Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Maurey

Tout sous-espace de L^1 contient un l_p, d'après D. Aldous

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 1 et 2, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980____A1_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1979-1980

TOUT SOUS-ESPACE DE L^1 CONTIENT UN ℓ_p

d'après D. Aldous

B. MAUREY
(Université Paris VII)

Exposés No I-II

19 et 26 Octobre 1979

Cet exposé est consacré à l'étude d'un résultat de D. Aldous : tout sous-espace de dimension infinie X de L^1 contient un sous-espace isomorphe à ℓ_p, $1 \le p \le 2$. On sait que tout sous-espace non réflexif de L^1 contient ℓ_1, ce qui permet de limiter l'étude au cas où X est réflexif.

La démonstration présentée ici diffère légèrement de la démonstration d'Aldous, et peut se généraliser très facilement à une classe d'espaces appelés espaces stables. Cette généralisation sera développée dans un article en collaboration avec J.L. Krivine.

§ I. L'ESPACE PA DES PROBABILITES ALEATOIRES.

Dans toute la suite $(\Omega,\mathcal{A},P)$ désignera un espace de probabilité tel que $L^1(\Omega,\mathcal{A},P)$ soit séparable. On notera Ex l'intégrale d'un élément x de $L^1(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Une probabilité aléatoire μ est une application de Ω dans l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{R}$, soit $\omega \to \mu_\omega$, telle que

$$\omega \longrightarrow \int \varphi(u)\ \mu_\omega(du)$$

soit mesurable pour toute fonction continue bornée φ sur $\mathbb{R}$ (il suffit que cela soit vrai pour φ continue à support compact). La notation $\int \varphi(u)\ \mu(du)$ désignera la variable aléatoire (bornée) sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ainsi définie. Nous désignerons par PA l'ensemble des probabilités aléatoires.

Considérons l'espace de Banach (séparable) $L^1(\Omega,\mathcal{A},P,C(\overline{\mathbb{R}}))$. Son dual est l'espace des applications scalairement mesurables bornées de $(\Omega,\mathcal{A},P)$ dans $M(\overline{\mathbb{R}})$. On voit donc que PA s'identifie à une partie de la boule unité de ce dual.

Nous munirons PA de la topologie $*$-faible de $MA(\overline{\mathbb{R}}) = (L^1(C(\overline{\mathbb{R}})))'$. Cette topologie est métrisable, puisque $L^1(C(\overline{\mathbb{R}}))$ est séparable.

Un sous-ensemnle U de PA sera dit concentré sur les compacts (en abrégé C.C.) si :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ R,\ \forall\ \mu \in U, \qquad E\ \mu\{|u| > R\} \le \varepsilon \quad .$$

Proposition I.1 : Les parties C.C. de PA sont relativement compactes.

Il suffit de montrer que si U est une partie C.C. de PA, son adhérence $\overline{U}$ dans $MA(\overline{\mathbb{R}})$ est contenue dans PA, c'est-à-dire formée de probabilités portées par $\mathbb{R}$. Soit (μ_n) une suite de points de U tendant vers $\mu \in MA(\overline{\mathbb{R}})$. Il est clair que μ_ω est pour presque tout ω une probabilité sur $\overline{\mathbb{R}}$. Soit R tel que $E\,\mu_n\{|u|>R\} \leq \varepsilon$ pour tout n, et soit ψ une fonction continue sur $\overline{\mathbb{R}}$ telle que :

$$0 \leq \psi \leq 1, \quad \psi = 0 \text{ sur } [-R,R], \quad \psi(u) = 1 \text{ si } |u| \geq R+1 \quad .$$

On a $$E \int \psi(u)\, \mu_n(du) \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \quad ,$$

donc $$E \int \psi(u)\, \mu(du) \leq \varepsilon \quad .$$

En particulier

$$E\, \mu\{|u| = +\infty\} \leq \varepsilon \quad , \quad \text{pour tout } \varepsilon,$$

d'où le résultat.

<u>Remarque I.2</u> : Réciproquement, les ensembles relativement compacts de PA sont C.C. Il suffit de montrer que si (μ_n) tend vers μ_∞ dans PA, l'ensemble $\{\mu_n \,;\, n \in \overline{\mathbb{N}}\}$ est CC. Cela résulte du fait que pour tout R la fonction $\nu \to E\, \nu\{|u| \geq R\}$ est scs sur PA. Pour $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver R tel que $E\,\mu_\infty\{|u| \geq R\} \leq \varepsilon$. On a alors $\limsup_n E\,\mu_n\{|u| \geq R\} \leq \varepsilon$, ce qui démontre notre affirmation.

