G. Pisier

Factorisation d'opérateurs aléatoires, d'après Benyamini et Gordon

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 22, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980____A19_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE

D'ANALYSE FONCTIONNELLE

1979-1980

FACTORISATION D'OPERATEURS ALEATOIRES,

d'après Benyamini et Gordon

G. PISIER

Exposé No XXII

25 Avril 1980

INTRODUCTION

Soient X, Y, Z trois espaces de Banach et soit T un opérateur de X dans Z. Notons $F_Y(T)$ la "norme" de factorisation de T par Y, c'est-à-dire :

$$F_Y(T) = \inf\{\|A\| \ \|B\|\}$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles $X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$ avec $T = BA$. Récemment, Benyamini et Gordon [1] ont donné une formule permettant de majorer $F_Y(T)$ dans un cadre très général, en utilisant des matrices aléatoires pour factoriser l'opérateur T (en somme, on obtient souvent une bonne factorisation en choisissant A et B au hasard !).

Nous exposons ici l'inégalité principale de [1], ainsi que quelques illustrations. Le lecteur trouvera de plus nombreuses applications dans l'article [1].

§ 1. INEGALITES SUR LES MATRICES ALEATOIRES.

Dans toute la suite, on notera $\{g_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ une collection (indexée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) de variables aléatoires gaussiennes réelles indépendantes équidistribuées, normalisées de sorte que $\mathbb{E}\,|g_{ij}|^2 = 1$. On notera aussi $\{g_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables gaussiennes comme précédemment mais cette fois indexée par $\mathbb{N}$. Pour toute suite finie $(x_i)_{i \le n}$ dans un espace de Banach, on pose

$$\varepsilon_2(x_i) = \sup\{\|\sum_1^n \alpha_i \ x_i\| \mid \sum_1^n \ |\alpha_i|^2 \le 1\} \quad .$$

Rappelons tout d'abord l'inégalité suivante découverte par S. Chevet et qui est extrêmement utile pour estimer la norme des tenseurs aléatoires gaussiens :

Théorème 1.1 ([8], exposé 19) : Soient E, F deux espaces de Banach, soient $(e_i)_{i \le n}$ et $(f_j)_{j \le m}$ des éléments de E et F respectivement. On a alors

(1.1) $$\frac{\Lambda}{2} \le \mathbb{E}\,\|\sum_{i=1}^n \ \sum_{j=1}^m g_{ij} \ e_i \otimes f_j\|_{E \otimes_\varepsilon F} \le \sqrt{2}\ \Lambda$$

où l'on a posé

$$\Lambda = \varepsilon_2(e_i)\ \mathbb{E}\|\Sigma g_j\ f_j\| + \varepsilon_2(f_j)\ \mathbb{E}\|\Sigma g_i\ e_i\| \quad .$$

C'est le côté droit de (1.1) qui nous servira ci-dessous. La démonstration de (1.1) est une application très simple d'une variante d'un lemme dont la version originale est due à Slepian.

<u>Notations</u> : Soit n un entier. Soit A une matrice $n\times n$. On note

$$|A| = (A^* A)^{1/2}$$

$$\|A\|_1 = \mathrm{tr}\ |A|$$

et

$$\|A\|_2 = (\mathrm{tr}\ A^* A)^{1/2} \quad ;$$

de même, on note $\|A\|_\infty$ la norme de A en tant qu'opérateur sur ℓ_n^2.

On note $U^n = (u_{ij}^n)_{1\le i,j\le n}$ une matrice aléatoire orthogonale, uniformément distribuée sur le groupe orthogonal O(n) (i.e. la loi de U^n n'est autre que la mesure de Haar normalisée sur O(n)).

On note G^n la matrice aléatoire gaussienne définie par

$$G^n = (n^{-1/2}\ g_{ij})_{1\le i,j\le n} \quad .$$

Donnons une première application du théorème précédent.

