertien pour un $\theta > 0$, on retrouve ainsi le résultat de Maurey mentionné après le problème 1.

Pour démontrer le théorème 1, nous allons montrer que la K-convexité équivaut à une autre propriété qui, elle, se comporte bien pour l'interpolation. Pour des raisons apparemment purement techniques (voir le problème 2 ci-dessous), il nous faut travailler avec des variables gaussiennes et les polynômes d'Hermite en ces variables au lieu des fonctions de Rademacher et de Walsh.
Soit (g_n) une suite de variables aléatoires gaussiennes sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note Q_1 la projection orthogonale de $L^2(d\mathbb{P})$ sur le sous-espace engendré par la suite $(g_n)_{n \geq 0}$.

La proposition suivante montre qu'il revient au même de travailler avec P ou avec Q_1 :

Proposition 1 : Soit X un espace de Banach. Alors $\tilde{P} = P \otimes Id_X$ est borné sur $L^2(dt;X)$ si et seulement si $\tilde{Q}_1 = Q_1 \otimes Id_X$ est borné sur $L^2(d\mathbb{P};X)$.

Démonstration : Dès que $\tilde{P}$ ou $\tilde{Q}_1$ est borné sur $L^2(X)$, on voit facilement que X ne contient pas de ℓ^1_n uniformément, donc ni X ni X' ne contiennent de ℓ^∞_n uniformément. Par conséquent, d'après [8] corollaire 1.3, il existe une constante C telle que, pour tout suite finie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ dans X, on a

(1) $$\|\Sigma\, g_i\, x_i\|_{L^2(X)} \leq C\, \|\Sigma\, r_i\, x_i\|_{L^2(X)} \quad ;$$

et de plus, $\forall\, n$, $\forall\, \{x'_1, \ldots, x'_n\} \subset X'$, on a :

(2) $$\|\sum_1^n g_i\, x'_i\|_{L^2(X')} \leq C\, \|\sum_1^n r_i\, x'_i\|_{L^2(X')} \quad .$$

Si l'on dualise l'inégalité (2), on trouve :

(3) $$\inf_{\xi \in \mathrm{Ker}\, \tilde{P}} \|\sum_1^n r_i\, x_i + \xi\|_{L^2(X)} \leq C \inf_{\eta \in \mathrm{Ker}\, \tilde{Q}_1} \|\sum_1^n g_i\, x_i + \eta\|_{L^2(X)} \quad .$$

On obtient donc en combinant (3) et (1) :

$$\|\tilde{Q}_1\| \le C^2 \|\tilde{P}\| \quad .$$

D'autre part, on a toujours (cf. [11] exposé No 3)

$$\|\sum_i^n r_i \ x_i\|_{L^2(X)} \le \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|\Sigma \ g_i \ x_i\|_{L^2(X)}$$

quel que soit l'espace X. On peut donc répéter l'argument précédent en échangeant les rôles de (r_i) et (g_i) et l'on conclut

$$\|\tilde{P}\| \le \frac{\pi}{2} \|\tilde{Q}_1\| \quad . \qquad \text{cqfd.}$$

Pour travailler avec les polynômes d'Hermite en une infinité de variables, nous aurons besoin de notations supplémentaires. Pour plus de détails sur toutes les questions relatives aux chaos de Wiener, nous renvoyons à [9].

Notations : Soit (g_n) comme ci-dessus. On notera $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes d'Hermite. Rappelons que $h_o(x) \equiv 1$, $h(x) \equiv x$, etc. La suite (h_n) est déterminée par la formule génératrice :

$$\exp(ux - \frac{u^2}{2}) = \sum_{n\ge 0} \frac{u^n}{n!} h_n(x) \qquad \forall \ u,x \in \mathbb{R} \ .$$

Fixons un entier j dans $\mathbb{N}$.

