Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

P. Assouad

Plongements lipschitziens dans un espace pentagonal

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 3, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980____A2_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1979-1980

PLONGEMENTS LIPSCHITZIENS DANS UN ESPACE PENTAGONAL

P. ASSOUAD
(Université Paris-Sud ERA 532)

Exposé No III

9 Novembre 1979

INTRODUCTION

Soient X un ensemble et d un écart sur X.
On dit que (X,d) se plonge de façon lipschitzienne dans un espace métrique (Y,δ) s'il existe A, $B\in]0,\infty[$ et une application f de X dans Y vérifiant :

$$\forall\ x,\ y\in X,\qquad A\ d(x,y) \leq \delta(f(x),f(y)) \leq B\ d(x,y)\quad .$$

(On dira aussi bien que d se plonge de façon lipschitzienne dans (Y,δ)) ; f est alors dit <u>plongement lipschitzien</u> de (X,d) (ou de d) dans (Y,δ) (si $A=B$ on parle de <u>plongement isométrique</u>).
La borne inférieure de $\mathrm{Log}(\frac{B}{A})$ pour de tels A, B est notée $D((X,d);(Y,\delta))$ (elle n'est pas symétrique mais on vérifie aisément qu'elle satisfait à l'inégalité triangulaire).

Dans [7], P. Enflo montre que c_o n'est pas uniformément homéomorphe à une partie d'un espace L^1 et donc qu'en particulier c_o ne se plonge pas de façon lipschitzienne dans un espace L^1.

Il faut noter qu'ici, dans le cas d'espaces normés, les plongements ne sont pas supposés linéaires. Or on sait que pour $p>2$, ℓ^p ne se plonge pas de façon lipschitzienne et linéaire dans un espace L^1 : mais on ne peut en déduire l'impossibilité de plongements lipschitziens non linéaires par le procédé classique (remplacement d'un plongement par sa dérivée en un point, P. Mankiewicz [11, p. 24], car en général un espace L^1 n'a pas la propriété de Radon-Nikodym (sauf ℓ^1).

On se proposait initialement dans ce travail de montrer l'impossibilité d'un plongement lipschitzien non nécessairememt linéaire de ℓ^p dans L^1 pour p assez grand ($p\geq 3,2$) par la méthode suivante :

on montre (adaptant la méthode de [7]) l'impossibilité d'un plongement lipschitzien de ℓ^p dans un espace métrique pentagonal dès que $p>p_o$ où p_o est défini par $\frac{5}{2}=(\frac{4}{3})^{p_o}$ (ce qui donne $3,1<p_o<3,2$) ; on applique ensuite ce résultat à L^1 qui est un espace métrique pentagonal (pour ce terme voir § 1).

En fait l'assertion relative aux plongements dans L^1 a perdu son intérêt depuis que I. Aharoni a montré dans [1] que ℓ^p n'est pas uniformément homéomorphe à une partie de L^2 (donc a fortiori ne se plonge pas de façon lipschitzienne dans L^1) pour tout $p>2$ (voir plus bas § 4).

On s'intéresse donc aux plongements dans un espace pentagonal pour eux-mêmes (voir § 2).

§ 1. LES INEGALITES POLYGONALES.

On sait caractériser les espaces normés plongeables isométriquement dans L^1 (sans supposer que le plongement soit linéaire) par des conditions ne portant que sur la distance de la norme :

E est plongeable dans L^1 si et seulement si d_E (la distance de la norme) est de type négatif (J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle, J.L. Krivine [5]). Cependant on ne sait pas reconnaître les espace métriques plongeables isométriquement dans L^1. Les inégalités de type négatif sont des conditions nécessaires mais non suffisantes et apparaissent comme des cas particulier des inégalités suivantes introduites comme conditions nécessaires dès 1960 par M. Tylkin (Deza) [12] :

Définition 1.1 : Soient X un ensemble, $d : X^2 \to \mathbb{R}$ symétrique et nulle sur la diagonale et n un entier ≥ 1.
On dit que d est 2n+1-polygonale (resp. 2n-polygonale) si on a :

$\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, $\forall\, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \in X$ (resp. $\forall\, y_1, y_2, \ldots, y_n \in X$),

$$\sum_{i<j} d(x_i, x_j) + \sum_{i<j} d(y_i, y_j) \leq \sum_i \sum_j d(x_i, y_j) \quad .$$

On parle du pentagonal au lieu du 5-polygonal.
On dit que d est hypermétrique si d est (2n+1)-polygonale pour tout entier $n \geq 1$.