<u>Lemme 1.2</u> : Il existe des constantes C_1, C_2 et $\delta > 0$ (indépendantes de n) telles que :

(1.2) $$\frac{1}{C_1} \le \mathbb{E}\ \|G^n\|_\infty \le C_2$$

(1.3) $$\delta n \le \mathbb{E}\ \|G^n\|_1 \le n \quad .$$

<u>Démonstration</u> : (Signalons qu'il existe une démonstration directe élémentaire de (1.2) à partir du lemme 3.3 ci-dessous.) L'inégalité (1.2) résulte immédiatement de (1.1) avec $E = F = \ell_n^2$; on trouve $C_2 = 2\sqrt{2}$ et $C_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

D'autre part, il est facile de voir (puisque $\mathbb{E}\ |g_{ij}| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$) que l'on a :

$$\sqrt{n}\ \mathbb{E}\ \|G^n\|_2 = \mathbb{E}\ (\Sigma\ g_{ij}^2)^{1/2} \ge n\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

d'où $$\mathbb{E}\,\|G^n\|_2 \geq (2n/\pi)^{1/2} \quad .$$

On a donc

$$(2n/\pi)^{1/2} \leq \mathbb{E}\,\|G^n\|_2 \leq \mathbb{E}\,(\|G^n\|_1\,\|G^n\|_\infty)^{1/2} \leq (\mathbb{E}\,\|G^n\|_1\;\mathbb{E}\,\|G^n\|_\infty)^{1/2}$$
$$\leq (\mathbb{E}\|G^n\|_1 \cdot 2\sqrt{2})^{1/2}$$

d'où $$\mathbb{E}\|G^n\|_1 \geq n(\pi\sqrt{2})^{-1} \quad ,$$

ce qui prouve (1.3) avec $\delta = (\pi\sqrt{2})^{-1}$ (l'autre côté de (1.3) est facile).

Nous aurons aussi besoin de l'inégalité suivante qui permet de comparer les matrices aléatoires gaussiennes avec les matrices aléatoires orthogonales (l'intérêt est que l'inverse d'une matrice orthogonale ou unitaire est plus facile à déterminer que celui d'une matrice gaussienne !)

<u>Proposition 1.3</u> [5] : Soit n un entier. Soit $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On a :

$$\mathbb{E}\,f(G^n) \geq \mathbb{E}\,f(\delta_n\,U^n)$$

où δ_n est un nombre réel tel que

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $$\delta_n \geq \delta > 0 \quad .$$

<u>Démonstration</u> : L'idée de la démonstration est de traiter U^n comme une variable de Bernoulli (U^n est "unimodulaire"...). En effet, si l'on fait la décomposition polaire de G^n, alors la partie unitaire de G^n est distribuée comme U^n ; de plus, on vérifie aisément qu'elle est indépendante de la variable $|G^n|$. Précisément, si l'on suppose que G^n et U^n sont indépendantes, alors on peut voir que $U^n|G^n|$ a la même distribution (comme matrice aléatoire) que U^n. On a donc :

$$\mathbb{E}\,f(G^n) = \mathbb{E}\,f(U^n|G^n|)$$

d'où par convexité (puisque U^n et $|G^n|$ sont indépendantes)

$$\geq \mathbb{E}\,f(U^n\;\mathbb{E}\,|G^n|) \quad .$$

Or, on peut facilement estimer la matrice $\mathbb{E}\,|G^n|$; en effet, on peut remarquer tout d'abord que $\mathbb{E}\,|G^n|$ est un multiple de l'identité, car $\mathbb{E}\,|G^n|$ commute avec toute matrice orthogonale V [en effet $V^{-1}G^nV$ est distribué comme G^n, donc $V^{-1}\,|G^n|\,V$ est distribué comme $|G^n|$, donc

$$V^{-1}\,\mathbb{E}\,|G^n|V = \mathbb{E}\,(V^{-1}\,|G^n|\,V) = \mathbb{E}\,|G^n| \quad , \quad \text{cqfd]} \quad .$$

