H. Bercovici

Théorie de l'indice pour des opérateurs non-Fredholm

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 7, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1979-1980

THEORIE DE L'INDICE POUR DES OPERATEURS NON-FREDHOLM

H. BERCOVICI

Exposé No VII

7 Décembre 1979

Nous allons utiliser les notations et les résultats de l'exposé précédent.

§ 1. INTRODUCTION.

Soit H un espace de Hilbert. Rappelons qu'un opérateur $X \in B(H)$ est un opérateur de Fredholm si

(i) $\overline{XH} = XH$, et

(ii) $\dim \operatorname{Ker} X < \infty$, $\dim \operatorname{Ker} X^* < \infty$.

L'indice de l'opérateur de Fredholm X est le nombre entier

$$i(X) = \dim \operatorname{Ker} X - \dim \operatorname{Ker} X^* \quad .$$

Si on désigne par $\mathfrak{F}(H)$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm les suivantes assertions peuvent être vérifiées

(1.1) $\mathfrak{F}(H)$ est un sous-ensemble ouvert de $B(H)$.

(1.2) Si $X, Y \in \mathfrak{F}(H)$, on a $XY \in \mathfrak{F}(H)$ et $i(XY) = i(X) + i(Y)$.

(1.3) Si $X \in \mathfrak{F}(H)$ et $K \in B(H)$ est un opérateur compact, on a $X + K \in \mathfrak{F}(H)$ et $i(X+K) = i(X)$.

(1.4) Si $\dim H < \infty$, on a $\mathfrak{F}(H) = B(H)$ et $i(X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{F}(H)$. En particulier on a $\operatorname{Ker} X^* = \{0\}$ pour tout opérateur surjectif $X \in B(H)$.

Une propriété analogue à (1.4) a été démontrée par B. Sz. Nagy et C. Foias pour des espaces de dimensions infinies. Notamment on a le résultat suivant :

1.5 Théorème [6] : Soit $T \in B(H)$ une contraction de classe C_0 et de multiplicité finie. Alors tout opérateur injectif $X \in \{T\}'$ $(=\{Y \in B(H) : TY = YT\})$ est une quasi-affinité, donc $\operatorname{Ker} X^* = \{0\}$.

Ce théorème a suggéré l'introduction d'une nouvelle classe d'opérateurs de Fredholm ainsi qu'une nouvelle notion de finitude. D'abord la notion de finitude. On dira qu'un opérateur $T \in B(H)$ a la propriété (P) s'il vérifie la conlusion du théorème 1.5, c'est-à-dire

(P) toute injection $X \in \{T\}'$ est une quasi-affinité.

Soient $T \in B(H)$, $T' \in B(H')$ et $X : H \to H'$ tels que $T'X = XT$.

1.6 Définition : On dit que X est un (T,T')-isomorphisme si l'application

$$\mathrm{Lat}(T) \ni M \longmapsto \overline{XM} \in \mathrm{Lat}(T')$$

est un isomorphisme.

Nous désignerons par $\mathrm{Lat}_{1/2}(T)$ l'ensemble des sous-espaces semi-invariants par T (espaces de la forme $M \ominus N$ avec $M,N \in \mathrm{Lat}(T)$ et $M \supset N$) et pour $M \in \mathrm{Lat}_{1/2}(T)$ on posera

(1.7) $$T_M = P_M T | M \quad .$$

Nous pouvons maintenant donner la définition des opérateurs de Fredholm généralisés.

1.8 <u>Définition</u> : Soit $T \in B(H)$, soit $X \in \{T\}'$. On dit que X est un opérateur de Fredholm par rapport à T si les conditions suivantes sont remplies :

(i) $X|(\mathrm{Ker}\, X)^{\perp}$ est un $(T_{(\mathrm{Ker}\, X)^{\perp}}, T|\overline{XH})$-isomorphisme ;

(ii) $T|\mathrm{Ker}\, X$ et $T_{\mathrm{Ker}\, X^*}$ ont la propriété (P).

Nous désignerons par $F(T)$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm par rapport à T. La situation qui nous intéresse est celle des opérateurs T de classe C_o. Dans la section suivante nous étudions le cas plus particulier des opérateurs T algébriques.

