Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

M. Levy

Prolongement d'un opérateur d'un sous-espace de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 5, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1979-1980

PROLONGEMENT D'UN OPERATEUR D'UN SOUS-ESPACE DE $L^1(\mu)$ DANS $L^1(\nu)$

M. LEVY

Exposé No V — 23 Novembre 1979

D'après un résultat de Grothendieck ([1]) si T est un opérateur linéaire continu de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$, alors l'image par T de toute partie bornée pour l'ordre de $L^1(\mu)$ est une partie bornée pour l'ordre de $L^1(\nu)$.

Plus précisément :

$$\forall\, n,\ \forall\, f_1,\dots,f_n \in L^1(\mu),\quad \int \max_{1\le i\le n} |Tf_i|\, d\nu \le \|T\| \int \max_{1\le i\le n} |f_i|\, d\mu \quad .$$

Soit Y un sous-espace de $L^1(\mu)$, et T un opérateur linéaire continu de Y dans $L^1(\nu)$. Soit

$$\alpha(T) = \inf\{C,\ \forall\, n,\ \forall\, f_1,\dots,f_n \in Y,\ \int \max_{1\le i\le n} |Tf_i|\, d\nu \le C \int \max_{1\le i\le n} |f_i|\, d\mu\} \quad .$$

Il est clair que si T admet un prolongement continu $\tilde{T}$ de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$, alors : $\alpha(T) \le \|\tilde{T}\|$, et donc $\alpha(T)$ est fini.

Le théorème suivant, qui répond à une question de H.P. Rosenthal, montre que la réciproque est vraie.

<u>Théorème</u> : Soit T un opérateur linéaire continu d'un sous-espace Y de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$. Si $\alpha(T)$ est fini, il existe un opérateur $\tilde{T}$ de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$, prolongeant T, et tel que $\|\tilde{T}\| = \alpha(T)$.

<u>Démonstration</u> : Nous étudions d'abord le cas où $L^1(\mu)$ et $L^1(\nu)$ sont égaux respectivement à ℓ^1_n et ℓ^1_p, puis nous passerons au cas général en utilisant la structure locale inconditionnelle des espaces L^1.

<u>Lemme 1</u> : Soit Y un sous-espace de ℓ^1_n. Si l'on munit l'espace $E = \mathcal{L}(Y,\ell^1_p)$ de la norme α, alors son dual E' est isométrique à $\mathcal{L}(\ell^1_p,Y)$ muni de la norme β_Y définie par :

$$\beta_Y(S) = \inf \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i| \Big\|_\infty \Big\| \max_{1\le i\le k} |y_i| \Big\|_1 \quad ,$$

où l'inf. est pris sur toutes les représentations de S de la forme :

$$Sx = \sum_{i=1}^{k} \langle \varphi_i , x \rangle\, y_i \quad ,$$

où $\varphi_i \in \ell^\infty_p$. $y_i \in Y$, $1 \le i \le k$.

Démonstration du lemme 1 : On utilise la dualité de trace.

Si $T \in \mathcal{L}(Y, \ell_p^1)$, $S \in \mathcal{L}(\ell_p^1, Y)$, avec $Sx = \sum_{i=1}^{k} \langle \varphi_i, x\rangle\, y_i$, alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(ST) &= \sum_{i=1}^{k} \langle \varphi_i, T\, y_i\rangle \\ &\le \Big\| \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i| \Big\|_\infty \Big\| \max_{1\le i\le k} |T\, y_i| \Big\|_1 \\ &\le \alpha(T) \Big\| \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i| \Big\|_\infty \Big\| \max_{1\le i\le k} |y_i| \Big\|_1 . \end{aligned}$$

Donc
$$\mathrm{Tr}(ST) \le \alpha(T) \cdot \beta_Y(S) ,$$

et
$$\sup_{\beta_Y(S)\le 1} \mathrm{Tr}(ST) \le \alpha(T) .$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $y_1, \dots, y_k$ des éléments de Y tels que :

$$\Big\| \max_{1\le i\le k} |y_i| \Big\|_1 = 1 \quad \text{et} \quad \Big\| \max_{1\le i\le k} |T\, y_i| \Big\|_1 \ge \alpha(T) - \varepsilon .$$