On peut donc écrire $\mathbb{E}\,|G^n| = \delta_n I^n$ où I^n est la matrice $n\times n$ identité. Prenant la trace des deux membres, on trouve

$$n\,\delta_n = \mathbb{E}\,\mathrm{tr}\,|G^n| \quad ,$$

mais d'après le lemme précédent, on a

$$\mathbb{E}\,\mathrm{tr}|G^n| \geq \delta n \qquad \forall\, n\in\mathbb{N} \quad ,$$

d'où

$$\delta_n \geq \delta \quad . \qquad \text{cqfd} \quad .$$

Le corollaire suivant est immédiat :

<u>Corollaire 1.4</u> : Soient $p\geq 1$ et (x_{ij}) des éléments d'un espace de Banach arbitraire. On a :

$$(1.4) \qquad \mathbb{E}\left\|\sum_{ij=1}^{n} u_{ij}^{n}\, x_{ij}\right\|^p \leq \delta^{-p}\,\mathbb{E}\left\|n^{-1/2}\sum_{ij=1}^{n} g_{ij}\, x_{ij}\right\|^p \quad .$$

§ 2. LE PRINCIPAL RESULTAT.

<u>Théorème 2.1</u> [1] : Soient X, Y,Z trois espaces de Banach. Soient $(x_i,x_i^*)_{i\leq n}$, $(y_j,y_j^*)_{j\leq m}$ et $(z_i,z_i^*)_{i\leq n}$ trois systèmes biorthogonaux [i.e. tels que, par exemple, $\langle x_k,x_i^*\rangle$ vaut 1 si $i=k$ et 0 sinon] dans X, Y et Z respectivement.
On considère l'opérateur $T:X\to Z$ défini par $T=\sum_{i=1}^{n} x_i^*\otimes z_i$. On suppose que $n\leq m$. On a alors :

$$(2.1) \qquad F_Y(T) \leq Cm^{-1}\{\varepsilon_2(x_i^*)\ \mathbb{E}\|\Sigma\, g_jy_j\| + \varepsilon_2(y_j)\ \mathbb{E}\|\Sigma\, g_i\ x_i^*\|\}$$
$$\cdot\,\{\varepsilon_2(y_j^*)\ \mathbb{E}\|\Sigma\, g_iz_i\| + \varepsilon_2(z_i)\ \mathbb{E}\|\Sigma\, g_jy_j^*\|\}$$

où C est une constante numérique.

<u>Démonstration</u> : On considère une factorisation aléatoire

$$T = B_\omega A_\omega \tag{2.2}$$

avec

$$A_\omega = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} u^m_{ij}(\omega)\, x_i^* \otimes y_j$$

$$B_\omega = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} u^m_{ij}(\omega)\, y_j^* \otimes z_i \quad .$$

On vérifie aisément que l'orthogonalité de U^m entraîne (2.2). On a donc

$$F_Y(T) \le \{\mathbb{E}\,(\|A_\omega\|\ \|B_\omega\|)^{1/2}\}^2$$

$$\le (\mathbb{E}\,\|A_\omega\|)(\mathbb{E}\,\|B_\omega\|) \quad ,$$

d'où d'après le corollaire 1.4

$$\le \delta^{-2}\, m^{-1}\ \mathbb{E}\,\|\sum_{ij} g_{ij}\, x_i^* \otimes y_j\|\ \mathbb{E}\,\|\sum_{ij} g_{ij}\, y_j^* \otimes z_i\|$$

et on conclut donc (avec $C = 2\delta^{-2}$) par le théorème 1.1.

En particulier, on a :

<u>Corollaire 2.2</u> : Soit $(y_j, y_j^*)_{j\le m}$ un système biorthogonal dans un espace de Banach Y. Si $n \le m$, alors l'identité de ℓ^2_n (notée $Id_{\ell^2_n}$) vérifie :

$$F_Y(Id_{\ell^2_n}) \le \frac{C}{\sqrt{m}}\, (\mathbb{E}\,\|\Sigma\, g_j y_j\| + \sqrt{n}\ \varepsilon_2(y_j))(\mathbb{E}\,\|\Sigma\, g_j y_j^*\| + \sqrt{n}\ \varepsilon_2(y_j^*)) \quad .$$