Les opérateurs de Fredholm dans le sens classique sont obtenus pour $T = 0$. En effet, $0 = T \in B(H)$ a la propriété (P) si et seulement si $\dim H < \infty$ (parce que dans des espaces de dimensions infinies on peut trouver des isométries non-unitaires). Dans la définition 1.6, pour $T = 0$ et $T' = 0$ un (T,T')-isomorphisme est tout simplement un opérateurs inversible. Donc la condition (i) de 1.8 signifie que XH est un sous-espace fermé et la condition (ii) signifie $\dim \mathrm{Ker}\, X < \infty$ et $\dim \mathrm{Ker}\, X^* < \infty$.

§ 2. <u>LE CAS DES OPERATEURS ALGEBRIQUES</u>.

Rappelons qu'un opérateur $T \in B(H)$ est un opérateur algébrique si $p(T) = 0$ pour un polynôme $p \neq 0$.

2.1 <u>Lemme</u> : Un opérateur algébrique $T \in B(H)$ a la propriété (P) si et seulement si $\dim H < \infty$.

Preuve : Ceci résultera de la caractérisation des opérateurs de classe C_o ayant la propriété (P).

2.2 Lemme : Soient $T \in B(H)$, $T' \in B(H')$ des opérateurs algébriques et soit $X : H \to H'$ un (T,T')-isomorphisme. Alors X est inversible.

Preuve : Puisque $\operatorname{Ker} X \in \operatorname{Lat}(T)$ et

$$X(\operatorname{Ker} X) = X(\{0\}) = \{0\} \quad ,$$

on a $\operatorname{Ker} X = \{0\}$, donc X est injectif.

Soit $h' \in H'$; l'espace $H'_{h'} = \bigvee_{n\geq 0} T'^n h' \in \operatorname{Lat}(T')$ est de dimension finie. Si $H'_{h'} = \overline{XM}$ on a aussi $H'_{h'} = \overline{XM}$ et il résulte que $h' \in XH$, donc X est surjectif. L'opérateur X^{-1} est continu en vertu du théorème de Banach.

Q.E.D.

Pour les opérateurs $T \in B(H)$ avec $\dim H < \infty$ on peut introduire un remplaçant de la dimension. Notamment, on posera

(2.3) $$p_T(\lambda) = \det(\lambda I - T)$$

donc p_T est le polynôme caractéristique de T.
Plus généralement, pour un opérateur algébrique T et un espace de dimension finie $M \in \operatorname{Lat}_{1/2}(T)$ on posera

(2.4) $$p_T(M) = p_{T_M} \quad .$$

On a évidemment :

2.5 Lemme : Soit $T \in B(H)$ et $M \in \operatorname{Lat}(T)$ avec $\dim H < \infty$. On a

$$p_T = p_T(M) \cdot p_T(M^{\perp}) \quad .$$

Donc p_T est une "dimension" multiplicative. Pour un opérateur algébrique $T \in B(H)$ et pour $X \in F(T)$, il est donc naturel de définir l'indice comme un quotient :

(2.6) $$\operatorname{ind}(X) = p_T(\operatorname{Ker} X)/p_T(\operatorname{Ker} X^*) \quad .$$

Les propriétés (1,1-4) sont vérifiées pour $F(T)$, mais on a

(2.7) $$\mathrm{ind}(XY) = \mathrm{ind}(X)\,\mathrm{ind}(Y) \quad \text{pour } X,Y \in F(T) \quad ,$$

et $\mathfrak{F}(T)$ est un ensemble ouvert de $\{T\}'$. En effet, on a dans ce cas $\mathfrak{F}(T) = \mathfrak{F}(H) \cap \{T\}'$. Voyons maintenant quelle est la liaison entre $i(X)$ et $\mathrm{ind}(X)$ pour $X \in \mathfrak{F}(T)$.
Si le spectre de T est

$$\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$$

on peut décomposer H dans une somme directe :

$$H = H_1 \dotplus H_2 \dotplus \ldots \dotplus H_k \quad , \quad H_j \in \mathrm{Lat}(T) \quad ,$$

telle que $\sigma(T|H_j) = \{\lambda_j\}$, $1 \leq j \leq k$. Les espaces H_j sont même hyper-invariants donc pour $X \in F(T)$ on a $XH_j \subset H_j$ et $X|H_j$ est un opérateur de Fredholm.
Si n_j est l'indice classique de $X|H_j$ ($n_j = i(X|H_j)$) on a

$$\mathrm{ind}(X)(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \quad ,$$

et

$$i(X) = \sum_{j=1}^{k} n_j \quad .$$

Donc $\mathrm{ind}(X)$ indique l'indice classique de chaque restriction $X|H_j$.

