S. Guerre

La propriété de Banach Saks ne passe pas de E à $L^2(E)$, d'après J. Bourgain

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 8, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE

D'ANALYSE FONCTIONNELLE

1979-1980

LA PROPRIETE DE BANACH SAKS NE PASSE PAS DE E À $L^2(E)$,

d'après J. BOURGAIN [3]

S. GUERRE

Exposé No VIII

14 Décembre 1979

INTRODUCTION.

On dit qu'un espace de Banach X a la propriété de Banach-Saks (BS) si de toute suite bornée (x_n) de X on peut extraire une sous-suite (x'_n) dont les moyennes de Cesaro $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i$ convergent dans X.

On dit qu'un espace de Banach X a la propriété de Banach-Saks-Rosenthal (BSR) si de toute suite faiblement convergente vers 0 (x_n) de E, on peut extraire une sous-suite (x'_n) dont les moyennes de Cesaro $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i$ convergent vers 0 dans X.

Il est clair qu'un espace de Banach X a BS si et seulement si il est réflexif et a BSR.

Ces notions ont été introduites pas H.P. Rosenthal [8] et A. Brunel et L. Sucheston [4],et étudiées ainsi que des notions voisines par B. Beauzamy [2].

De plus, il résulte aisément des résultats de [2] et [6] que ces propriétés passent aux espaces $\ell^p(X)$: "X a BS (resp. BSR) si et seulement si $\ell^p(X)$, pour $1<p<\infty$, a BS (resp. BSR)."

D'autre part, on sait que la propriété BSR ne passe pas aux espaces $L^p(X)$: dans [1], D.J. Aldous montre que l'espace $L^2(C_o)$ n'a pas la propriété BSR, alors que C_o l'a.

Le but de cet article est de montrer le même résultat pour la propriété BS. L'exemple de J. Bourgain [3] que nous allons donner ici est une extension de celui de D.J. Aldous, la difficulté consistant à remplacer C_o par un espace ayant BS.

Dans l'étude des propriétés de Banach-Saks, on utilise le théorème de Ramsey [9]. Ici nous aurons seulement besoin du résultat suivant que l'on obtient par des arguments du type Ramsey [5] :

Proposition 1 : Soit (x_n) une suite d'un espace de Banach X telle que pour tout $\varepsilon>0$ et pour toute sous-suite (x'_n) de (x_n), il existe une sous-suite (x''_n) de (x'_n) telle que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x''_i\right\| \leq \varepsilon$$

Alors, (x_n) a une sous-suite (x'_n) telle que pour toute sous-suite (x''_n) de (x'_n) on ait :

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Sup}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i''\right\| = 0$$

où $\varepsilon_i = \pm 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on notera $L^p(X)$ l'espace des classes de fonctions p-Brochner intégrables à valeurs dans X, sur un espace de probabilité.

I - CONSTRUCTION TECHNIQUE D'UN ESPACE $\mathcal{X}$ AYANT BS.

Une partie finie P de $\mathbb{N}$ est dite admissible si Card $P \leq$ Min P. On écrira $P < Q$ si Max $P <$ Min Q. Soit X un espace de Banach et (X_i) une suite de sous-espaces de X de dimension finie vérifiant l'hypothèse (H) :

(H) Pour toute suite croissante d'entiers (i_k) et pour toute suite bornée (x_k) de X telle que : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $x_k \in X_{i_k}$, il existe une sous-suite (x_k') de (x_k) dont les sommes de Cesaro convergent vers 0 dans X.

Notons $E[X_i]$ l'espace des suites finies (x_i) de X telles que $x_i \in X_i$ pour tout i. Si $\xi = (x_i)$ est dans $E[X_i]$ et si P est une partie finie de $\mathbb{N}$, on définit :

$$\|\xi\|_P = \left\|\sum_{i\in P} x_i\right\|_X \quad .$$

Soit enfin $\mathcal{X}$ le complété de $E[X_i]$ pour la norme :

$$\|\xi\| = \operatorname{Sup}\left(\sum_{s=1}^{r} \|\xi\|_{P_s}^2\right)^{1/2} \quad ,$$

où le Sup est pris sur tout ensemble $P_1\ldots P_r$ de parties admissibles deux à deux disjointes de $\mathbb{N}$.