Il est classique que la suite $\left\{ \frac{h_n(g_j)}{\sqrt{n!}} \ | n \ge 0 \right\}$ forme une base orthonormale de l'espace $L^2(\Omega, \tau(g_j), \mathbb{P})$. De plus, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction suffisamment régulière telle que $f(g_j)$ est dans $L^2(d\mathbb{P})$, alors on a :

$$(4) \qquad \left(\frac{d^n}{du^n}\right)_{u=0} \mathbb{E} \ f(g_j + u) = \mathbb{E}\,(f(g_j) h_n(g_j)) \quad .$$

On posera $S = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que S est l'ensemble des suites $(n_o, n_1, \ldots)$ d'entiers positifs ou nuls tels que $\sum_0^\infty n_j < \infty$ (i.e. $n_j = 0$ pour j assez grand). Pour tout $s = (n_o, n_1, \ldots) \in S$ on notera

$$s! = \prod_{j=0}^\infty n_j! \quad \text{et} \quad |s| = \sum_0^\infty n_j \quad ,$$

et

$$h_s((x_j)_{j\ge 0}) = \prod_{j=0}^\infty h_{n_j}(x_j) \qquad \forall \ (x_j)_{j\ge 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad .$$

Posons pour alléger $H_s = (s!)^{-1/2}\, h_s((g_j)_{j\ge 0})$. La suite $\{H_s \mid s\in S\}$ est une base orthonormale de l'espace $L^2(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$ où $\mathcal{B}$ est la tribu engendrée par la suite $(g_j)_{j\ge 0}$.

On notera S_n le sous-ensemble de S formé des éléments s tels que $|s| = n$, de sorte que $\{S_n \mid n = 0,1,\dots\}$ est une partition de S.

Considérons un espace de Banach X et une famille $(x_s)_{s\in S}$ d'éléments de X dont un nombre fini seulement est non nul. On considère la fonction

$$\Phi((g_j)_{j\ge 0}) = \sum_{s\in S} x_s\, H_s((g_j)_{j\ge 0}) \quad .$$

Soit $(g_j^m)_{j\ge 0}$, $m = 1,2,\dots$ une suite de copies indépendantes de la suite $(g_j)_{j\ge 0}$. Posons

$$\psi = \Phi((n^{-1/2} \sum_{m=1}^{n} g_j^m)_{j\ge 0}) \quad .$$

Il est clair que ψ a la même distribution que $\Phi((g_j))$.

Soit $\mathcal{B}_m$ la tribu engendrée par $\{g_j^m \mid j\in\mathbb{N}\}$ et soit π_m la projection orthogonale de $L^2(\Omega,\mathcal{B}_m,\mathbb{P})$ sur le sous-espace engendré par $\{g_j^m \mid j\in\mathbb{N}\}$.

En identifiant $L_2(\Omega, \otimes_1^n \mathcal{B}_m,\mathbb{P})$ avec $\bigotimes_{m=1}^{n} L_2(\Omega,\mathcal{B}_m,\mathbb{P})$, on peut énoncer le

<u>Lemme 1</u> : $(\bigotimes_{m=1}^{n} \pi_m)\psi = \sum x_s\, k_s$, avec

$$k_s = (s!)^{1/2}\, n^{-n/2} \sum_{\omega(\alpha)=s} g^1_{\alpha(1)} \cdots g^n_{\alpha(n)}$$ où la dernière somme est étendue à toutes les applications α de $\{1,\dots,n\}$ dans $\mathbb{N}$ telles que la suite $\omega(\alpha)$ -définie plus bas- coïncide avec s. La suite $\omega(\alpha)$ est l'élément $(\omega_j)_{j\ge 0}$ de S défini par $\omega_j = \mathrm{card}(\alpha^{-1}(\{j\}))$.

On notera que $\sum_0^\infty \omega_j = \mathrm{card}\ \alpha^{-1}(\mathbb{N}) = n$.

<u>Démonstration</u> : Posons $\eta = (\bigotimes_{m=1}^{n} \pi_m)\psi$. On peut développer a priori $\eta = \sum_\alpha g^1_{\alpha(1)} \cdots g^n_{\alpha(n)}\, z_\alpha$, de sorte que $z_\alpha = \mathbb{E}\,(\psi\, g^1_{\alpha(1)} \cdots g^n_{\alpha(n)}) \in X$.