§ 3. <u>LE CAS DES OPERATEURS DE CLASSE</u> C_o.

Nous allons caractériser d'abord les opérateurs de classe C_o ayant la propriété (P).

3.1 <u>Lemme</u> : Soit $T \in B(H)$ et $\{M_j\}_{j=0}^{\infty}$ une séquence de sous-espaces hyperinvariants pour T telle que

$$H = \bigvee_{j \geq 0} M_j \quad .$$

Si $T|M_j$ a la propriété (P) pour chaque j alors T a la propriété (P).

<u>Preuve</u> : Soit $X \in \{T\}'$ une injection. L'opérateur $X|M_j \in \{T|M_j\}'$ est aussi injectif et il s'ensuit de la propriété (P) que $\overline{XM_j} = M_j$. On a alors

$$\overline{XH} \supset \bigvee_{j \geq 0} XM_j = \bigvee_{j \geq 0} M_j = H$$

donc X est une quasi-affinité.

3.2 <u>Théorème</u> : Soit $T \in B(H)$ un opérateur de classe C_o et soit $\bigoplus_{j=0}^{\infty} S(m_j)$ son modèle de Jordan. Alors T a la propriété (P) si et seulement si $\bigwedge_{j\geq 0} m_j = 1$.

<u>Preuve</u> : Les espaces $M_j = \overline{m_j(T)H}$ sont hyperinvariants pour T et le modèle de Jordan de $T|M_j$ est

$$S(m_o/m_j) \oplus S(m_1/m_j) \oplus \ldots \oplus S(m_{j-1}/m_j)$$

donc $T|M_j$ est un opérateur de multiplicité finie. Il résulte du Théorème 1.5 que $T|M_j$ a la propriété (P). Si $\bigwedge_{j\geq 0} m_j = 1$ on a

$$\bigvee_{j\geq 0} M_j = \bigvee_{j\geq 0} m_j(T)H = (\bigwedge_{j\geq 0} m_j(T))H = H$$

donc T a la propriété (P) en vertu du Lemme 3.1.

Réciproquement, si $\bigwedge_{j\geq 0} m_j = m \neq 1$ alors les opérateurs $T\oplus S(m)$ et T sont quasi-similaires. Soit X une quasi-affinité telle que

$$(3.3) \qquad (T\oplus S(m))X = XT \quad .$$

Posons

$$(3.4) \qquad M = X^*(\{0\}\oplus H(m)) \quad , \quad N = H \ominus M \in \mathrm{Lat}(T) \quad .$$

Si P est la projection de $H\oplus H(m)$ sur H, l'opérateur

$$(3.5) \qquad Y = PX|N$$

satisfait la relation

$$(3.6) \qquad TY = Y(T|N) \quad .$$

On peut démontrer que Y est une quasi-affinité, donc T et $T|N$ sont quasi-similaires. On peut alors choisir un opérateur $Z \in \{T\}'$ injectif et tel que $\overline{ZH} = N \neq H$; il s'ensuit que T n'a pas la propriété (P).

Du théorème 3.2, il résulte que la propriété (P) est invariante par rapport aux quasi-similarités (pour la classe C_o). Il résulte aussi qu'un opérateur T de classe C_o a la propriété (P) si et seulement si T^* a la propriété (P).

La proposition suivante est une conséquence du Théorème 3.2.

3.7 <u>Proposition</u> : Soit T un opérateur de classe C_o et soit $M \in \mathrm{Lat}(T)$. Alors T a la propriété (P) si et seulement si $T|M$ et $T_{M^\perp}$ ont la propriété (P).