De façon naturelle, les espaces X_i s'identifient à des sous-espaces de $\mathcal{X}$. On appellera π_i les projections de $\mathcal{X}$ sur les X_i. La suite (X_i) forme une décomposition inconditionnelle et "boundedly complete" de $\mathcal{X}$. En fait, si ξ et η sont des éléments à supports disjoints de $\mathcal{X}$, on a :

$$\|\xi + \eta\|^2 \geq \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 \quad .$$

Pour démontrer que $\mathcal{X}$ a la propriété BS, nous avons besoin de deux lemmes :

Lemme 1 : Soit (x_k) une suite bornée de $\mathfrak{X}$ et (i_k) une suite croissante d'entiers telle que $x_k \in X_{i_k}$ pour tout k. Alors (x_k) a une sous-suite (x'_k) dont toutes les sous-suites ont des moyennes de Cesaro qui convergent vers 0 dans $\mathfrak{X}$.

Démonstration : En appliquant l'hypothèse (H) et la proposition 1, on voit que (x_k) a une sous-suite (x'_k) telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Sup}_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, x'_i\right\|_X = 0 \quad .$$

Soit P une partie finie de $\mathbb{N}$. Posons $\begin{cases} \varepsilon_i = 1 \text{ si } i \in P \\ \varepsilon_i = -1 \text{ si } i \notin P \end{cases}$.

On a alors :

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i\right\|_P = \left\|\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\in P}}^{n} x'_i\right\| = \frac{1}{2}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, x'_i\right\|$$

$$\leq \operatorname{Sup}_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, x'_i\right\| \quad .$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Sup}_{P\subset\mathbb{N}} \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i\right\|_P = 0 \quad .$$

Si $P_1 \ldots P_r$ sont des ensembles admisssibles disjoints, on a alors :

$$\sum_{s=1}^{r} \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i\right\|^2_{P_s} \leq \operatorname{Sup}_{P\subset\mathbb{N}} \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i\right\|_P \left(\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{r} \left\|\sum_{i=1}^{n} x'_i\right\|_{P_s}\right)$$

$$\leq \operatorname{Sup}_{P\subset\mathbb{N}} \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i\right\|_P \cdot \frac{1}{n} \operatorname{Sup}_{k\in\mathbb{N}} \|x'_k\| \quad .$$

Donc $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i$ tend vers 0 dans $\mathfrak{X}$ quand n tend vers $+\infty$.
Le résultat du lemme 1 est obtenu en réappliquant la proposition 1 à la suite (x'_i) dans l'espace $\mathfrak{X}$.

Lemme 2 : Soit (ξ_n) une suite bornée de $\mathfrak{X}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Sup}_{i\in\mathbb{N}} \|\pi_i(\xi_n)\| = 0$. Alors (ξ_n) a une sous-suite (ξ'_n) telle que toutes les sous-suites de (ξ'_n) ont des moyennes de Cesaro qui convergent vers 0 dans $\mathfrak{X}$.

Démonstration : A cause de l'hypothèse sur la suite (ξ_n), on peut, par une technique standard, supposer que les (ξ_n) sont à supports disjoints et si S_n est le support de ξ_n, on peut encore supposer : $S_1 < S_2 < \ldots < S_n < \ldots$ Quitte à extraire une sous-suite de (ξ_n), on peut de plus supposer :

$$\operatorname*{Sup}_{i\in\mathbb{N}} \|\pi_i(\xi_n)\| \leq \frac{1}{2^n} \frac{1}{(\operatorname{Max} S_{n-1})^2} .$$

Alors, si $m < n$ et si P est un ensemble admissible tel que $P \cap S_m \neq \emptyset$, $(\operatorname{Card} P \leq \operatorname{Max} S_m)$, on a :

$$\|\xi_n\|_P = \|\sum_{i\in P} \pi_i(\xi_n)\| \leq \operatorname{Card} P \frac{1}{2^n} \frac{1}{(\operatorname{Max} S_{n-1})^2} \leq \frac{1}{2^n} \frac{1}{\operatorname{Max} S_m} .$$