Cette notion et certaines de ses propriétés furent redécouvertes indépendamment en 1967 par J.B. Kelly [9] (d'où provient la terminologie "hypermétrique"). On va énoncer un certain nombre de résultats concernant les inégalités polygonales (pour les démonstrations voir P. Assouad et M. Deza [3]).

Proposition 1.2 : Soient X un ensemble et $d : X^2 \to \mathbb{R}$ symétrique et nulle sur la diagonale. On a alors :
(1.2.1) d de type négatif $\Leftrightarrow$ d 2n-polygonale pour tout $n \geq 1$;
(1.2.2) d positive $\Leftrightarrow$ d 2-polygonale ;
(1.2.3) d écart $\Leftrightarrow$ d 3-polygonale ;

(1.2.4) d est hypermétrique si et seulement si :

$\forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall\, x_1,\ldots,x_n \in X,\ \forall\, \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{Z}$.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j\, d(x_i,x_j) \leq 0 \quad ;$$

(1.2.5) pour tout entier $n \geq 4$, on a :

$$d \ n\text{-polygonal} \Longrightarrow d \ (n-2)\text{-polygonal} \quad ;$$

(1.2.6) [12] pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$d \ (2n+1)\text{-polygonal} \Longrightarrow d \ (2n+2)\text{-polygonal} \quad ;$$

(1.2.7) d hypermétrique $\Rightarrow$ d est un écart de type négatif ;
(1.2.8) [12] sur $L^1(\mu)$ la distance de la norme $x,y \to \|x-y\|_{L^1(\mu)}$ est hypermétrique ; en particulier si (X,d) se plonge isométriquement dans L^1, d est hypermétrique.

Les réciproques de (1.2.5), (1.2.6), (1.2.7) et (1.2.8) sont fausses. En particulier P. Assouad [2] et D. Avis [4] ont donné indépendamment des exemples d'espaces métriques (X,d) hypermétriques et non plongeables isométriquement dans L^1 (avec $|X| = 7$).
Rappelons par ailleurs l'emploi de l'inégalité 6-polygonale (resp. des inégalités 2n-polygonales) par P. Enflo dans [6] (resp. [7]).

§ 2. PLONGEMENTS DE ℓ^p DANS UN ESPACE PENTAGONAL.

On définit p_o par $\frac{5}{2} = (\frac{4}{3})^{p_o}$ ce qui donne $p_o = 3{,}1850 \ldots$.
Rappelons qu'un espace métrique (Y,δ) est dit pentagonal si on a (cf. Définition 1.1) :

$\forall\, y_1, y_2, y_3, a, b \in Y$,

$$\delta(a,b) + \sum_{i<j} \delta(y_i,y_j) \leq \sum_i \left[\delta(y_i,a) + \delta(y_i,b)\right] \quad .$$

Le résultat suivant est l'objet de ce paragraphe :

Proposition 2.1 : Soit $p > p_o$.
Alors ℓ^p (réel ou complexe) ne se plonge pas de façon lipschitzienne dans un espace métrique pentagonal. En particulier ℓ^p ne se plonge pas de façon lipschitzienne dans un espace L^1.

Démonstration : a) On considère le cas complexe (le cas réel s'y ramène aisément). Soient $p > p_o$ et (Y,δ) un espace métrique pentagonal. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $N = 2^{n+2}$ et $M = 2.5^n$. Soit G_N le groupe des racines N-ièmes de l'unité.