D'après la formule (4), on a :

$$(5) \qquad z_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial u^1_{\alpha(1)}}\right)_{u^1=0} \cdots\cdot \left(\frac{\partial}{\partial u^n_{\alpha(n)}}\right)_{u^n=0} \mathbb{E}\,\psi((g_j^k + u_j^k)_{j\ge 0,1\le k\le n}) \quad .$$

On observe alors que la variable $\psi((g_j^k + u_j^k)_{j\ge 0,1\le k\le n})$ a la même distribution que $\Phi((g_j + n^{-1/2}\sum_{m=1}^{n} u_j^m)_{j\ge 0})$. On pose $u_j = n^{-1/2}\sum_{m=1}^{n} u_j^m$. Posons pour alléger $F((u_j)_{j\geq 0}) = \mathbb{E}\,(\Phi((g_j + u_j)_{j\geq 0}))$. On a d'après (5)

$$z_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial u^1_{\alpha(1)}} \cdots \frac{\partial}{\partial u^n_{\alpha(n)}}\right)_{u^1=\dots=u^n=0} F\Big(\big(n^{-1/2}\sum_{m=1}^{n} u^m_j\big)_{j\geq 0}\Big) \quad .$$

Par un calcul élémentaire de dérivation, on vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial u^1_{\alpha(1)}} \cdots \frac{\partial}{\partial u^n_{\alpha(n)}} F(u) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^{\omega_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)^{\omega_j} \cdots\right)_{u=0} F(u)\,.\, n^{-n/2} \quad .$$

Avec $\omega_j = \mathrm{card}\ \alpha^{-1}(\{j\})$.

On a donc :

$$z_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^{\omega_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)^{\omega_j} \cdots \mathbb{E}\,\Phi(\{g_j + u_j\})\ n^{-n/2} \quad ,$$

donc d'après (4) :

$$n^{n/2}\, z_\alpha = \mathbb{E}\,(\Phi(\{g_j\})\ h_\omega((g_j)))$$

$$= x_\omega\ (\omega!)^{1/2} \quad .$$

Soit finalement $\eta = \sum_\alpha g^1_{\alpha(1)} \cdots g^n_{\alpha(n)}\ x_{\omega(\alpha)}\ (\omega(\alpha)!)^{1/2}\ n^{-n/2}$, d'où le lemme 1 résulte immédiatement.

<u>Lemme 2</u> : $\mathbb{E}(k_s k_{s'}) = 0$ si $s \neq s'$

et $$\mathbb{E}\,|k_s|^2 = n!\ n^{-n} \quad .$$

<u>Démonstration</u> : On peut écrire $k_s = (s!\ n^{-n})^{1/2} \sum_{\alpha\in A_s} g^1_{\alpha(1)} \cdots g^n_{\alpha(n)}$ où $A_s = \{\alpha \mid \omega(\alpha) = s\}$.

On peut noter que $A_s \cap A_{s'} = \emptyset$ si $s \neq s'$ et $g^1_{\alpha(1)} \cdots g^n_{\alpha(n)} \perp g^1_{\beta(1)} \cdots g^n_{\beta(n)}$ si $\alpha \neq \beta$, de sorte que $k_s \perp k_{s'}$ si $s \neq s'$.

On a de plus $\mathbb{E}\,|k_s|^2 = s!\ n^{-n}\ \mathrm{card}\ (A_s)$. On vérifie facilement que $\mathrm{card}(A_s) = \frac{n!}{s!}$, d'où le lemme 2.

On notera que, d'après la formule de Stirling, on a $n! \sim n^{n+1/2}\ e^{-n}$ de sorte qu'il existe une constante numérique $K > 0$ telle que

$$(6) \qquad n!\ n^{-n} \geq K^{-1}\ e^{-n} \quad .$$

Notons Q_n la projection orthogonale de $L^2(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ sur l'espace engendré par les fonctions $\{H_s \mid s \in S_n\}$. On pose toujours $\tilde{Q}_n = Q_n \otimes Id_X$ et on note $\|\tilde{Q}_n\|$ la norme de $\tilde{Q}_n$ en tant qu'opérateur sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}; X)$, (ce dernier espace sera souvent noté simplement $L^2(X)$).