<u>Remarque 2.3</u> : Supposons que $n = m$ dans le théorème 2.1 ; il est alors facile de vérifier que l'on a pour tout ω :

$$\|B_\omega\| = \|\sum_{1\le i,\, j\le n} u^n_{ij}(\omega)\, y_j^* \otimes z_i\|_{Y'\otimes_\varepsilon Z} \le \varepsilon_2(z_i)\ \varepsilon_2(y_j^*) \quad .$$

On a donc aussi :

$$F_Y(T) \le \mathbb{E}\,\|A_\omega\|\ \varepsilon_2(z_i)\ \varepsilon_2(y_j^*) \tag{2.3}$$

$$\le \frac{K}{\sqrt{n}}\, (\varepsilon_2(x_i^*)\mathbb{E}\|\Sigma\, g_j y_j\| + \varepsilon_2(y_j)\ \mathbb{E}\|\Sigma\, g_i x_i^*\|)\ \varepsilon_2(z_i)\,.\,\varepsilon_2(y_j^*) \quad ,$$

où K est une constante numérique.

§ 3. APPLICATIONS.

Les applications du théorème précédent sont nombreuses et variées. Nous allons nous contenter de considérer ici le cas $n = m$; dans ce cas, on peut retrouver la plupart des estimations connues de la distance entre deux espaces de Banach X, Z de dimension n. Rappelons que $d(X,Z)$ est définie de la manière suivante :

$$d(X,Z) = \inf\{\|T\| \, \|T^{-1}\|\}$$

où l'infimum porte sur tous les isomorphismes T de X sur Z.
(Le lecteur notera que c'est en fait $\operatorname{Log} d$ qui se comporte comme une distance !)
Rappelons qu'un résultat classique dû à F. John (cf. e.g. [9] exposé X, corollaire 1.1) assure que $d(X,\ell^2_n) \leq \sqrt{n}$ pour tout espace X de dimension n. Ce résultat a été le point de départ de toute une série de travaux dont le but est de déterminer le d-diamètre de l'ensemble des espaces de Banach de dimension n. En particulier, le problème suivant est toujours ouvert :

Problème : Soit d_n le nombre

$$d_n = \sup\{d(E,F) \mid E,F \text{ Banach, } \dim E = \dim F = n\} \quad ,$$

est-il vrai que $\sup_n n^{-1/2} d_n < \infty$?

Le résultat de F. John déjà mentionné entraîne seulement $d_n \leq n$, c'est malheureusement la seule majoration connue de $d(E,F)$ sans hypothèse sur E ou F. Par contre, dans de très nombreux cas concrets, on a pu vérifier que $d(E,F) \leq (\dim E)^{1/2}$. Nous allons retrouver certains de ces résultats comme conséquences du théorème 2.1.

Signalons que l'on sait seulement depuis peu que $\sup n^{-1/2} d_n > 1$; en effet (cf. [6]), on a $d_2 = 3/2 > \sqrt{2}$!

Soient (a_n), (b_n) deux suites de réels positifs ; on notera simplement $a_n \sim b_n$ pour signifier qu'il existe une constante λ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{\lambda}\, b_n \leq a_n \leq \lambda\, b_n \quad .$$

Théorème 3.1 [4] : Si $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, on a

$$d(\ell^p_n,\ell^q_n) \sim n^{\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = \max\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \,,\, \frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \quad .$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème 2.1 avec $X = Z = \ell_n^p$ et $Y = \ell_n^q$, et en prenant pour systèmes biorthogonaux les bases naturelles de ces espaces.

Remarque : On démontre classiquement en utilisant les matrices de Hadamard que $d(\ell_n^1, \ell_n^\infty) \leq \sqrt{n}$, mais on ne retrouve apparemment pas ce résultat à partir du théorème 2.1, (ce dernier introduit un facteur logarithmique superflu).