<u>Proposition I.3</u> : Si $\mu_n \to \mu_\infty$ dans PA, on a pour toute fonction continue bornée φ sur $\mathbb{R}$ et toute $g \in L^1(\Omega,\mathcal{A},P)$:

$$E\, g \int \varphi(u)\, \mu_n(du) \longrightarrow E\, g \int \varphi(u)\, \mu_\infty(du) \quad .$$

Il suffit de noter que l'ensemble $\{\mu_n \,;\, n \in \overline{\mathbb{N}}\}$ est C.C. d'après la remarque précédente.
On peut donc approcher uniformément la suite $E\, g \int \varphi(u)\, \mu_n(du)$ par $E\, g \int \psi(u)\, \mu_n(du)$, avec ψ continue à support compact.

On peut traduire la proposition en disant que pour toute fonction continue bornée φ sur $\mathbb{R}$, la suite $\int \varphi(u)\, \mu_n(du)$ converge vers $\int \varphi(u)\, \mu_\infty(du)$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Nous utiliserons dans la suite les transformées de Fourier des éléments de PA. On posera pour $\mu \in PA$ et t réel :

$$\hat{\mu}(t) = \int e^{iut}\, \mu(du) \quad .$$

Si μ_n tend vers μ dans PA, $\hat{\mu}_n(t)$ tend vers $\hat{\mu}(t)$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$ pour tout réel t, d'après ce qui précède.

Si μ et ν sont deux éléments de PA, on définit $\mu * \nu \in$ PA par

$$\widehat{(\mu * \nu)}_\omega = \hat{\mu}_\omega * \hat{\nu}_\omega \quad .$$

on aura $$\widehat{\mu * \nu(t)} = \hat{\mu}(t)\, \hat{\nu}(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \quad ,$$

et $$\mu * \nu = \nu * \mu \quad .$$

<u>Proposition I.4</u> : L'application $(\mu, \nu) \to \mu * \nu$ est séparément continue de $PA \times PA$ dans PA.

Considérons un élément $\nu \in$ PA fixé. Si $f \in L^1(\Omega, C(\overline{\mathbb{R}}))$ et $\mu \in$ PA, on a :

$$E \int f(u)\, \mu * \nu(du) = E \int \left(\int f(v+w)\, \nu(dw)\right) \mu(dv) \quad .$$

Il suffit de remarquer que $v \to \int f(v+w)\, \nu(dw)$ est un élément de $L^1(\Omega, C(\overline{\mathbb{R}}))$.

Si $\mu \in$ PA et $\alpha \in \mathbb{R}$, on désignera par $D_\alpha \mu$ l'image de μ par $u \to \alpha u$, c'est-à-dire :

$$E \int f(u)\, D_\alpha \mu(du) = E \int f(\alpha u)\, \mu(du) \quad , \quad \forall f \in L^1(\Omega, C(\overline{\mathbb{R}})) \quad .$$

On a : $$\widehat{D_\alpha \mu}(t) = \hat{\mu}(\alpha t) \quad .$$

<u>Définition 1.5</u> : Un D-cône sera une partie C de PA <u>non vide</u> et telle que :

a) $\forall \mu \in C, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad D_\alpha \mu \in C$

b) $\forall \mu, \nu \in C, \quad \mu * \nu \in C$.

Un D-cône sera dit non trivial s'il n'est pas réduit à $\{\delta_o\}$ (mesure de Dirac à l'origine).

<u>Lemme I.6</u> : L'adhérence dans PA d'un D-cône est un D-cône.

Démonstration : Si C est un D-cône, il est clair que $\overline{C}$ vérifie a). Si $\mu, \nu \in \overline{C}$, soient (μ_n) et (ν_n) deux suites d'éléments de C de limites respectives μ et ν. Par la continuité séparée (proposition I.4) $\mu * \nu_n \in \overline{C}$ pour tout entier n, donc $\mu * \nu \in \overline{C}$ en appliquant à nouveau la proposition I.4.

§ II. D-CONES ASSOCIES A UN SOUS-ESPACE REFLEXIF X DE $L^1(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Soit X un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega,\mathcal{A},P)$, de dimension infinie. On sait que les parties bornées de X sont équi-intégrables. Il en résulte que tout sous-ensemble de X, borné en probabilité, est borné en norme.