On a alors :

<u>Lemme 3</u> : Si $\tilde{Q}_1$ est borné sur $L^2(d\mathbb{P}; X)$, alors il en est de même de $\tilde{Q}_n$ pour tout $n > 1$ et de plus, on a :

(7)
$$\|\tilde{Q}_n\| \le K(e\,\|\tilde{Q}_1\|^2)^n \qquad \forall\, n \ge 1 \ .$$

<u>Remarque</u> : Il est probable que le lemme précédent est vrai avec $\|\tilde{Q}_1\|$ au lieu de $\|\tilde{Q}_1\|^2$, mais je ne sais pas le démontrer.

<u>Démonstration</u> : D'après le lemme 1, on a :

$$\|\Sigma\, x_s\, k_s\|_2 \le \|\bigotimes_{m=1}^{n} \tilde{\pi}_m\|\ \|\psi\|_2 = \prod_{m=1}^{n} \|\tilde{\pi}_m\|\ \|\Phi\|_2$$

où l'on a noté simplement $\|\ \|_2$ la norme de l'espace $L^2(X)$. D'où

(8)
$$\|\Sigma\, x_s\, k_s\|_2 \le \|\tilde{Q}_1\|^n\ \|\Phi\|_2 \ .$$

Puisque la K-convexité est une notion self-duale, (i.e. la norme de $\tilde{Q}_1$ est la même sur $L^2(X)$ et sur $L^2(X')$) on a aussi pour toute famille $(x'_s)_{s\in S}$ d'éléments de X', dont seulement un nombre fini sont non nuls :

(8')
$$\|\Sigma\, x'_s\, k_s\|_2 \le \|\tilde{Q}_1\|^n\ \|\Phi'\|_2$$

avec $\Phi' = \sum_{s\in S} x'_s\, H_s$.

Nous allons voir que l'équation (8') entraîne

(9)
$$\|\sum_{s\in S_n} x_s\, H_s\|_2 \le Ke^n\ \|\tilde{Q}_1\|^n\ \|\sum_{s\in S_n} x_s\, k_s\|_2 \ .$$

En effet, il est évident qu'il existe $\Phi' \in L^2(X')$ tel que

$$\|\Phi'\|_2 = 1 \quad \text{et} \quad \|\sum_{S_n} x_s H_s\|_2 = \mathbb{E}\langle \Phi', \sum_{S_n} x_s H_s\rangle$$

$$= \sum_{S_n} \langle x'_s, x_s\rangle$$

soit d'après le lemme 2 :

$$= \frac{n^n}{n!}\ \mathbb{E}\langle \sum_{S_n} x'_s k_s , \sum_{S_n} x_s k_s\rangle$$

$$\le \frac{n^n}{n!} \|\sum_{S_n} x'_s k_s\|_2 \|\sum_{S_n} x_s k_s\|_2$$

soit d'après (8') et (6) :

$$\le K e^n \|\widetilde{Q}_1\|^n \|\sum_{S_n} x_s k_s\|_2 ,$$

ce qui établit (9).

On a donc, en combinant (9) et (8) :

$$\|\sum_{s\in S_n} x_s H_s\|_2 \le K(e\|\widetilde{Q}_1\|^2)^n \|\sum_{s\in S} x_s H_s\|_2$$

ce qui signifie que $\|\widetilde{Q}_n\| \le K(e\|\widetilde{Q}_1\|)^n$, d'où (7).

<u>Théorème 2</u> : Les propriétés suivantes d'un espace de Banach X sont équivalentes :

(i) X est K-convexe (i.e. $\widetilde{Q}_1$ est bornée).

(ii) $\sup_n \|\widetilde{Q}_n\|^{1/n} < \infty$.

(iii) Il existe $\delta > 0$, tel que la série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \widetilde{Q}_n$ converge dans l'espace des opérateurs bornés sur $L^2(X)$, pour tout z <u>complexe</u> tel que $|z| < \delta$.