Le dual de $\ell_p^1(\ell_k^\infty)$ est isométrique à $\ell_p^\infty(\ell_k^1)$. Donc soit $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ des éléments de ℓ_p^∞ tels que :

$$\Big\| \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i| \Big\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} \langle \varphi_i, T\, y_i\rangle = \Big\| \max_{1\le i\le k} |T\, y_i| \Big\|_1 .$$

Définissons maintenant $S \in \mathcal{L}(\ell_p^1, Y)$ par :

$$Sx = \sum_{i=1}^{k} \langle \varphi_i, x\rangle\, y_i .$$

Il est clair que $\beta_Y(S) \le 1$, et que $\mathrm{Tr}\, ST \ge \beta(T) - \varepsilon$.
On en déduit que :

$$\alpha(T) = \sup_{\beta_Y(S)\le 1} \mathrm{Tr}\, ST ,$$

ce qui démontre le lemme 1.

Lemme 2 : Soit $\{e_i\}_{1\le i\le p}$ la base canonique de ℓ_p^1, et N la norme nucléaire de $\mathcal{L}(\ell_p^1, \ell_n^1)$. Alors pour tout sous-espace Y de ℓ_n^1, et pour tout S de $\mathcal{L}(\ell_p^1, Y)$, on a :

$$\beta_{\ell_n^1}(S) = \beta_Y(S) = N(S) = \Big\| \max_{1\le i\le p} |S\, e_i| \Big\|_1 .$$

<u>Démonstration du lemme 2</u> : Soit $(e_i^*)_{1\le i\le p}$ la base canonique. L'opérateur S admet la représentation particulière :

$$Sx = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i^*, x\rangle \, S\, e_i \; .$$

Soit $Sx = \sum_{i=1}^{k} \langle \varphi_i, x\rangle x_i$ une autre représentation de S, où $\varphi_i \in \ell_p^\infty$, $x_i \in \ell_n^1$, $1 \le i \le k$. Alors, pour $j = 1,\dots,p$:

$$|S\,e_j| = \Big|\sum_{i=1}^{k} \langle \varphi_i, e_j\rangle\, x_i\Big| \le \sum_{i=1}^{k} |\langle \varphi_i, e_j\rangle|\, |x_i|$$
$$\le \Big\|\sum_{i=1}^{k} |\varphi_i|\Big\|_\infty \max_{1\le i\le k} |x_i| \; .$$

Donc
$$\Big\|\max_{1\le i\le p} |S\,e_j|\Big\|_1 \le \Big\|\sum_{i=1}^{k} |\varphi_i|\Big\|_\infty \Big\|\max_{1\le i\le k} |x_i|\Big\|_1 \; .$$

Comme $\Big\|\sum_{i=1}^{p} |e_i^*|\Big\|_\infty = 1$, on en déduit que la représentation particulière $Sx = \sum_1^p \langle e_i^*, x\rangle \, S\, e_i$ réalise $\beta_{\ell_n^1}(S)$. Puisque les $S\,e_i$ appartiennent à Y, elle réalise aussi $\beta_Y(S)$.

Enfin, d'après Grothendieck les normes α et $\|\;\|$ coïncident sur $\mathcal{L}(\ell_n^1, \ell_p^1)$, et donc les normes $\beta_{\ell_n^1}$ et N coïncident sur $\mathcal{L}(\ell_p^1, \ell_n^1)$, ce qui achève la démonstration.

Ces deux lemmes permettent de démontrer le théorème lorsque $L^1(\mu) = \ell_n^1$, $L^1(\nu) = \ell_p^1$.
Soit Y un sous-espace de ℓ_n^1, et T un opérateur de Y dans ℓ_p^1.
T définit sur $\mathcal{L}(\ell_p^1, Y)$, muni de la norme β_Y, une forme linéaire φ de norme $\alpha(T)$. D'après le lemme 2, $\mathcal{L}(\ell_p^1, Y)$ muni de la norme β_Y, est isométrique à un sous-espace de $\mathcal{L}(\ell_p^1, \ell_n^1)$ muni de la norme N.