***

Récemment, N. Tomczak-Jaegermann a démontré un analogue non commutatif du théorème précédent pour l'espace c_n^p, c'est-à-dire l'espace des matrices $n \times n$ munies de la norme

$$\|A\|_p = (\operatorname{tr} |A|^p)^{1/p} \quad .$$

On a vu au lemme 1.2 que

$$\mathbb{E}\, \|G^n\|_p \sim n^{1/p} \quad \text{si} \quad p = 1,\ 2 \text{ et } \infty \quad .$$

Il est facile de voir (en interpolant) que l'on a le même résultat pour tout p avec $1 \leq p \leq \infty$.

Par conséquent, si l'on note $(e_i \otimes e_j)$ la base canonique de c_n^p, on a :

$$\mathbb{E}\, \Big\| \sum_{ij} g_{ij}\, e_i \otimes e_j \Big\|_p \sim n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{2}}$$

et d'autre part, on voit facilement que

$$\varepsilon_2(e_i \otimes e_j) = \begin{cases} n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} & \text{si } p \leq 2 \\ 1 & \text{si } p \geq 2 \end{cases} \quad .$$

En reportant ces estimations dans l'inégalité (2.1), on obtient alors immédiatement :

Théorème 3.2 [7] : Si $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$,

$$d(c_n^p, c_n^q) \sim n^\alpha \quad \text{avec } \alpha = \max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right\} \quad .$$

Remarque : Dans les deux résultats précédents, la minoration de la distance par n^{α} est facile, c'est la majoration, plus délicate, qui résulte de (2.1).

***

Estimer la moyenne de la norme d'une variable gaussienne revient à estimer l'intégrale du supremum d'une famille de variables gaussiennes réelles. Le lemme élémentaire (et bien connu) ci-dessous est donc fort utile, il résulte du comportement à l'infini de la distribution des variables gaussiennes.

Lemme 3.3 : Soient $Z_1,\ldots,Z_n$ des variables gaussiennes (non nécessairement indépendantes ou normalisées). On a

$$\mathbb{E}\sup_{i\le N}|Z_i| \le C'(\mathrm{Log}(N+1))^{1/2}\sup_{i\le N}(\mathbb{E}|Z_i|^2)^{1/2}$$

où C' est une constante numérique.

Soit alors F un sous-espace de dimension n de ℓ_N^{∞} et soit (y_j) une suite finie d'éléments de F. Le lemme précédent montre que l'on a :

$$\mathbb{E}\left\|\Sigma\, g_j\, y_j\right\| \le C'(\mathrm{Log}(N+1))^{1/2}\,\varepsilon_2(y_j) \quad . \tag{3.1}$$

On en déduit alors le

Théorème 3.4 [2] : Soient E, F deux sous-espaces de dimension n de l'espace ℓ_N^{∞}. On a :

$$d(E',F) \le KC'(\mathrm{Log}(N+1))^{1/2}\sqrt{n} \quad .$$

Démonstration : Puisque $d(E',\ell_n^2)\le\sqrt{n}$ et $d(F,\ell_n^2)\le\sqrt{n}$, on peut trouver des systèmes biorthogonaux $(x_i,x_i^*)_{i\le n}$ dans $E'\times E$ et $(y_j,y_j^*)_{i\le n}$ dans $F\times F'$ tels que

$$\varepsilon_2(x_i)\varepsilon_2(x_i^*) \le \sqrt{n} \quad\text{et}\quad \varepsilon_2(y_j)\varepsilon_2(y_j^*) \le \sqrt{n} \quad . \tag{3.2}$$

En appliquant (3.1) à E au lieu de F, on trouve

$$\mathbb{E}\left\|\Sigma\, g_i\, x_i^*\right\| \le C'(\mathrm{Log}(N+1))^{1/2}\,\varepsilon_2(x_i^*) \quad . \tag{3.3}$$

Par conséquent, si l'on applique la remarque 2.3 dans le cas $X = Z = E'$, $(z_i, z_i^*) = (x_i, x_i^*)$, $Y = F$, et $T = Id_{E'}$, on trouve simplement (en utilisant (3.1) et (3.3)) :

$$d(E',F) \leq \frac{KC'}{\sqrt{n}} (\mathrm{Log}(N+1))^{1/2} \varepsilon_2(x_i)\ \varepsilon_2(x_i^*)\ \varepsilon_2(y_j)\ \varepsilon_2(y_j^*)$$

soit, d'après (3.2) : $\leq KC' (\mathrm{Log}(N+1))^{1/2} \sqrt{n}$. cqfd.