Pour chaque $x \in X$, on désignera par δ_x l'élément de PA défini par $(\delta_x)_\omega = \delta_{x(\omega)}$. On a :

$$E \int f(u)\, \delta_x(du) = E\, f(x) \quad , \quad \forall\, f \in L^1(\Omega, C(\overline{\mathbb{R}})) \quad .$$

Il est clair que l'ensemble $\{\delta_x \,;\, x \in X\}$ est un D-cône. D'après le lemme I.6, son adhérence C dans PA est un D-cône fermé. Nous dirons que C est le D-cône fermé associé à X.
On posera pour $\mu \in PA$:

$$\|\mu\| = E \int |u|\, \mu(du) \quad (\text{peut-être } +\infty) \quad .$$

Proposition II.1 : La fonction $\mu \to \|\mu\|$ est finie et continue sur C.

Démonstration : Soit $\mu \in C$ et soit (x_n) une suite de points de X telle que (δ_{x_n}) tende vers μ dans PA. L'ensemble $\{\delta_{x_n} \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ est CC d'après la remarque I.2. Il existe donc pour tout $\varepsilon > 0$ un réel R tel que $E\, \delta_{x_n}\{|u| > R\} = P\{|x_n| > R\} \le \varepsilon$ pour tout n, ce qui signifie que (x_n) est bornée en probabilité, donc bornée dans X, donc équi-intégrable. La suite $\|x_n\| = E\,|x_n|$ est approchée uniformément par $E\,|x_n| \wedge R$, lorsque $R \to +\infty$. Par ailleurs, $E\,|x_n| \wedge R = E \int |u| \wedge R\; \delta_{x_n}(du)$ tend vers $E \int |u| \wedge R\; \mu(du)$. On en déduit que $\|\mu\| = \lim_n \|x_n\|$, et en particulier $\|\mu\| < \infty$.

Soit maintenant (μ_n) une suite de points de C, tendant vers μ. Soit d une métrique définissant la topologie de PA, et (x_n) une suite de points de X telle que

$$d(\delta_{x_n},\mu_n) \le \frac{1}{n} \quad , \quad \big| \|x_n\| - \|\mu_n\| \big| \le \frac{1}{n} \quad .$$

On a alors $\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \delta_{x_n}$, donc

$$\|\mu\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|\mu_n\| \quad .$$

D'après la proposition II.1, les sous-ensembles de C de la forme $B_r = \{\mu \in C \,;\, \|\mu\| \le r\}$, ou bien $K = \{\mu \in C \,;\, \|\mu\| = 1\}$, sont fermés dans PA. Ils sont en fait compacts. En effet :

$$E\ \mu\{|u| > R\} \le \frac{\|\mu\|}{R} \quad .$$

On en déduit que B_r (ou K) est CC, donc compact d'après la proposition I.1.

Nous nous intéresserons dans la suite au sous-ensemble C_1 de C formé des mesures symétriques sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$C_1 = \{\mu \in C \ ;\ \mu = D_{-1}\,\mu\} \quad .$$

Il est clair que C_1 est un D-cône fermé. Montrons que C_1 est non trivial. Puisque X est de dimension infinie, et K métrique compact, on peut trouver une suite (x_n) dans X, telle que $\|x_n\| = 1$, $\|x_n - x_m\| \ge \varepsilon > 0$ pour $n \ne m$, et $\lim\limits_n \delta_{x_n} = \mu$ dans PA. Alors $\nu = \mu * D_{-1}\mu$ est symétrique, et d'après les propositions I.4 et II.1

$$\|\nu\| = \Big\|\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \delta_{x_n} * \delta_{-x_m}\Big\| = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \|x_n - x_m\| \ge \varepsilon$$

ce qui montre que $\nu \ne \delta_o$.

Soit $\mu \in C_1$, $\mu \ne \delta_o$. On définit une norme sur $X \oplus \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ de la façon suivante :

$$\Big\|x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, e_i\Big\|_\mu = E \int \Big|x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, u_i\Big|\ \mu(du_1) \ldots \mu(du_k)$$

$$= \|\delta_x * D_{\alpha_1}\,\mu * \ldots * D_{\alpha_k}\,\mu\| \quad .$$

(On a désigné par (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.)

Puisque μ est symétrique, cette norme est invariante par changement de signe des variables (α_i). On voit qu'elle est aussi invariante par permutation des (α_i).