Soit $X_n = (G_N)^M$; X_n est un groupe (multiplicatif) commutatif fini et on le considère comme un sous-espace métrique de ℓ^p en posant :

$$\forall\, x,y \in X_n \,, \qquad d(x,y) = \Big(\sum_{q=1}^{M} |x_q - y_q|^p\Big)^{1/p} \,,$$

ce qui munit X_n d'une distance invariante.

On va montrer qu'on a : $\lim\limits_{n\to\infty} D((X_n,d) \,;\, (Y,\delta)) = +\infty$, ce qui démontrera la proposition.

b) On considère le graphe bipartite $K_{2,3}$ (les sommets sont $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \alpha, \beta$, les arêtes sont (η_i,α) et (η_i,β) pour tout $i = 1,2,3$) et on note $d_{2,3}$ la distance géodésique (c'est-à-dire du plus court chemin) sur l'ensemble des sommets de $K_{2,3}$. Soit $j \in \{0,\dots,n-1\}$, on définit une application φ_j de l'ensemble des sommets de $K_{2,3}$ dans X_n de la façon suivante :

$(\gamma^q)_{q=1,\dots,2^{j+1}5^{n-j}}$ est la suite de période 5 : $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\alpha,\beta,\dots\dots$

$(\varepsilon_q)_{q=1,\dots,2^{j+1}5^{n-j}}$ est la suite de période 10 : $1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,-1,\dots$

pour tout sommet γ de $K_{2,3}$, on a :

$$(\varphi_j(\gamma))_q = \exp\Big(2i\pi\, \varepsilon_q \frac{2^j}{N}\, d_{2,3}(\gamma,\gamma^q)\Big) \quad \text{si } q \le 2^{j+1}5^{n-j} \,,$$

$$= 1 \quad \text{sinon} \,.$$

On dit que les points (x_1,x_2,x_3,a,b) de X_n (dans cet ordre) forment un j-graphe s'ils se déduisent, par une translation (multiplicative) et une permutation des coordonnées, des points $(\varphi_j(\eta_1), \varphi_j(\eta_2), \varphi_j(\eta_3), \varphi_j(\alpha), \varphi_j(\beta))$. Si (x_1,x_2,x_3,a,b) est un j-graphe, on appelle arêtes externes les couples (x_i,a) et (x_i,b) pour $i = 1,2,3$ et arêtes internes les autres couples. Soient $x, y \in X_n$. On dit que (x,y) est une 0-arête si c'est une arête externe d'un 0-graphe. On dit que (x,y) est une j-arête (pour $j = 1,\dots,n-1$) si c'est une arête interne d'un $(j-1)$-graphe ou, ce qui revient au même, si c'est une arête externe d'un j-graphe. Enfin, on dit que (x,y) est une n-arête si c'est une arête interne d'un $(n-1)$-graphe. Autrement dit, (x,y) est une j-arête si et seulement si $x^{-1}y$ a $2^j 5^{n-j}$ coordonnées égales à $\exp 2i\pi \frac{2^j}{N}$, $2^j 5^{n-j}$ autres coordonnées égales à $\exp -2i\pi \frac{2^j}{N}$ et les autres égales à 1. On a donc pour une j-arête (x,y) (pour $j = 0,\dots,n$) :

$$4(2^{j+1}5^{n-j})^{1/p}\, 2^j \leq N\, d(x,y) \leq 2\pi(2^{j+1}5^{n-j})^{1/p}\, 2^j \quad .$$

Après ces notations on va pouvoir donner une évaluation de $D_n = D((X_n,d),(Y,\delta))$.

c) On se donne un plongement isomorphe de (X_n,d) dans (Y,δ) avec des constantes d'isomorphisme A et B, c'est-à-dire une injection de (X_n,d) dans (Y,δ) vérifiant :

$$\forall\, x,y \in X_n \quad , \qquad A\, d(x,y) \leq \delta(f(x),f(y)) \leq B\, d(x,y) \quad .$$

Soit $j \in \{0,\dots,n\}$. Si K est un j-graphe, on écrit l'inégalité pentagonale suivante :

(P_K) la somme des $(j+1)$-arêtes de K (comptée pour $\delta \circ f$) vaut moins que la somme des j-arêtes de K.