3.8 <u>Proposition</u> : Soit T un opérateur de classe C_o et soit $X \in \{T\}'$ une injection. Si T a la propriété (P), X est un (T,T)-isomorphisme.

<u>Preuve</u> : Soient $M, M' \in \mathrm{Lat}(T)$ tels que $\overline{XM} = \overline{XM'} = K$. On a aussi $\overline{X(M \vee M')} = K$; il résulte que les opérateurs $T|M \vee M'$, $T|M$ et $T|M'$ sont quasi-similaires. Mais $T|M \vee M'$ a aussi la propriété (P) donc on déduit comme dans la preuve de 3.2 que $M = M \vee M' = M'$. La surjectivité de l'application

$$\mathrm{Lat}(T) \ni M \longmapsto \overline{XM} \in \mathrm{Lat}(T)$$

résulte du fait que T^* a aussi la propriété (P).

§ 4. <u>FONCTIONS INTERIEURES GENERALISEES</u>.

Voyons maintenant quelle pourrait être le remplaçant de la "dimension" p_T introduite pour les opérateurs T algébriques. Si $T \in B(H)$ et $\dim H < \infty$, le polynôme caractéristique coïncide avec le produit des diviseurs élémentaires de la matrice caractéristique $\lambda I - T$. Il est donc naturel de définir pour un opérateur de classe C_o avec le modèle "fini" $S(m_o) \oplus S(m_1) \oplus \dots \oplus S(m_n)$ le déterminant

$$d_T = m_o\, m_1 \dots m_n \quad . \tag{4.1}$$

Malheureusement pour un opérateur T avec modèle "infini" $S(m_o) \oplus S(m_1) \oplus \dots$ le produit infini $m_o\, m_1 \dots$ peut être convergent vers zéro même si T a la propriété (P).

Rappelons qu'une fonction intérieure $m \in H^\infty$ admet une décomposition unique de la forme

$$m = c\ BS \tag{4.2}$$

où c est une constante de module 1, B est un produit de Blaschke :

$$(4.3)\qquad m(\lambda) = \prod_K \frac{\overline{\lambda}_K}{|\lambda_K|} \cdot \frac{\lambda_K - \lambda}{1 - \overline{\lambda}_K \lambda} \quad \text{avec} \quad \sum_K (1 - |\lambda_K|) < \infty$$

et S est une fonction de la forme

$$(4.4)\qquad S(\lambda) = \exp - \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + \lambda}{e^{it} - \lambda} \, d\mu(t)$$

où μ est une mesure finie singulière par rapport à dt.
Si on pose $\sigma(\lambda) = \text{card}\{k : \lambda_K = \lambda\}$, la fonction m est complètement déterminée par la paire (σ,μ). La condition (4.3) est équivalente à

$$(4.5)\qquad \sum_{|\lambda|<1} \sigma(\lambda)(1 - |\lambda|) < \infty \quad .$$

Posons $\gamma(m) = (\sigma,\mu)$. L'ensemble des fonctions intérieures $m \in H^\infty$ peut être identifié (par l'intermède de γ) avec l'ensemble Γ_o des paires (σ,μ) où $\sigma : \{\lambda : |\lambda| < 1\} \to \{0,1,2,\dots\}$ satisfait (4.5) et μ est une mesure borélienne finie sur $[0,2\pi]$, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

Une fonction intérieure généralisée est une paire (σ,μ) où $\sigma : \{\lambda : |\lambda| < 1\} \to \{0,1,2,\dots\}$ satisfait la condition

$$(4.6)\qquad \sum_{\sigma(\lambda)\neq 0} (1 - |\lambda|) < \infty$$

et μ est une mesure borélienne sur $[0,2\pi]$ telle que $\mu \prec \nu$ pour une mesure ν borélienne finie singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Ici la continuité $\mu \prec \nu$ signifie

$$(4.7)\qquad \mu = \bigvee_{n\geq 0} (\mu \wedge n\nu) \quad .$$

L'ensemble Γ des fonctions intérieures généralisées est un semi-groupe par rapport à l'addition. Evidemment pour deux fonctions intérieures m, $m' \in H^\infty$ on a $\gamma(mm') = \gamma(m) + \gamma(m')$.