<u>Remarque</u> : La propriété (iii) sous-entend que X est un Banach complexe ; en fait, le cas réel se ramène au cas complexe car on peut complexifier X de façon que le complexifié de X soit K-convexe si et seulement si X l'est.

<u>Démonstration</u> : Elle est évidente compte-tenu des lemmes précédents. Notons que, dans (iii) ⇒ (i), si on suppose

$$\|\sum_0^{\infty} z^n \widetilde{Q}_n\| \le C$$

quel que soit z tel que $|z| \le \delta$, alors

$$\delta\ \widetilde{Q}_1 = \int \bar{z}(\sum_0^{\infty} \delta^n z^n \widetilde{Q}_n)\ dm(z)$$

où dm est la mesure de Haar normalisée sur le cercle unité. On a donc alors

(10) $$\delta\ \|\tilde{Q}_1\| \leq C \quad .$$

Dans l'implication (i)$\Rightarrow$(iii), on peut prendre d'après le lemme précédent $\delta < (e\|\tilde{Q}_1\|^2)^{-1}$.

Pour démontrer le théorème 1, nous aurons aussi besoin de la proposition suivante qui résulte des propriétés bien connues des noyaux de Mehler.

<u>Proposition 2</u> : Pour tout z réel avec $|z| \leq 1$, l'opérateur $\tilde{T}_z = \sum_{n\geq 0} z^n \tilde{Q}_n$ défini sur $L^2 \otimes X$, s'étend en un opérateur borné de norme 1 sur $L^2(X)$.

<u>Démonstration</u> : Notons tout d'abord que $\tilde{T}_1$ est l'identité sur $L^2(X)$. Considérons l'opérateur T_z^j défini sur $L^2(\Omega,\tau(g_j),\mathbb{P})$ par

$$T_z^j\, h_m(g_j) = z^m\, h_m(g_j) \qquad \forall\ m \geq 0 \quad .$$

On sait (cf. par exemple [1] p. 163) que cet opérateur est défini sur $L^2(\Omega,\tau(g_j),\mathbb{P})$ par un noyau intégral appelé noyau de Mehler et que ce noyau est positif de norme 1 si z est réel et $-1 \leq z \leq 1$.

Il est clair que l'on peut écrire

$$T_z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, Q_n = \bigotimes_{j=1}^{\infty} T_z^j$$

en identifiant $L^2(\mathcal{B})$ et $\bigotimes_{j=1}^{\infty} L^2(\tau(g_j))$.

L'opérateur T_z peut donc être lui aussi considéré comme un noyau positif de norme 1 pour $-1 \leq z \leq 1$. On peut donc écrire :

$\forall\ \Phi \in L^2(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P}) \otimes X$

$$\|\tilde{T}_z(\Phi)\| \overset{\text{p.s.}}{\leq} T_z(\|\Phi(.)\|) \quad ,$$

d'où l'on tire immédiatement :

$$\|\tilde{T}_z(\Phi)\|_{L^2(X)} \leq \|T_z(\|\Phi\|_X)\|_{L^2}$$

$$\leq \|\ \|\Phi\|_X\|_{L^2} = \|\Phi\|_{L^2(X)} \qquad . \quad \text{cqfd.}$$

<u>Démonstration du théorème 1</u> : Remarquons tout d'abord qu'il suffit de le démontrer dans le cas de l'interpolation complexe. En effet, le cas de l'interpolation réelle à la Lions-Peetre en résulte d'après le

"théorème de réitération" (cf. [7] chapitre IV).

Soient donc A_o, A_1 deux espaces de Banach complexes. On suppose que A_1 est K-convexe. D'après le théorème 1 il existe $\delta > 0$ et C tels que l'opérateur $T_z \otimes Id_{A_1}$ ♦♦ s'étend en un opérateur borné sur $L^2(A_1)$ de norme $\leq C$, pour tout z complexe tel que $|z| \leq \delta$. D'autre part, nous savons que $T_z \otimes Id_{A_o}$ s'étend en une contraction que $L^2(A_o)$ pour tout z réel tel que $-1 \leq z \leq 1$.