On remarque qu'un j-graphe contient toujours 6 j-arêtes et 4 $(j+1)$-arêtes et qu'une j-arête (resp. une $(j+1)$-arête est toujours contenue dans le même nombre de j-graphes. On en déduit en sommant les inégalités (P_K) pour tous les j-graphes K et en normalisant convenablement :

$$\text{(moyenne de } \delta \circ f \text{ sur les } (j+1)\text{-arêtes)} \leq \frac{6}{4}\,\text{(moyenne de } \delta \circ f \text{ sur les } j\text{-arêtes)} \quad .$$

On trouve donc :

(moyenne de $\delta \circ f$ sur les n-arêtes)

$$\leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \text{(moyenne de } \delta \circ f \text{ sur les 0-arêtes)} \quad .$$

Cela donne :

$$4A(2^{n+1})^{1/p}\, 2^n \leq 2\pi\, B \left(\frac{3}{2}\right)^n (2.5^n)^{1/p} \quad .$$

Autrement dit, on a :

$$e^{D_n} \geq \frac{2}{\pi} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^{1/p} \right]^n \quad .$$

Cela donne le résultat, car on a :

$$p > p_o \iff \frac{4}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{1/p} > 1 \quad . \quad \square$$

On aura noté la parenté de la méthode ci-dessus avec celle de P. Enflo dans [7]. Cette même méthode s'adapte aisément quand on remplace pentagonal par n-polygonal et donne :

$$\frac{n}{2} = \left(2\,\frac{a-1}{a}\right)^{p_o}$$

(avec $a = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ le plus petit entier $\geq \frac{n}{2}$).
Notons que lorsque n est grand, p_o est équivalent à $\mathrm{Log}_2 \left(\frac{n}{2}\right)$.
On peut vérifier que les deux plus petites valeurs de p_o sont atteintes pour $n = 5$ et $n = 7$. Le minimum est atteint pour $n = 7$ et on peut énoncer le résultat correspondant (cependant peu significatif) :

si p est compris entre 3,0896 ... et 3,1850 ..., alors ℓ^p ne se plonge pas de façon lipschitzienne dans un espace 7-polygonal.
Le fait que la méthode ne s'améliore pas lorsque n tend vers $+\infty$ montre le caractère provisoire de la proposition 2.1 :

Conjecture 2.2 : Pour tout $p > 2$, il n'existe aucun plongement lipschitzien de ℓ^p dans un espace métrique pentagonal.

§ 3. QUELQUES LEMMES SUR LES PLONGEMENTS UNIFORMES.

Répétons d'abord les définitions de l'Introduction dans un cadre plus appropié. Soient $n \in \mathbb{N}$. On appellera n-espace tout couple

(X,k) où X est un ensemble et k une application de X^n dans $\mathbb{R}$.

<u>Définition 3.1</u> : Soient (Y,ℓ) un n-espace et φ (resp. ψ) une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ (resp. de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$).
On dira qu'un n-espace (X,k) <u>se plonge (ψ,φ) uniformément</u> dans (Y,ℓ) s'il existe une application f de X dans Y telle que :

$\forall\, x_1,\dots,x_2,\dots,x_n \in X$

$$\psi(k(x_1,\dots,x_n)) \leq \ell(f(x_1),\dots,f(x_n)) \leq \varphi(k(x_1,\dots,x_n)) \quad .$$

Si $\varphi = \psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, on dira que (X,k) <u>se plonge isométriquement</u> dans (Y,ℓ).

Si $\mathcal{C}$ est une classe de n-espaces, on note $\hat{\mathcal{C}}(\psi,\varphi)$ la classe des n-espaces qui se plongent (ψ,φ) uniformément dans un n-espace appartenant à $\mathcal{C}$ et on pose $\hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$.

<u>Définition 3.2</u> :

(3.2.1) On dit qu'une classe $\mathcal{C}$ de n-espaces est <u>convexe</u> (resp. <u>fermée</u>) si pour tout ensemble X, l'ensemble des $k : X^n \to \mathbb{R}$ tels que (X,k) soit dans $\mathcal{C}$ est convexe (resp. fermée pour la convergence simple).