D'après le théorème de Hahn-Banach, φ se prolonge à une forme linéaire $\tilde{\varphi}$ sur $\mathcal{L}(\ell_p^1, \ell_n^1)$, de même norme. Soit $\tilde{T}$ l'unique élément de $\mathcal{L}(\ell_n^1, \ell_p^1)$ qui s'identifie à $\tilde{\varphi}$ par la dualité de trace. Alors $\|\tilde{T}\| = \|\tilde{\varphi}\| = \alpha(T)$, et il est clair que $\tilde{T}$ prolonge T.

Soit maintenant Y un sous-espace de dimension finie de $L^1(\mu)$, et T un opérateur de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$, où $L^1(\mu)$ et $L^1(\nu)$ sont quelconques. Soit $\varepsilon > 0$. La structure locale inconditionnelle des espaces L^1 (voir [2]) entraîne l'existence de deux espaces de dimension finie E et F, sous-espaces respectifs de $L^1(\mu)$ et $L^1(\nu)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) Y est inclus dans E, et il existe un isomorphisme Φ de E sur ℓ^1_n, (où $n = \dim E$), avec

$$\|\Phi\| \ \|\Phi^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon \quad .$$

De plus, il existe une projection P de $L^1(\mu)$ sur E, avec $\|P\| \leq 1 + \varepsilon$.

2) TY est inclus dans F, et il existe un isomorphisme Ψ de F sur ℓ^1_p, (où $p = \dim F$), avec

$$\|\Psi\| \ \|\Psi^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon \quad .$$

De plus il existe une projection Q de $L^1(\nu)$ sur F, avec $\|Q\| \leq 1 + \varepsilon$.

D'après l'étude faite ci-dessus, l'opérateur $S = \Psi T \Phi^{-1}|_{\Phi(Y)}$ se prolonge à un opérateur $\tilde{S}$ de ℓ^1_n dans ℓ^1_p, avec $\alpha(S) = \|\tilde{S}\|$. Or

$$\begin{aligned} \alpha(S) &\leq \alpha(\Psi)\ \alpha(T)\ \alpha(\Phi^{-1}) \\ &\leq \alpha(\Psi Q)\ \alpha(T)\ \alpha(\Phi^{-1}) \\ &\leq \|\Psi\|\ \|Q\|\ \|\Phi^{-1}\|\ \alpha(T) \quad . \end{aligned}$$

Soit $T_\varepsilon = \Psi^{-1}\ \tilde{S}\ \Phi\ P$. Il est clair que T_ε prolonge T. De plus

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon\| &\leq \|\Psi^{-1}\|\ \|\Psi\|\ \|\Phi^{-1}\|\ \|\Phi\|\ \|P\|\ \|Q\|\ \alpha(T) \\ &\leq (1+\varepsilon)^4\ \alpha(T) \quad . \end{aligned}$$

On obtient donc des prolongements de T de norme arbitrairement proche de $\alpha(T)$. On utilise alors un argument de compacité, et l'existence d'une projection de norme 1 de $[L^1(\nu)]''$ sur $L^1(\nu)$, pour obtenir un prolongement de T, de norme égale à $\alpha(T)$.

Lorsque Y est de dimension quelconque, on obtient pour chaque sous-espace Z de dimension finie de Y un prolongement T_Z de la restriction de T à Z, avec $\|T_Z\| \leq \alpha(T)$. On utilise encore un argument de compacité pour conclure à l'existence d'un prolongement de T, de norme $\alpha(T)$.

Corollaire : Soit Y un sous-espace de $L^1(\mu)$ et Φ un isomorphisme de Y sur $L^1(\nu)$. Alors Y est complémenté dans $L^1(\mu)$ si et seulement si $\alpha(T)$ est fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Grothendieck : Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Math. Sao Paulo 8, 1956.

[2] H.E. Lacey : The isometric theory of classical Banach spaces, Springer Verlag, 1974.