Soit maintenant T un opérateur de classe C_o et soit $S = S(m_o) \oplus S(m_1) \oplus \dots$ son modèle de Jordan. Si T a la propriété (P) la somme

$$(4.7)\qquad \gamma_T = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma(m_j)$$

est un élément de Γ. En effet, si $\gamma_T = (\sigma,\mu)$ on a

$$\sum_{\sigma(\lambda)\neq 0} (1-|\lambda|) \leq \sum \sigma_o(1-|\lambda|)$$

où $\gamma(m_o) = (\sigma_o,\mu_o)$ et encore $\mu \prec \mu_o$.

Il est facile de voir que réciproquement chaque fonction intérieure généralisée est de la forme γ_T où T est un opérateur de classe C_o ayant la propriété (P).

En général, si T est un opérateur de classe C_o et $M \in \mathrm{Lat}_{1/2}(T)$ est tel que T_M a la propriété (P) on posera

(4.8) $$\gamma_T(M) = \gamma_{T_M} .$$

La fonction $\gamma_T(M)$ joue le rôle de la dimension de M. En effet on a :

4.9 <u>Théorème</u> : Soit T un opérateur de classe C_o ayant la propriété (P) et soit $M \in \mathrm{Lat}_{1/2}(T)$; on a

$$\gamma_T = \gamma_T(M) + \gamma_T(M^\perp) .$$

La preuve de ce théorème peut être faite d'abord pour les contractions T de multiplicité finie.
L'extension du résultat pour le cas général est une question de technique.

Une conséquence du théorème 4.9 est le résultat suivant :

4.10 <u>Théorème</u> : Soit T un opérateur de classe C_o ayant la propriété (P). Pour tout $X \in \{T\}'$ on a

$$\gamma_T(\mathrm{Ker}\ X) = \gamma_T(\mathrm{Ker}\ X^*) .$$

<u>Preuve</u> : On a évidemment :

$$\gamma_T = \gamma_T(\mathrm{Ker}\ X) + \gamma_T(\mathrm{Ker}\ X)^\perp)$$

$$= \gamma_T(\mathrm{Ker}\ X^*) + \gamma_T((\mathrm{Ker}\ X^*)^\perp) .$$

Mais les opérateurs $T_{(\mathrm{Ker}\ X)^\perp}$ et $T|(\mathrm{Ker}\ X^*)^\perp = T|\overline{XH}$ sont quasi-similaires donc

$$\gamma_T((\mathrm{Ker}\ X)^\perp) = \gamma_T((\mathrm{Ker}\ X^*)^\perp) = \gamma .$$

Il résulte que

$$\gamma_T(\mathrm{Ker}\ X) + \gamma = \gamma_T(\mathrm{Ker}\ X^*) + \gamma$$

d'où $\gamma_T(\mathrm{Ker}\ X) = \gamma_T(\mathrm{Ker}\ X^*)$ si l'élément γ est simplifiable.
On peut étendre la démonstration pour le cas de γ non-simplifiable. en moyennant une certaine approximation.

Le théorème 4.10 admet une réciproque.
Soit A et A_* deux opérateurs de classe C_0 avec la propriété (P). On introduit la relation ρ de la manière suivante : $A\rho\ A_*$ si et seulement si il existe T et X tels que T est de classe C_0 avec la propriété (P), $X \in \{T\}'$ et A, A_* sont quasi-similaires à $T|\mathrm{Ker}\ X$, $T_{\mathrm{Ker}\ X^*}$ respectivement.

4.11 <u>Théorème</u> : On a $A\rho^2\ A_*$ si et seulement si $\gamma_A = \gamma_{A^*}$.

Il s'ensuit que γ_T est essentiellement la seule notion de "dimension" admissible dans le contexte des opérateurs de classe C_0.

Pour les démonstrations complètes des résultats de cette section (et de la suivante) voir [3].

Récemment, L. Kérchy [9] a démontré la réciproque du Th. 4.10, donc $\rho^2 = \rho$ est une relation d'équivalence.