(3.2.2) On dit qu'une classe $\mathcal{C}$ de n-espaces est de <u>type fini</u> si (X,k) appartient à $\mathcal{C}$ dès que $(X_1,k_{|X_1})$ appartient à $\mathcal{C}$ pour tout sous-ensemble fini X_1 de X.

<u>Définition 3.3</u> : Soit k' une application de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{R}$ à support fini. On dit qu'un n-espace (X,k) <u>satisfait à l'inégalité de type fini k' si</u> on a pour toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X :

$$\sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_n} k'(i_1,i_2,\dots,i_n)\, k(x_{i_1},\dots,x_{i_n}) \geq -1 \quad .$$

Les résultats suivants se trouvent en substance dans [5] et correspondent à l'usage classique (J.L. Krivine, ...) des ultraproduits.

<u>Proposition 3.4</u> : Soit $\mathcal{C}$ une classe de n-espaces.

(3.4.1) Si $\hat{\mathcal{C}}$ est fermée, alors $\hat{\mathcal{C}}$ est de type fini.

(3.4.2) $\hat{\mathcal{C}}$ est fermée et convexe si et seulement si elle est définie par une famille d'inégalités de type fini (c'est-à-dire s'il existe une famille $(k'_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'inégalités de type fini telle que $\hat{\mathcal{C}}$ soit la classe des n-espaces qui satisfont à toutes les inégalités de type fini k'_α).

On trouve dans [5], p. 252 ($p \leq 2$) et dans J.L. Krivine [10] l'exemple suivant : soit $p \in [1,\infty[$; notons $\mathcal{C}_p$ la classe de tous les espaces $L^p(\mu)$ munis de la fonction $k(x,y) = \|x - y\|^p_{L^p(\mu)}$; alors la classe $\hat{\mathcal{C}}_p$ est fermée et convexe.
(Notons que pour $p = 2$, les inégalités de type fini qui la définissent sont les inégalités de type négatif ; pour $p \neq 2$, même pour $p = 1$ comme on l'a vu, les inégalités ne sont connues explicitement.)

Lemme 3.5 :

(3.5.1) On suppose que ψ est s.c.i. et que φ est s.c.s. Si $\mathcal{C}$ est une classe de n-espaces on a alors :

$$\hat{\mathcal{C}} \text{ fermée} \Longrightarrow \hat{\mathcal{C}}(\psi,\varphi) \text{ fermée} .$$

(3.5.2) On suppose que ψ est convexe et que φ est concave. Si $\mathcal{C}$ est une classe de n-espaces on a alors

$$\hat{\mathcal{C}} \text{ convexe} \Longrightarrow \hat{\mathcal{C}}(\psi,\varphi) \text{ convexe} .$$

Démonstration : Evidente. □

Notons que la classe des espaces métriques plongeables de façon lispchitzienne dans un espace L^p forme, si on majore Log $\frac{B}{A}$ (et si on considère la puissance p-ième de la distance), une classe de la forme $\hat{\mathcal{C}}_p(\psi,\varphi)$.

Il vient alors de (3.5) et des résultats cités plus haut que cette classe est convexe et fermée (problème : trouver explicitement des inégalités de type fini qui la définissent, par exemple pour $p = 2$). De même la classe des espaces métriques plongeables de façon lipschitzienne dans un espace pentagonal forme (si on majore $\frac{B}{A}$) une classe convexe et fermée.

Lemme 3.6 : Soient X un ensemble, F, G deux groupes, E une extension de G par F agissant à gauche sur X et k_o, $\mathcal{C}$, φ, ψ vérifiant les conditions suivantes :

(3.6.1) (X,k_o) est un n-espace et X est un espace topologique séparé ;

(3.6.2) G est un groupe topologique séparé ; G admet une moyenne invariante à droite sur l'espace des fonctions continues bornées ; l'action de G sur X est séparément continue ;

(3.6.3) $\mathcal{C}$ est une classe de n-espaces et $\widehat{\mathcal{C}}$ est convexe et fermée ;