Nous allons montrer que $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i$ converge vers 0 dans $\mathfrak{X}$. Soient $P_1,\ldots,P_r$ des ensembles admissibles disjoints. Posons : $n_s = \operatorname{Inf}\{n = 1,\ldots,N \text{ tels que } P_s \cap S_n \neq \emptyset\}$. On remarque que $\operatorname{Card}\{s, n_s = m\} \leq \operatorname{Card} S_m \leq \operatorname{Max} S_m$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{r} \|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_i\|_{P_s}^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^{N} \sum_{\{s,n_s=m\}} \|\sum_{i=1}^{N} \xi_i\|_{P_s}^2 \\
&\leq \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^{N} \sum_{\{s,n_s=m\}} (\|\xi_m\|_{P_s} + \sum_{n>m} \|\xi_n\|_{P_s})^2 \\
&\leq \frac{2}{N^2} \sum_{m=1}^{N} \sum_{\{s,n_s=m\}} \|\xi_m\|_{P_s}^2 + \frac{2}{N^2} \sum_{m=1}^{N} \sum_{\{s,n_s=m\}} (\sum_{n>m} \|\xi_n\|_{P_s})^2 \\
&\leq \frac{2}{N^2} \sum_{m=1}^{N} \|\xi_m\|^2 + \frac{2}{N^2} \sum_{m=1}^{N} \operatorname{Max} S_m \frac{1}{(\operatorname{Max} S_m)^2} (\sum_{n=m}^{N} \frac{1}{2^n})^2 \\
&\leq \frac{2}{N} [\operatorname*{Sup}_{m\in\mathbb{N}} \|\xi_m\|^2 + 1] .
\end{aligned}$$

Donc $\|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i\|$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Une nouvelle application de la proposition 1 complète la démonstration.

Nous pouvons maintenant démontrer la propriété annoncée :

[<u>Proposition 2</u> : L'espace $\mathfrak{X}$ a la propriété BS.

Etant donné que les X_i forment une décomposition "boundedly complete" de $\mathfrak{X}$ et qu'ils sont de dimension finie, on peut se limiter à considérer des suites (ξ_n) de $\mathfrak{X}$ qui vérifient :

$$\lim_{n\to+\infty} \pi_i(\xi_n) = 0 \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N} .$$

Par une technique standard, on peut encore considérer qu'une telle suite

(ξ_n) est à supports disjoints et aussi que $\|\xi_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Grâce à la proposition 1, il nous suffit alors de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, cette suite (ξ_n) a une sous-suite encore notée (ξ_n) telle que

$$\lim_{N\to+\infty} \left\|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i\right\| < \varepsilon \quad .$$

Pour cela, si $\xi_n = (x_n^i)_{i\in\mathbb{N}}$, posons : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, \delta > 0$:

$$I_{n,\delta} = \{i \in \mathbb{N} ,\ \|x_n^i\| \le \delta\} \quad , \quad J_{n,\delta} = \{i \in \mathbb{N} ,\ \|x_n^i\| > \delta\} \quad ,$$

$$\xi'_{n,\delta} = (x_n^i)_{i\in I_{n,\delta}} \quad , \quad \xi''_{n,\delta} = (x_n^i)_{i\in J_{n,\delta}} \quad ,$$

$$\lambda_\delta = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \|\xi'_{n,\delta}\| \quad , \quad \lambda = \operatorname*{Inf}_{\delta>0} \lambda_\delta = \lim_{\delta\to 0} \lambda_\delta \quad .$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\lambda_\delta \le \lambda + \frac{\varepsilon^2}{6} \quad .$$

Il est alors tout à fait immédiat que (ξ_n) a une sous-suite vérifiant :

(1) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\qquad \|\xi'_{n,\delta}\| \le \lambda_\delta + \frac{\varepsilon^2}{6}$

(2) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\qquad \|\xi'_{n,\frac{1}{n}}\| \ge \lambda_{\frac{1}{n}} - \frac{\varepsilon^2}{6}$.

Comme les éléments $\xi'_{n,1/n}$ et $\xi'_{n,\delta} - \xi'_{n,1/n}$ sont à supports disjoints, on a :

$$\left(\lambda_\delta + \frac{\varepsilon^2}{6}\right)^2 \ge \|\xi'_{n,\delta}\|^2 \ge \|\xi'_{n,1/n}\|^2 + \|\xi'_{n,\delta} - \xi'_{n,1/n}\|^2$$
$$\ge \left(\lambda_{1/n} - \frac{\varepsilon^2}{6}\right)^2 + \|\xi'_{n,\delta} - \xi'_{n,1/n}\|^2 \quad .$$

Or $\lambda_{1/n} \ge \lambda \ge \lambda_\delta - \frac{\varepsilon^2}{6}$. D'où :

$$\left(\lambda_\delta + \frac{\varepsilon^2}{6}\right)^2 - \left(\lambda_\delta - \frac{\varepsilon^2}{3}\right)^2 \ge \|\xi'_{n,\delta} - \xi'_{n,1/n}\|^2$$

on en déduit que :

$$\|\xi'_{n,\delta} - \xi'_{n,1/n}\|^2 \le \left(2\lambda_\delta - \frac{\varepsilon^2}{6}\right) \frac{\varepsilon^2}{2} \le \varepsilon^2 \quad .$$