On désignera par S_μ l'espace $X \oplus \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ muni de la norme ci-dessus.

<u>Proposition II.2</u> : Si (x_n) est une suite dans X telle que $\mu = \lim_n \delta_{x_n}$, on a :

$$\|x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, e_i\|_\mu = \lim_{n_1\to\infty} \lim_{n_2\to\infty} \cdots \lim_{n_k\to\infty} \|x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, x_{n_i}\| .$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de rappeler que d'après la proposition I.4

$$\delta_x * D_{\alpha_1}\mu * \ldots * D_{\alpha_k}\mu = \lim_{n_1\to\infty} \lim_{n_2\to\infty} \cdots \lim_{n_k\to\infty} \delta_x * \delta_{\alpha_1 x_{n_1}} * \ldots * \delta_{\alpha_k x_{n_k}}$$

et le résultat découle de la proposition II.1.

Soit $a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, e_i$ un élément de S_μ. On dira que $\nu = D_{\alpha_1}\mu * \ldots * D_{\alpha_k}\mu$ est la μ-loi de a. Si $g \in L^\infty(\Omega,\mathcal{Q},P)$ on aura pour tout réel t :

$$E\, g \cdot \hat{\nu}(t) = \lim_{n_1\to\infty} \lim_{n_2\to\infty} \cdots \lim_{n_k\to\infty} E\, g \int e^{iut} (\delta_{\alpha_1 x_{n_1}} * \ldots * \delta_{\alpha_k x_{n_k}})(du)$$

$$= \lim_{n_1\to\infty} \lim_{n_2\to\infty} \cdots \lim_{n_k\to\infty} E\, g \exp(it \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, x_{n_i}) .$$

Soient $b = \sum_{i=1}^{k} \beta_i\, e_i$ un autre élément de S_μ, et $\xi = D_{\beta_1}\mu * \ldots * D_{\beta_k}\mu$ la μ-loi de b. On aura, en supposant $\|g\|_\infty \le 1$

$$E\, g(\hat{\nu}(t) - \hat{\xi}(t)) =$$

$$= \lim_{n_1\to\infty} \lim_{n_2\to\infty} \cdots \lim_{n_k\to\infty} E\, g(\exp(it \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, x_{n_i}) - \exp(it \sum_{i=1}^{k} \beta_i\, x_{n_i}))$$

$$\le |t| \lim_{n_1\to\infty} \lim_{n_2\to\infty} \cdots \lim_{n_k\to\infty} E\, \Big| \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i) x_{n_i} \Big|$$

$$= |t|\, \|a - b\|_\mu .$$

Nous pouvons donc énoncer :

<u>Lemme II.3</u> : Si a et b sont deux éléments de S_μ et ν et ξ leurs μ-lois respectives, on a :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad E\, |\hat{\nu}(t) - \hat{\xi}(t)| \le |t|\, \|a - b\|_\mu .$$

Nous dirons qu'un élément μ de C_1 est p-stable si $\mu \ne \delta_o$ et si :

$$|\alpha|^p + |\beta|^p = 1 \Longrightarrow D_\alpha \mu * D_\beta \mu = \mu \quad .$$

Le plongement de ℓ_p dans X s'effectue grâce à la proposition suivante :

<u>Proposition II.4</u> : Supposons que $\mu \in C_1$ soit p-stable, $\|\mu\| = 1$, et soit (x_n) une suite dans X telle que $\mu = \lim_n \delta_{x_n}$, $\|x_n\| = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une sous-suite de (x_n) qui est $(1+\varepsilon)$-équivalente à la base canonique de ℓ_p.

Notons tout d'abord que pour tout $x \in X$

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \|x + \alpha x_n + \beta x_m\| = \lim_{n\to\infty} \|x + (|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p} x_n\| \quad .$$

Il suffit de le vérifier si $|\alpha|^p + |\beta|^p = 1$. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \|x + \alpha x_n + \beta x_m\| = \|x + \alpha e_1 + \beta e_2\|_\mu = E \int |x + v| \; D_\alpha \mu * D_\beta \mu(dv)$$

$$= \|x + e_1\|_\mu = \lim_{n\to\infty} \|x + x_n\| \quad .$$

Nous allons construire par récurrence une suite décroissante (N_k) de parties infinies de $\mathbb{N}$, telle que la suite $n_k = \inf N_k$ soit strictement croissante, de la façon suivante :