§ 5. <u>L'INDICE DE FREDHOLM GENERALISE</u>.

Le semi-groupe Γ ne peut pas être plongé dans un groupe ; en effet la soustraction ne peut pas être effectuée d'une manière unique dans Γ. Nous pouvons tout de même introduire sur l'ensemble $G = \Gamma \times \Gamma$ la relation "$\sim$" par

$$(\gamma,\gamma') \sim (\gamma_1,\gamma_1') \quad \text{si et seulement si} \quad \gamma + \gamma_1' = \gamma' + \gamma_1 \ .$$

La relation "$\sim$" n'est pas une relation d'équivalence.

5.1 <u>Définition</u> : Soit $T \in B(H)$ un opérateur de classe C_0 et soit $X \in \mathfrak{F}(H)$. L'indice généralisé de X est

(5.2) $$j(X) = (\gamma_T(\mathrm{Ker}\ X), \gamma_T(\mathrm{Ker}\ X^*)) \in G \ .$$

Avec cette définition, on peut démontrer les résultats suivants :

5.3 <u>Théorème</u> : Soit $T \in B(H)$ un opérateur de classe C_0 et soient

$X,Y \in F(T)$. Alors $XY \in F(T)$ et on a

$$j(XY) \sim j(X) + j(Y) \quad .$$

5.4 <u>Théorème</u> : Soit $T \in B(H)$ un opérateur de classe C_o , soient $X \in F(T)$, $Y \in \{T\}'$ tels que $T|\overline{YH}$ a la propriété (P) . Alors $X + Y \in F(T)$ et

$$j(X+Y) \sim j(X) + (\gamma,\gamma)$$

où $\gamma = \gamma_T(\overline{YH})$. En particulier, si γ est un élément simplifiable, on a $j(X+Y) \sim j(X)$.

Nous allons démontrer ici un cas particulier de 5.4.

5.5 <u>Théorème</u> : Soit $T \in B(H)$ un opérateur de classe C_o et soit $X \in \{T\}'$ tel que $T|\overline{XH}$ a la propriété (P). Alors $I + X \in F(T)$ et $\gamma_T(\mathrm{Ker}(I+X)) = \gamma_T(\mathrm{Ker}(I+X)^*)$, donc $j(I+X) \sim (0,0)$.

<u>Preuve</u> : Montrons d'abord que l'application

$$\mathrm{Lat}(T) \ni M \longmapsto \overline{(I+X)M} \in \mathrm{Lat}(T|\overline{(I+X)H})$$

est surjective. Soit en effet $N \in \mathrm{Lat}(T)$, $N \subset \overline{(I+X)H}$ et soit P la projection orthogonale de H sur $(\mathrm{Ker}\ X)^{\perp}$. Puisque $PN \subset \overline{P(I+X)H}$, $T_{(\mathrm{Ker}\ X)^{\perp}}P = PT$ et $T_{(\mathrm{Ker}\ X)^{\perp}}$ a la propriété (P) nous déduisons de la Proposition 2.3 de [3] que l'ensemble

$$N' = \{h \in N : Ph \in P(I+X)H\}$$

est dense dans N. Maintenant on peut voir que

$$N' \subset (I+X)H \quad ;$$

en effet $N' \subset (I+X)H + \mathrm{Ker}\ X$ et

$$\mathrm{Ker}\ X \subset (I+X)H$$

puisque $h = (I+X)h$ pour $h \in \mathrm{Ker}\ X$. Donc nous avons $N = \overline{(I+X)M}$ avec $M = (I+X)^{-1}N$.

Le même argument appliqué à $I + X^*$ montre que $(I + X)|(\mathrm{Ker}(I + X))^{\perp}$ est un isomorphisme (dans le sens de la définition 1.8).
Maintenant remarquons que de l'inclusion

$$\mathrm{Ker}(I + X) \subset XH$$

(qui résulte du fait que $h = -Xh$ si $(I + X)h = 0$) il s'ensuit que $T|\mathrm{Ker}(I + X)$ a la propriété (P). Le même raisonnement appliqué à $I + X^*$ montre que $T_{\mathrm{Ker}(I+X)^*}$ a aussi la propriété (P). Donc $I + X$ est un opérateur de Fredholm par rapport à T.