Posons $u_n = \xi'_{n,1/n}$ et $v_n = \xi''_{n,\delta}$. Par construction, on a :

$$\|\xi_n - (u_n + v_n)\| = \|\xi'_{n,\delta} - \xi'_{n,1/n}\| \leq \varepsilon \quad .$$

Or la suite $(u_n + v_n)$ a une sous-suite dont les sommes de Cesaro convergent vers 0 dans $\mathcal{X}$. En effet, il suffit de voir que l'on a

$$\operatorname*{Sup}_{i\in\mathbb{N}} \|\pi_i(u_n)\| = \operatorname*{Sup}_{i\in I_{n,1/n}} \|x_n^i\| \leq \frac{1}{n}$$

donc que (u_n) vérifie les hypothèses du lemme 2 et que la suite (v_n) est telle que $\mathrm{Card}[\mathrm{Supp}\, v_n] = \mathrm{Card}[J_{n,\delta}] < \frac{1}{\delta^2}$. Donc le lemme 1, appliqué plusieurs fois donne le résultat pour la suite (v_n).

Ceci prouve la proposition 2.

II - CONSTRUCTION DE L'EXEMPLE.

Notons (e_i) la base canonique de C_o et $\| \ \|_\infty$ sa norme. Nous avons besoin d'un lemme :

Lemme 3 : Si $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de C_o et $(r_i(t))_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de Rademacher indépendantes, la suite $(y_i \otimes r_i(t))_{i\in\mathbb{N}}$ de $L^1(C_o)$ a une sous-suite dont les sommes de Cesaro convergent vers 0.

Démonstration : Il est facile de voir (par exemple [6]) qu'une suite bornée $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de C_o a une sous-suite équivalente à la base canonique de C_o, ou bien équivalente à la base sommante de C_o $[(\sum_{j=1}^{n} e_j)_{n\in\mathbb{N}}]$. Il suffit donc de prouver ce résultat pour ces deux suites particulières :
Or

(1) $$\int \Big\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i(t)\, e_i\Big\|_\infty dt = \frac{1}{n}$$

(2) $$\int \Big\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i(t) \sum_{j=1}^{i} e_j\Big\|_\infty dt = \frac{1}{n}\int \operatorname*{Sup}_{1\leq m\leq n} \Big|\sum_{i=m}^{n} r_i(t)\Big|\, dt$$

$$= \frac{1}{n}\int \operatorname*{Sup}_{1\leq m\leq n} \Big|\sum_{i=1}^{m} r_i(t)\Big|\, dt \leq \frac{2}{n}\int \Big|\sum_{i=1}^{n} r_i(t))\Big|\, dt$$

par l'inégalité de P. Lévy. On conclut par la loi des grands nombres.

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, le lemme suivant est déjà connu [1]. Nous donnons toutefois sa démonstration qui est fondamentale dans cette étude :

<u>Lemme 4</u> : Soit n un entier fixé et des fonctions de Rademacher indépendantes r_{ij} pour $1 \le i \le n$, $1 \le j \le 2^n$. Posons

$$\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^{2^n} r_{ij}(t)\, e_j$$

pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$.
Alors $\forall\, (a_i) \in \mathbb{R}^N$,

$$\int \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i\, \varphi_i(t) \Big\|_\infty dt \ge \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |a_i| \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Soient $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ n scalaires donnés et $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} a_i$.
Alors

$$\int \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i\, \varphi_i(t) \Big\|_\infty dt = \int \operatorname*{Sup}_{1\le j\le 2^n} \Big| \sum_{i=1}^{n} a_i\, r_{ij}(t) \Big|\, dt$$

$$\ge P(\Omega) \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

où $\Omega = \bigcup_{j=1}^{2^n} \bigcap_{i=1}^{n} \{r_{ij} = \varepsilon_i\}$.
Comme les r_{ij} sont indépendantes, on a :

$$P(\Omega) = 1 - P\Big(\bigcap_{j=1}^{2^n} \bigcup_{i=1}^{n} \{r_{ij} = -\varepsilon_i\}\Big) = 1 - \prod_{j=1}^{2^n} P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \{r_{ij} = -\varepsilon_i\}\Big)$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{2^n} \Big(1 - P \bigcap_{i=1}^{n} \{r_{ij} = \varepsilon_i\}\Big) = 1 - \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)^{2^n} \ge \frac{1}{2} \quad .$$

Soit $X = L^1(C_o)$ et $(r_i(t))$ une suite de fonctions de Rademacher indépendantes. Posons $e_{ij}(s) = r_i(s) e_j$ pour tout i et j. Soit $X_i = \operatorname{Span}\{e_{ij},\ 1 \le j \le 2^i\} \subset L^1(C_o)$. D'après le lemme 3, l'espace X et les sous-espaces X_i de X vérifient l'hypothèse (H). Donc l'espace $\mathcal{X}$ construit à partir de $L^1(C_o)$ selon la méthode de la partie II a la propriété BS.