Supposons $N_1, N_2, \ldots, N_k$ déterminés. Soit F_k un sous-ensemble fini $2^{-k}\varepsilon/6$-dense dans la boule unité de l'espace de dimension finie $[x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}]$, et G_k un sous-ensemble fini de la boule unité de ℓ_p^2, $2^{-k}\varepsilon/6$-dense pour la norme ℓ_1^2. D'après (*), on peut trouver $N_{k+1} \subset N_k$ tel que :

$\forall\, x \in F_k$, $\forall\, (\alpha,\beta) \in G_k$, $\forall\, m,n \in N_{k+1}$

$$\big|\|x + \alpha x_m + \beta x_n\| - \|x + (|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p} x_n\|\big| \le 2^{-k}\varepsilon/3 \quad .$$

On en déduit :

$(**)$ $\forall\, x \in [x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}]$, $\forall\, (\alpha,\beta)$, $\forall\, m,n \in N_{k+1}$:

$$\big|\|x + \alpha x_m + \beta x_n\| - \|x + (|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p} x_n\|\big| \le 2^{-k}\varepsilon \max(\|x\|, (|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p})$$

Supposons la sous-suite (x_{n_k}) ainsi construite, et considérons $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k x_{n_k}$, avec $\sum_{k=1}^{K} |\alpha_k|^p = 1$. En appliquant $(K-1)$ fois la propriété

(**), on obtient :

$$\left|\,\left\|\sum_{k=1}^{K} \alpha_k\, x_{n_k}\right\| - 1\right| \leq \varepsilon \max\left(1, \left\|\sum_{k=1}^{j} a_k\, x_{n_k}\right\| ;\ j = 1,\dots,K\right) .$$

Supposons le maximum de $\left\|\sum_{k=1}^{j} \alpha_k\, x_{n_k}\right\|$ atteint pour j_o, et $\left\|\sum_{k=1}^{j_o} \alpha_k\, x_{n_k}\right\| \geq 1$.

Le raisonnement précédent, appliqué à $\sum_{k=1}^{j_o} \alpha_k\, x_{n_k}$, donne

$$\left\|\sum_{k=1}^{j_o} \alpha_k\, x_{n_k}\right\| \leq \left(\sum_{k=1}^{j_o} |\alpha_k|^p\right)^{1/p} + \varepsilon \left\|\sum_{k=1}^{j_o} \alpha_k\, x_{n_k}\right\| ,$$

d'où

$$\left\|\sum_{k=1}^{j_o} \alpha_k\, x_{n_k}\right\| \leq (1-\varepsilon)^{-1} ,$$

et finalement :

$$\frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq \left\|\sum_{k=1}^{K} \alpha_k\, x_{n_k}\right\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon} ,$$

ce qui démontre la proposition.

§ III. FIN DE LA DEMONSTRATION : EXISTENCE D'ELEMENTS p-STABLES.

D'après la proposition II.4, la démonstration du théorème d'Aldous sera achevée si on montre que C_1 contient un élément p-stable, $1 < p \leq 2$. C'est l'objet du théorème III.3 ci-après.

La méthode utilisée dans ce paragraphe pour démontrer le lemme III.1 et la proposition III.2 nous a été indiquée par J.L. Krivine. Nous travaillons sur des espaces réels.

Lemme III.1 : Soient E un espace de Banach et T un opérateur linéaire continu sur E. Si λ est un point de la frontière du spectre de T, on a

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in E, \qquad \|x\| = 1 \quad \text{et} \quad \|Tx - \lambda x\| \leq \varepsilon .$$

Démonstration : Soit $\lambda' \notin \mathrm{Sp}\, T$ tel que $|\lambda - \lambda'| < \varepsilon/2$. Puisque $T - \lambda = (T - \lambda') + (\lambda' - \lambda)$ n'est pas inversible, on doit avoir :

$$\varepsilon/2 > |\lambda' - \lambda| > \|(T-\lambda')^{-1}\|^{-1} .$$

Il existe donc $y \in E$, $\|y\| = 1$ et $\|(T-\lambda')^{-1}(y)\| > \frac{2}{\varepsilon}$.
Si on pose $x_1 = (T-\lambda')^{-1}(y)$, on aura :

$$\left\|(T-\lambda')\frac{x_1}{\|x_1\|}\right\| = \frac{\|y\|}{\|x_1\|} < \varepsilon/2$$

d'où finalement, avec $x = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$:

$$\|x\| = 1 \quad \text{et} \quad \|(T-\lambda)(x)\| \leq \varepsilon \quad .$$

Soit E un espace muni d'une base symétrique $(e_n)_{n=0}^{\infty}$. On dira que deux vecteurs $x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n$ et $y = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n e_n$ ont la "même distribution" s'il existe une injection π de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $x = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n e_{\pi(n)}$ (♦)