Posons $A_\theta = [A_o, A_1]_\theta$. Nous allons montrer que $T_z \otimes Id_{A_\theta}$ s'étend en un opérateur borné sur $L^2(A_\theta)$ pour tout z dans un certain domaine D_θ interpolé entre

$$D_o = \{z \in \mathbb{R} \mid -1 \leq z \leq 1\} \quad \text{et} \quad D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \delta\} \quad .$$

Pour cela, on utilise un argument connu (cf. e.g. [15] p. 71). Rappelons que $[L^2(A_o), L^2(A_1)]_\theta = L^2(A_\theta)$ (cf. [3] § 13.6). Soit $\Phi \in L^2(A_\theta)$ avec $\|\Phi\|_{L^2(A_\theta)} < 1$. Par définition de $[L^2(A_o), L^2(A_1)]_\theta$, il existe une fonction holomorphe $z \to F(z)$ définie sur la bande $\{0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$ à valeurs dans $L^2(A_o) + L^2(A_1)$, telle que $F(\theta) = \Phi$ et telle que les applications $t \to F(it)$ et $t \to F(1+it)$ soient continues tendant vers 0 à l'infini, à valeurs respectivement dans $L^2(A_o)$ et $L^2(A_1)$, et de plus, on a :

$$\sup_t \|F(it)\|_{L^2(A_o)} < 1 \quad , \quad \sup_t \|F(1+it)\|_{L^2(A_1)} < 1 \quad .$$

Fixons un réel x. Posons

$$\Delta(z) = i\,\delta\, \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} z + ix\right)$$

et

$$G(z) = \tilde{T}_{\Delta(z)}\, F(z)$$

(où l'on a noté $\tilde{T}_z$ l'opérateur $T_z \otimes Id_{A_o + A_1}$, en remarquant que l'on peut identifier $L^2(A_o + A_1)$ et $L^2(A_o) + L^2(A_1)$).

Il est clair que $z \to G(z)$ est holomorphe dans la bande $\{0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$ à valeurs dans $L^2(A_o) + L^2(A_1)$. De plus, on peut vérifier que

(i) si $\mathrm{Re}\, z = 0$, alors $\Delta(z) \in D_o$,

(ii) si $\mathrm{Re}\, z = 1$, alors $\Delta(z) \in D_1$,

♦♦ qui n'est a priori bien défini que sur $L^2 \otimes A_1$.

Par conséquent : $\forall\ t \in \mathbb{R}$

$$\|G(it)\|_{L^2(A_0)} < 1 \quad \text{et} \quad \|G(1+it)\|_{L^2(A_1)} < C \ .$$

D'où (à nouveau par définition de $[L^2(A_0),L^2(A_1)]_\theta$) :

$$\|G(\theta)\|_{L^2(A_\theta)} < C^\theta \ ,$$

c'est-à-dire : $$\|\widetilde{T}_{\Delta(\theta)}\Phi\|_{L^2(A_\theta)} < C^\theta \ .$$

Notons B_θ l'espace des opérateurs bornés sur $L^2(A_\theta)$. Par homogénéité, on conclut que $\widetilde{T}_z$ s'étend en un opérateur borné sur $L^2(A_\theta)$ et l'on a :

$$\|\widetilde{T}_z\|_{B_\theta} < C^\theta$$

pour tout z dans D_θ avec

$$D_\theta = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists\ x \in \mathbb{R}\ z = i\delta \operatorname{tg}(\frac{\theta\pi}{4} + ix)\} \ .$$

On vérifie aisément que

$$D_\theta \supset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \quad |z| \leq \delta \operatorname{th}\frac{\theta\pi}{4}\} \ .$$

D'autre part, comme $\widetilde{T}_z$ a la même norme que $\widetilde{T}_{-z}$ (puisque $\widetilde{T}_{-1}$ est une contraction sur $L^2(X)$ quel que soit X, cf. proposition 2), on obtient :

$$\|\widetilde{T}_z\|_{B_\theta} \leq C^\theta$$

$\forall\ z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq \delta \operatorname{th}\frac{\theta\pi}{4}$.