(3.6.4) φ et ψ sont comme dans la définition 3.1 et on a :

$$((X,\ell)\in\widehat{\mathcal{C}},\ \psi(k_o)\leq \ell \leq \varphi(k_o)) \Longrightarrow \ell \text{ continue} \quad ;$$

(3.6.5) k_o est invariante par G ; enfin il existe ℓ tel que :

$$(X,\ell)\in\widehat{\mathcal{C}},\ \ell \text{ est invariant par F},\ \psi(k_o)\leq \ell \leq \varphi(k_o) \quad .$$

Sous les hypothèses précédentes, il existe alors ℓ_o tel que :

$$(X,\ell_o)\in\widehat{\mathcal{C}},\ \ell_o \text{ est invariant par E},\ \psi(k_o)\leq \ell_o \leq \varphi(k_o) \quad .$$

(Les hypothèses se simplifient beaucoup si on suppose X et G discrets ; pour les moyennes et les groupes amenables, on renvoie au livre de F.P. Greenleaf [8].)

<u>Démonstration du lemme 3.6</u> : Soit $K=\{\ell \mid (X,\ell)\in\widehat{\mathcal{C}},\ \ell$ invariant par F, $\psi(k_o)\leq\ell\leq\varphi(k_o)\}$, K est non vide (par 3.6.5) ;
donc $\psi(k_o)$ et $\varphi(k_o)$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ (voir définition 3.1) ; or K est convexe et fermé pour la convergence simple (par 3.6.3) ; donc K est convexe compact (pour la convergence simple).
G agit à droite sur K (car k_o est invariante par G), de façon séparément continue (car G agit de façon séparément continue sur X et à cause de 3.6.4) et affine. La propriété de moyenne donnée en (3.6.2) entraîne l'existence d'un point fixe pour G donc pour E. □

§ 4. <u>LES RESULTATS DE I. AHARONI</u>.

Donnons une idée des résultats de I. Aharoni :

<u>Théorème 4.1</u> [1] : Soit X un espace de Banach réel possédant une base symétrique $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :

(i) $$\liminf_{n\to+\infty} \left\| \frac{e_1+\dots+e_n}{\sqrt{n}} \right\| = 0 \quad .$$

Alors il n'existe pas de plongement uniforme de X dans un espace L^2.

Corollaire 4.2 [1] : Soit $p > 2$. Alors il n'existe pas de plongement uniforme de ℓ^p dans un espace L^2. En particulier il n'existe pas de plongement lipschitzien de ℓ^p dans un espace L^1.

Démonstration du corollaire 4.2 : Il est clair que ℓ^p vérifie (i) (pour sa base canonique) ; donc (4.1) il n'existe pas de plongement uniforme de ℓ^p dans un espace L^2. Par ailleurs on sait que L^1 muni de la distance $x,y \to \sqrt{\|x-y\|_{L^1}}$ se plonge isométriquement dans L^2 (car $x,y \to \|x-y\|$ est de type négatif). D'où le résultat. □

Esquisse de la démonstration du théorème 4.1 : La démonstration comprend plusieurs points (on suit la démonstration de [1] tout en utilisant le § 3 ci-dessus qui permet d'unifier plusieurs lemmes de [1]) :

(4.1.1) Soient X un espace de Banach et d la distance de la norme sur X ; supposons que X se plonge uniformément dans L^2 ; alors il existe φ, ψ et ℓ tels que :

a) φ et ψ sont des applications continues strictement croissantes et nulles en 0 de $[0,\infty[$ dans $[0,\infty[$;

b) ℓ est une application symétrique de X^2 dans $[0,\infty[$ et est de type négatif (autrement dit, dans les termes du paragraphe 3, (X,ℓ) appartient à $\hat{\mathcal{C}}_2$) ;

c) on a : $\psi(d^2) \leq \ell \leq \varphi(d^2)$.

(4.1.2) On obtient ensuite que sous les mêmes hypothèses :

a) ℓ peut être supposé stationnaire (c'est-à-dire invariant par les translations de X) ;

b) si de plus X a une base symétrique, alors ℓ peut être supposé de plus symétrique, c'est-à-dire invariant sous l'action du groupe $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ et du groupe des permutations de $\mathbb{N}$.