<u>Proposition III.2</u> : Soit E un espace de Banach à base symétrique. Pour tout entier k il existe une constante (réelle) γ_k telle que :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$, $\|x\| = 1$, et des vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ à supports disjoints, avec x_j de même distribution que x pour $j = 1, 2, \ldots, k$, et

$$\|x - \gamma_k(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\| \leq \varepsilon \quad .$$

(On notera que nécessairement $1/k \leq \gamma_k \leq 1$.)

Donnons la démonstration pour $k = 2$, pour simplifier l'écriture. Définissons sur E les opérateurs :

$$S_1 e_n = e_{2n} \quad , \quad S_2 e_n = e_{2n+1} \quad , \quad n = 0, 1, \ldots \quad ; \quad \text{et} \quad T = S_1 + S_2 \quad .$$

Pour tout $x \in E$, Tx est la somme des vecteurs à supports disjoints $S_1 x$ et $S_2 x$, qui sont de même distribution que x.
Notons que T n'est pas surjectif. Le spectre de T est donc non vide (il contient 0) et on peut considérer un point λ de la frontière du spectre de T. D'après le lemme III.1, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un vecteur $x \in E$ tel que

$$\|Tx - \lambda x\| \leq \varepsilon \quad .$$

Comme on observe par ailleurs que $\|y\| \leq \|Ty\| \leq 2\|y\|$ pour tout $y \in E$, on a nécessairement $1 \leq \lambda \leq 2$, ce qui permet de conclure en prenant $\gamma = \lambda^{-1}$.

(♦)

ou bien $y = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_{\pi(n)}$.

<u>Théorème III.3</u> : Tout D-cône fermé non trivial contenu dans C_1 contient un élément p-stable, pour un $p \in]1,2]$.

Soit D un D-cône fermé non trivial contenu dans C_1. Remarquons tout d'abord que D contient des D-cônes fermés non triviaux <u>minimaux</u> (c'est clair par Zorn, en utilisant la compacité de l'ensemble $K = \{\mu \in C \; ; \; \|\mu\| = 1\}$.) On pourra se ramener par conséquent au cas où D est minimal.

Soit $\mu \in D$, $\|\mu\| > 0$. L'espace $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, muni de la norme de S_μ, est un espace à base symétrique. D'après la proposition III.2 il existe γ, $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ ou puisse trouver x, x_1, x_2 de même distribution, x_1 et x_2 à supports disjoints et

$$\|x\|_\mu = 1 \quad , \quad \|x - \gamma(x_1 + x_2)\|_\mu \leq \varepsilon \quad .$$

Les vecteurs x, x_1 et x_2 ayant la même distribution auront la même μ-loi ν. Par ailleurs, la μ-loi de $\gamma(x_1 + x_2)$ est $D_\gamma \nu * D_\gamma \nu$, puisque les supports de x_1 et x_2 sont disjoints. D'après le lemme II.3, on aura :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \;, \qquad E \; |\hat{\nu}(t) - (\hat{\nu}(\gamma(t))^2| \leq \varepsilon \; |t| \quad .$$

Le raisonnement précédent démontre ceci :

<u>Lemme III.4</u> : Pour tout D-cône non trivial D contenu dans C_1, il existe γ, $1/2 \leq \gamma \leq 1$, et une suite d'éléments de D vérifiant pour tout $k \geq 1$

$$\|\nu_k\| = 1 \quad , \quad E \; |\hat{\nu}_k(t) - (\hat{\nu}_k(\gamma t))^2| \leq \frac{1}{k} \quad \text{si } |t| \leq k \quad .$$

Nous appellerons <u>suite $(\gamma,2)$-approximative</u> toute suite (ν_k) d'éléments de PA vérifiant :

$$\forall\, k \geq 1, \qquad E \; |\hat{\nu}_k(t) - (\hat{\nu}_k(\gamma t))^2| \leq \frac{1}{k} \quad \text{si } |t| \leq k \quad .$$