Soit finalement (cf. la démonstration du théorème 2) :

$$\|\widetilde{Q}_1\|_{B_\theta} \leq (\delta \operatorname{th}\frac{\theta\pi}{4})^{-1}\ C^\theta \ ,$$

ce qui prouve (d'après la proposition 1) que X est K-convexe.

Le corollaire qui suit est démontré différemment dans [10]. Le lecteur notera d'ailleurs que la méthode du présent exposé permet aussi d'obtenir le théorème 2.7 de [10], à partir du corollaire 2 ci-dessous.

Corollaire 1 : Pour tout espace de Banach X de dimension n, la norme de $Q_1 \otimes Id_X$ sur $L^2(X)$ -notée simplement $\|\tilde{Q}_1\|$- est majorée par $C\,\mathrm{Log}(n+1)$, où C est une constante numérique.

Démonstration : On se ramène au cas complexe par complexification, et on applique les calculs précédents.
On sait que $d(X,\ell^2_n) \le \sqrt{n}$, on peut donc prendre $A_o = X$ muni de sa norme et $A_1 = X$ muni d'une norme hilbertienne telle que $d(A_o,A_1) \le \sqrt{n}$. On peut alors prendre $\delta = C = 1$ dans la démonstration précédente. On a alors

$$d(X,A_\theta) \le (\sqrt{n})^\theta$$

et

$$\|\tilde{Q}_1\|_{B_\theta} \le \left(\mathrm{th}\,\frac{\theta\pi}{4}\right)^{-1}$$

d'où

$$\|\tilde{Q}_1\| \le (\sqrt{n})^\theta \left(\mathrm{th}\,\frac{\theta\pi}{4}\right)^{-1} .$$

Il suffit alors de choisir $\theta = \frac{1}{\mathrm{Log}(n+1)}$ pour obtenir le résultat annoncé.

Corollaire 2 : Soit $u : X \to Y$ un opérateur entre espaces de Banach complexes. On note $\gamma_2(u)$ la norme de factorisation par un Hilbert de u. Soit R(u) la norme de $Q_1 \otimes u$ considéré comme opérateur de $L^2(X)$ dans $L^2(Y)$. Alors, on a pour $0 < \theta < 1$:

$$R(u) \le \frac{K}{\theta}\,\gamma_2(u)^\theta\,\|u\|^{1-\theta}$$

où K est une constante numérique.

Démonstration : Soit B l'espace des opérateurs bornés de $L^2(X)$ dans $L^2(Y)$, on a

$$\|T_z \otimes u\|_B \le \gamma_2(u) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},\ |z| \le 1 ,$$

et

$$\|T_z \otimes u\|_B \le \|u\| \qquad \forall\, z \in \mathbb{R},\ -1 \le z \le 1 .$$

On trouve donc par le même argument que ci-dessus :

$$\|T_z \otimes u\|_B \le \gamma_2(u)^\theta\,\|u\|^{1-\theta} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \le \mathrm{th}\,\frac{\theta\pi}{4} ,$$

d'où

$$\|Q_1 \otimes u\|_B \le \left(\mathrm{th}\,\frac{\theta\pi}{4}\right)^{-1} \gamma_2(u)^\theta\,\|u\|^{1-\theta} . \qquad \text{cqfd.}$$

Corollaire 3 : Soit X un espace de Banach sur le corps des complexes. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$(11) \quad \forall\, x,y \in X \qquad \|x + i\delta y\|^2 + \|x - i\delta y\|^2 \leq \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \quad .$$

Alors l'espace X est K-convexe.

Démonstration : Soit $(\varepsilon_n)_n$ les fonctions coordonnées sur $\Omega = \{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$ muni de sa probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$. Pour toute partie finie A de $\mathbb{N}$, on pose $w_A = \prod_{k\in A} \varepsilon_k$. Le système $\{w_A \mid A \subset \mathbb{N}\}$ (appelé usuellement système de Walsh) forme une base orthonormale de $L^2(\Omega,\mathbb{P})$. (On fait la convention $w_\emptyset \equiv 1$.)