(Le lemme 3.6 ci-dessus peut servir à démontrer à la fois a) et b) en remarquant que pour la topologie discrète, le groupe additif de X, le groupe $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ et le groupe des permutations de $\mathbb{N}$ ne dérangeant qu'un nombre fini d'éléments sont amenables ; on passe au groupe de toutes les permutations en remarquant que ℓ est continu sur l'espace de Banach X).

(4.1.3) on montre enfin que sur un espace de Banach X vérifiant (i) un noyau de type négatif stationnaire et symétrique est nécessairement identiquement nul ;

(I. Aharoni signale que ce résultat était donné dans [5], p. 232, pour le cas $X = \ell^p$, $p > 2$).

(4.1.4) comparant (4.1.3) et (4.1.1) (où ψ est strictement croissante) on obtient la conclusion. □

[1] contient aussi d'intéressantes conséquences du théorème 4.1 et notamment :

Corollaire 4.3 : Pour $p > 2$, l'espace ℓ^p n'est pas uniformément homéomorphe à une partie bornée d'un espace L^p.

§ 5. QUELQUES QUESTIONS.

(5.1) Une distance pentagonale admet-elle un plongement lipschitzien dans un espace L^1 ?

(5.2) Une distance de type négatif (resp. hypermétrique) admet-elle un plongement lipschitzien dans un espace L^1 ?

(5.3) Soit $k' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ une inégalité de type finie ; on suppose que k' est effective sur les espaces métriques (c'est-à-dire est satisfaite par certains mais non pas tous les espaces métriques) ; peut-il exister alors un plongement lipschitzien de ℓ^∞ dans un espace métrique satisfaisant à k' ? (Je pense que non.)

(5.4) Soient d la distance de la norme sur ℓ^∞ et δ une distance équivalente (c'est-à-dire telle que $\frac{\delta}{d}$ soit majorée et minorée) ; alors (ℓ^∞, d) est-il finiment représentable au sens isométrique dans (ℓ^∞, δ) ? (c'est-à-dire toute partie finie de (ℓ^∞, d) se plonge-t-elle isométriquement dans (ℓ^∞, δ) ? cela permettrait de répondre négativement à (5.3)).

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. Aharoni : Positive definite functions and uniform embeddings of Banach spaces into Hilbert spaces, preprint, Juillet 1979.

[2] P. Assouad : Un espace hypermétrique non plongeable dans un espace L^1, C. R. Acad. Sc. Paris, 285 (19 Sept. 1977) ser. A, 361-362.

[3] P. Assouad, M. Deza : Isometric embeddings in L^1, in hypercubes and related problems (en préparation).

[4] D. Avis : Hamming metrics and facets of the Hamming cone, Technical report SOCS-78.4, Mc Gill University, January 1978.

[5] J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle, J.L. Krivine : Lois stables et espaces L^p, Ann. Inst. H. Poincaré 2 (1966), 231-259.

[6] P. Enflo : On the nonexistence of uniform homeomorphisms between L_p-spaces, Ark. f. Mat., 8 (1969), 103-105.

[7] P. Enflo : On a problem of Smirnov, Ark. f. Mat., 8 (1969), 107-109.

[8] F.P. Greenleaf : Invariant means on topological groups, Van Nostrand (1969), New-York.

[9] J.B. Kelly : Metric inequalities and symmetric differences, in Proc. 2nd Symp. on Inequalities, Colorado 1967, Oved Shisha ed., Academic Press (1970), 193-212.

[10] J.L. Krivine : Sous-espaces et cônes convexes dans les espaces L^p, Thèse (1967), Paris.

[11] P. Mankiewicz : On the differentiability of Lipschitz mappings in Fréchet spaces, Studia Math., 45 (1973), 15-29.

[12] M. Tylkin (Deza) : On Hamming geometry of unitary cubes (Russian), Doklady Akad. Nauk. SSSR, 134 No 5 (1960), 1037-1040.