Soit D un D-cône non trivial contenu dans C_1 et soit γ donné par le lemme précédent. Nous désignerons par $\tilde{D}$ l'ensemble des éléments $\nu \in C_1$ qui sont limite d'une suite $(\gamma,2)$-approximative (ν_k) <u>avec</u> $\nu_k \in D$ <u>pour tout</u> $k \geq 1$. Notons tout d'abord que $\tilde{D}$ n'est pas réduit à $\{\delta_0\}$. En effet, puisque K est compact, la suite (ν_k) du lemme ci-dessus possède une sous-suite (ν_{n_k}) convergeant vers $\nu \neq \delta_0$, et $\nu \in \tilde{D}$. Il est facile de voir que $\tilde{D}$ est fermé. De plus, $\tilde{D}$ est un D-cône. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si (ν_k) est une suite (dans D) $(\gamma,2)$-approximative de limite ν, choisissons un entier $n \geq |\lambda|$. On voit que $(D_\lambda \nu_{nk})_{k=1}^{\infty}$ est une suite $(\gamma,2)$-approximative de limite $D_\lambda \nu$, donc $D_\lambda \nu \in \tilde{D}$. Soient maintenant μ et ν deux éléments de $\tilde{D}$, (μ_k) et (ν_k) deux suites (dans D) $(\gamma,2)$-approximatives de limites μ et ν, et d une distance définissant la topologie de PA. Si $\varepsilon > 0$ est donné, ainsi qu'un entier k_o, on peut trouver $k \geq 2k_o$ tel que $d(\mu_k * \nu, \mu * \nu) < \varepsilon$, d'après la continuité séparée de la convolution, puis par le même argument $j \geq 2k_o$ tel que $d(\mu_k * \nu_j, \mu * \nu) < \varepsilon$. Posons $\xi_{k_o} = \mu_k * \nu_j$. On a :

$$E\,|\hat{\xi}_{k_o}(t) - (\hat{\xi}_{k_o}(\gamma t))^2| \leq E\,|\hat{\mu}_k(t)(\hat{\nu}_j(t) - (\hat{\nu}_j(\gamma t))^2)| +$$

$$+ E\,|(\hat{\nu}_j(\gamma t))^2\,(\hat{\mu}_k(t) - (\hat{\mu}_k(\gamma t))^2)|$$

$$\leq \frac{1}{2k_o} + \frac{1}{2k_o} \qquad \text{si } |t| \leq k_o \quad .$$

On voit donc que $\mu * \nu$ est limite d'une suite $(\gamma,2)$-approximative, donc $\mu * \nu \in \tilde{D}$. En résumé $\tilde{D}$ est un D-cône fermé non trivial. Si on avait supposé D fermé non-trivial minimal, on aurait nécessairement $\tilde{D} = D$. On peut donc énoncer :

<u>Lemme III.5</u> : Si D est un D-cône fermé non trivial minimal contenu dans C_1, il existe γ, $1/2 \leq \gamma \leq 1$, tel que tout point de D soit limite d'une suite $(\gamma,2)$-approximative formée de points de D.

Dans la suite, nous supposerons que D est un D-cône fermé non trivial minimal contenu dans C_1. Si $\mu \in D$, on a $\mu(t) \geq 0$ pour tout t. En effet, soit (ν_k) une suite $(\gamma,2)$-approximative, formée de points de D, et de limite μ. Pour tout k, ν_k est une mesure symétrique $(\nu_k \in C_1)$, donc $\hat{\nu}_k(t)$ est réel. De plus, $\hat{\nu}_k(t)$ tend vers $\mu(t)$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$, et $\lim_{k\to\infty} E\,|\hat{\nu}_k(t) - (\hat{\nu}_k(\gamma t))^2| = 0$, donc $\hat{\mu}(t)$ est aussi limite de $(\hat{\nu}_k(\gamma t))^2$, ce qui démontre notre affirmation.

Appelons maintenant suite $(\gamma,3)$-approximative une suite (ν_k) de PA telle que pour tout $k \geq 1$

$$|t| \leq k \Longrightarrow E\,|\hat{\nu}_k(t) - (\hat{\nu}_k(\gamma t))^3| \leq 1/k \quad .$$

Il est clair qu'en utilisant la proposition III.2 pour $k = 3$ on démontre par la même méthode que précédemment :

<u>Lemme III.6</u> : Si D est un D-cône fermé non trivial minimal contenu dans C_1, il existe δ, $1/3 \leq \delta \leq 1$, tel que tout point de D soit limite d'une suite $(\delta,3)$-approximative formée de points de D.