Il reste à calculer $j(I + X)$. Considérons dans ce but la décomposition orthogonale

$$H = U \oplus V \quad , \quad U = \overline{XH} \quad .$$

Par rapport à cette décomposition on a

$$I = \begin{bmatrix} I_U & 0 \\ & \\ 0 & I_V \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} X' & X'' \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $X' \in \{T|U\}'$. Puisque $T|U$ a la propriété (P) (par l'hypothèse) il s'ensuit du théorème 4.10 que

(5.6) $$\gamma_T(\mathrm{Ker}(I + X')) = \gamma_T(\mathrm{Ker}(I + X')^*) \quad .$$

Nous pouvons vérifier l'égalité

$$\mathrm{Ker}(I + X) = \mathrm{Ker}(I + X') \quad .$$

En effet, l'inclusion $\mathrm{Ker}(I + X') \subset \mathrm{Ker}(I + X)$ est immédiate. Si $h \in \mathrm{Ker}(I + X)$ on a $h = -Xh \in U$ donc $h = -X'h$ $(X' = X|U)$ et par conséquent $h \in \mathrm{Ker}(I + X')$.
On a en particulier

(5.7) $$\gamma_T(\mathrm{Ker}(I + X)) = \gamma_T(\mathrm{Ker}(I + X')) \quad .$$

On peut maintenant vérifier, en moyennant la représentation matricielle de X, que $u \oplus v \in \mathrm{Ker}(I + X)^*$ si et seulement si

(5.8) $$u \in \mathrm{Ker}(I + X')^* \quad \text{et} \quad v = -X''^* u \quad .$$

Désignons par Q la projection de H sur U ; il résulte de (5.8) que $Q|\mathrm{Ker}(I+X)^*$ est un opérateur invertible de $\mathrm{Ker}(I+X)^*$ sur $\mathrm{Ker}(I+X')^*$. L'inverse est donné par

$$\mathrm{Ker}(I+X')^* \ni u \longmapsto u \oplus (-X''^* u) \quad .$$

Nous avons aussi $T_U^* Q = Q T^*$ donc les opérateurs $T_U^*|\mathrm{Ker}(I+X')^*$ et $T^*|\mathrm{Ker}(I+X)^*$ sont similaires. On a en particulier

$$\gamma_T(\mathrm{Ker}(I+X)^*) = \gamma_T(\mathrm{Ker}(I+X')^*) \quad . \tag{5.9}$$

L'égalité $\gamma_T(\mathrm{Ker}(I+X)) = \gamma_T(\mathrm{Ker}(I+X)^*)$ résulte des relations (5.6-9).

Remarquons que les théorèmes 5.4 et 5.5 correspondent, dans la théorie classique, au théorème de perturbation par un opérateur de rang fini. En général l'ensemble F(T) n'est pas fermé donc nous n'avons pas l'analogue du théorème de perturbation par un opérateur de norme petite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Bercovici, C. Foias, B. Sz. Nagy : Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0, III, Acta Sci. Math., 37 (1975) 313-322.

[2] H. Bercovici, D. Voiculescu : Tensor operations on characteristic functions of C_0 contractions , Acta Sci. Math., 39 (1977) 205-233.

[3] H. Bercovici : C_0-Fredholm operators, I, Acta Sci. Math., 41 (1979) 15-27 ; II, à paraître.

[4] B. Sz. Nagy, C. Foias : Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0 (I), Acta Sci. Math., 31 (1970) 287-296.

[5] B. Sz. Nagy, C. Foias : Modèle de Jordan pour une classe d'opérateurs de l'espace de Hilbert, Acta Sci. Math., 31 (1970) 91-115.

[6] B. Sz. Nagy, C. Foias : On injections intertwining operators of class C_0, Acta Sci. Math , 40 (1978) 163-167.

[7] P.L. Duren : H^p-spaces, Academic Press (1970).

[8] M. Uchiyama : Quasi-similarity of restricted C_0 contractions, Acta Sci. Math. (à paraître).

[9] L. Kérchy : On C_0-operators having the property (P), à paraître.