Soit D l'ensemble des nombres complexes z tels que

$$\forall\, x,y \in X \qquad \|x + zy\|^2 + \|x - zy\|^2 \leq \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \quad .$$

Il est immédiat que D est un ensemble convexe contenant l'origine. Il résulte donc de (11) que

$$D \supset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant \delta'\} \quad \text{où} \quad \delta' = \frac{\delta}{(1+\delta^2)^{1/2}} \quad .$$

On en déduit, par intégrations successives, que pour toute famille finie $\{x_A \mid A \subset \mathbb{N}\}$ dans X, on a :

$\forall\, z$ tel que $|z| \leq \delta'$

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{\substack{A\subset\mathbb{N}\\ |A|<\infty}} z^{|A|}\, w_A\, x_A\Big\|^2 \leq \mathbb{E}\Big\|\sum_{\substack{A\subset\mathbb{N}\\ |A|<\infty}} w_A\, x_A\Big\|^2 \quad .$$

On peut alors appliquer l'argument utilisé pour montrer que (iii) $\Rightarrow$ (i) dans le théorème 2 et on conclut que X est K-convexe avec $\|\widetilde{P}\| \leq \frac{1}{\delta'}$.

Remarque : Signalons que tout espace L^p $(1 < p < \infty)$ et plus généralement tout espace θ-hilbertien au sens de l'exposé 17 de [14] (pour $0 < \theta < 1$) vérifie les hypothèses du corollaire 2 pour un $\delta > 0$ convenable.

Remarque : Curieusement, nous ne savons pas démontrer d'analogue du théorème 2 avec le système de Walsh au lieu des polynômes d'Hermite. D'où la question suivante :

<u>Problème 2</u> : Soit X un espace K-convexe, existe-t-il $\delta > 0$ et C tels que : pour toute famille finie $\{x_A \mid A \subset \mathbb{N}\}$ d'éléments de X on a, pour tout z complexe avec $|z| \leq \delta$,

$$\mathbb{E}\,\|\Sigma\, w_A\, x_A\, z^{|A|}\|^2 \leq C\ \mathbb{E}\,\|\Sigma\, w_A\, x_A\|^2 \quad ? \tag{12}$$

La réponse est très probablement affirmative.

<u>Remarque</u> : On peut appliquer un argument du type "théorème central limite" pour démontrer que (12) entraîne que pour toute famille finie $\{x_s \mid s \in S\}$ dans X, on a aussi : $\forall\, z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leq \delta$

$$\mathbb{E}\,\|\sum_{s\in S} H_s\, z^{|s|}\, x_s\|^2 \leq C\ \mathbb{E}\,\|\sum_{s\in S} H_s\, x_s\|^2 .$$

Il suffit pour le voir de reprendre l'argument de W. Beckner dans [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Beckner : Inequalities in Fourier analysis, Annals of Math. 102 (1975) 159-182.

[2] Y. Benyamini et Y. Gordon : Factorizations of random operators, à paraître.

[3] A.P. Calderón : Intermediate spaces and interpolation : the complex method, Studia Math. 24 (1964) 113-190.

[4] T. Figiel et N. Tomczak : Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces, Israel J. Math. 33 (1979) 155-171.

[5] R.C. James : Some self-dual properties of Banach spaces, Annals of Mathematical studies 69 (1972) 159-175.

[6] S. Kwapień : Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients, Studia Math. 44 (1972) 583-595.

[7] J.L. Lions et J. Peetre : Sur une classe d'espaces d'interpolation, Publications Math. de l'IHES No 19 (1962).

[8] B. Maurey et G. Pisier : Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, Studia Math. 58 (1976) 45-90.

[9] J. Neveu : Processus aléatoires gaussiens, Presses de l'Université de Montréal, 1968.

[10] G. Pisier : Un théorème sur les opérateurs entre espaces de Banach qui se factorisent par un Hilbert, à paraître aux Annales de l'ENS.

[11] Séminaire Maurey-Schwartz 1973-74, Ecole Polytechnique, Paris.

[12] Séminaire Maurey-Schwartz 1974-75, Ecole Polytechnique, Paris.

[13] Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach 1977-78, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[14] Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1978-79, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[15] E.M. Stein : Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory, Annals of Math. Studies No 63, Princeton (1970).