On a vu précédemment que $\hat{\nu}(t) \geq 0$ lorsque $\nu \in D$. Il en résulte que pour t fixé, les applications $\nu \to E(\hat{\nu}(\gamma t))^2$ et $\nu \to E(\hat{\nu}(\delta t))^3$ sont s.c.i. sur D. De plus $\mathcal{O} = \{\nu \in D \ ; \ 0 < \|\nu\| < 1\}$ est un ouvert du compact $\{\nu \in D \ ; \ \|\nu\| \leq 1\}$, donc $\mathcal{O}$ est un espace de Baire. Il existe donc un point de continuité commun ξ pour toutes les applications $\nu \to E(\hat{\nu}(\gamma t))^2$, $\nu \to E(\hat{\nu}(\delta t))^3$, définies sur $\mathcal{O}$, pour tout t <u>rationnel</u>. Soit (ν_k) une suite $(\gamma,2)$-approximative formée de points de D, et de limite ξ (lemme III.5). On a $\nu_k \in \mathcal{O}$ pour k assez grand, donc d'après la propriété de ξ :

$$\forall \ t \in \mathbb{Q}, \qquad E(\hat{\xi}(\gamma t))^2 = \lim_{k\to\infty} E(\hat{\nu}_k(\gamma t))^2 \ .$$

Mais puisque ν_k tend vers ξ, $\hat{\nu}_k(\gamma t)$ tend vers $\hat{\xi}(\gamma t)$ dans $\sigma(L^\infty,L^1)$ et a fortiori faiblement dans L^2. L'égalité ci-dessus montre qu'en fait $\hat{\nu}_k(\gamma t)$ tend vers $\hat{\xi}(\gamma t)$ dans L^2, donc $(\hat{\nu}_k(\gamma t))^2$ tend vers $(\hat{\xi}(\gamma t))^2$ dans L^1. Par ailleurs, $\lim\limits_{k\to\infty} E\ |\hat{\nu}_k(t) - (\hat{\nu}_k(\gamma t))^2| = 0$, donc $\hat{\nu}_k(t)$ converge aussi dans L^1, et on sait que $\hat{\nu}_k(t)$ tend vers $\hat{\xi}(t)$ dans $\sigma(L^\infty,L^1)$. Finalement :

$$\forall \ t \in \mathbb{Q}, \qquad \hat{\xi}(t) = (\hat{\xi}(\gamma t))^2 \ .$$

De plus $\hat{\xi}(t)$ et $\hat{\xi}(\gamma t)$ sont des fonctions continues de t (pour presque tout ω). On a donc

$$\forall \ t \in \mathbb{R}, \qquad \hat{\xi}(t) = (\hat{\xi}(\gamma t))^2 \ .$$

On montre de la même façon en utilisant le lemme III.6

$$\forall \ t \in \mathbb{R}, \qquad \hat{\xi}(t) = (\hat{\xi}(\delta t))^3 \ .$$

Nous utiliserons pour conclure le lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur :

<u>Lemme III.7</u> : Soit f une fonction réelle continue définie sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 1$ et $\forall \ t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(-t) = f^2(\gamma t) = f^3(\delta t)$, avec $1/2 \leq \gamma < 1$, $1/3 \leq \delta \leq 1$. Il existe alors θ tel que

$$\forall \ t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \exp(\theta\ |t|^p) \ , \quad \text{où} \ \ \gamma = 2^{-1/p} \ .$$

On déduit de ce lemme que

$$\hat{\xi}(t) = \exp \theta\, |t|^p \quad , \quad \text{avec } p \in [1,2] \quad ,$$

où θ est une variable aléatoire sur Ω, négative puisque $\hat{\xi}(t) \leq 1$. Il en résulte immédiatement que ξ est une mesure p-stable. On a $\xi \neq \delta_o$ puisque $\xi \in \mathcal{O}$ et si $|\alpha|^p + |\beta|^p = 1$

$$\widehat{D_\alpha \xi * D_\beta \xi(t)} = \hat{\xi}(\alpha t)\, \hat{\xi}(\beta t) = \hat{\xi}(t) \quad ,$$

donc $$D_\alpha \xi * D_\beta \xi = \xi \quad .$$

Remarquons pour finir que l'on a $p \neq 1$, sinon X contiendrait ℓ_1 d'après la proposition II.4, ce qui est impossible puisque X est réflexif. La démonstration du théorème III.3 est achevée.