<u>Proposition 3</u> : $L^2(\mathcal{X})$ n'a pas la propriété BS.

Remarquons que, comme $\mathcal{X}$ a BS, $\mathcal{X}$ est réflexif donc $L^2(\mathcal{X})$ aussi et par suite, il est équivalent de dire que $L^2(\mathfrak{X})$ n'a pas BS ou qu'il n'a pas BSR.

<u>Démonstration</u> : Considérons les fonctions de Rademacher indépendantes $r_{ij}(t)$ pour $1 \le i \le \infty$ et $1 \le j \le \infty$ et posons :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}, \qquad \Phi_i(t) = \sum_{j=1}^{2^i} r_{ij}(t)\, e_{ij} \quad .$$

Notons que les Φ_i forment une suite inconditionnelle et donc convergent faiblement vers 0.
Nous allons montrer que si P est un ensemble admissible de cardinal n on a :

$$\Big\| \sum_{i \in P} \Phi_i \Big\|_{L^2(\mathfrak{X})} \ge \frac{n}{2} \quad .$$

Il résulte des résultats de [2] que ceci est suffisant pour montrer que la suite (Φ_i) n'a pas de sous-suite dont les sommes de Cesaro convergent vers 0. Or :

$$\Big\| \sum_{i \in P} \Phi_i \Big\|_{L^2(\mathfrak{X})} \ge \int \Big\| \sum_{i \in P} \Phi_i(t) \Big\|_{\mathfrak{X}}\, dt$$

$$\ge \int \Big\| \sum_{i \in P} \Phi_i(t) \Big\|_P\, dt = \int \Big\| \sum_{i \in P} \Phi_i(t) \Big\|_X\, dt$$

$$= \int \Big\| \sum_{i \in P} \sum_{j=1}^{2^n} r_{ij}\, e_{ij} \Big\|_{L^1(C_o)}\, dt$$

$$= \iint \Big\| \sum_{i \in P}^{i} \sum_{j=1}^{2^i} r_{ij}(t)\, r_i(s)\, e_j \Big\|_\infty\, ds\, dt$$

$$\ge \iint \Big\| \sum_{j=1}^{2^n} \Big(\sum_{i \in P} r_{ij}(t)\, r_i(s) \Big) e_j \Big\|_\infty\, ds\, dt \quad (\text{car } n = \operatorname{Min} P = \operatorname{Card} P)$$

$$\ge \iint \sup_{1 \le j \le 2^n} \Big| \sum_{i \in P} r_{ij}(t)\, r_i(s) \Big|\, ds\, dt$$

$$= \int \Big(\int \sup_{1 \le j \le 2^n} \Big| \sum_{i \in P} r_{ij}(t)\, r_i(s) \Big|\, dt \Big)\, ds$$

$$\ge \frac{1}{2} \int \sum_{i \in P} |r_i(s)|\, ds = \frac{n}{2} \quad (\text{d'après le lemme 4}) \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.J. Aldous : Unconditional bases and martingales in $L^p(F)$, Maths. Proc. Cambridge Soc. (1979) 85-117.

[2] B. Beauzamy : Banach Saks properties and spreading models, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique 1978.

[3] J. Bourgain : On the Banach Saks property in Lebesgue spaces, Vrije Universiteit, Brussel, preprint 1979.

[4] A. Brunel and L. Sucheston : On B-convex Banach spaces, Maths. Systems theory, vol. 7, No 4 (1973).

[5] T. Figiel and L. Sucheston : An application of Ramsey sets in analysis, Advances in Maths., vol. 20, No 2 (1976).

[6] S. Guerre et J.T. Lapresté : Quelques propriétés des modèles étalés sur les espaces de Banach, preprint, Université Paris VI, 1979.

[7] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri : Classical Banach spaces, vol. 1, 2, Springer Verlag MLN 92.

[8] H.P. Rosenthal : Weakly independent sequences and the Banach Saks property, Proceedings of the Durham Symposium, July 1975.

[9] J. Silver : Every analytic set is Ramsey, J. Symb. Logic, 35 (1970) p. 60-64.