<u>Remarque</u> : On peut considérer le résultat précédent comme une extension de l'estimation générale $d(E',F) \leq n$ (que nous avons signalée ci-dessus) ; en effet, quand E et F sont arbitraires, on peut prendre en général $N = 2^n$ et on retrouve le même ordre de grandeur pour $d(E',F)$.

***

On peut aussi estimer $d(E',F)$ (à l'aide de la remarque 2.3) en supposant que E et F ont des constantes de type 2 fixées indépendamment de n. Cette situation correspond au cas où E' et F sont "de part et d'autre de ℓ^2", elle généralise le cas $E' = \ell_n^p$ et $F = \ell_n^q$ avec $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$.

La constante de type 2 d'un espace de Banach X -notée $T_2(X)$- est définie comme la plus petite constante λ telle que :
$\forall$ n, $\forall \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ on a :

$$\mathbb{E} \|\Sigma\, g_i\, x_i\|^2 \leq \lambda^2\, \Sigma\, \|x_i\|^2 \quad .$$

Soit $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$, et soit $u_{(x_i)} : X' \to \ell_n^2$ l'opérateur défini par : $\forall\, \xi \in X'$, $u_{(x_i)}(\xi) = (\xi(x_i))_{i \leq n}$. Il n'est pas difficile de voir (en utilisant la factorisation de Pietsch de $u_{(x_i)}$ et l'invariance par rotation des mesures gaussiennes) que l'on a :

$$(3.4) \qquad (\mathbb{E} \|\Sigma\, g_i\, x_i\|^2)^{1/2} \leq T_2(X)\ \pi_2(u_{(x_i)}) \quad .$$

Pour plus de détails, cf. [3].

Avec ces précisions, nous pouvons maintenant dériver le

<u>Théorème 3.5</u> [2], [1] : Soient E, F deux espaces de Banach de dimension n. On a alors

$$d(E',F) \leq K(T_2(E) + T_2(F)) \sqrt{n} \quad ,$$

où K est une constante numérique.

Démonstration : On va encore appliquer la remarque 2.3 comme pour le théorème précédent. Puisque $\pi_2(Id_{E'}) = \pi_2(Id_{F'}) = \sqrt{n}$, il existe des systèmes biorthogonaux (x_i, x_i^*) dans $E' \times E$ et (y_j, y_j^*) dans $F \times F'$, tels que :

$$(3.5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2(x_i)\ \pi_2(u_{(x_i^*)}) \leq \sqrt{n} \\ \text{et} \\ \varepsilon_2(y_j^*)\ \pi_2(u_{(y_j)}) \leq \sqrt{n} \ . \end{array} \right.$$

Notons les inégalités triviales

$$(3.6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2(x_i^*) \leq \pi_2(u_{(x_i^*)}) \\ \text{et} \\ \varepsilon_2(y_j) \leq \pi_2(u_{(y_j)}) \ . \end{array} \right.$$

D'après (2.3) et (3.4), on a :

$$d(E',F) \leq \frac{K}{\sqrt{n}} (T_2(F)\ \pi_2(u_{(y_j)})\ \varepsilon_2(x_i^*) + T_2(E)\ \pi_2(u_{(x_i^*)})\ \varepsilon_2(y_j))$$
$$\cdot (\varepsilon_2(x_i)\ \varepsilon_2(y_j^*)) \ ,$$

d'où, d'après (3.5) et (3.6) :

$$\leq K(T_2(F) + T_2(E))\sqrt{n} \ . \qquad \text{cqfd.}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Benyamini et Y. Gordon : Random factorization of operators between Banach spaces, à paraître.

[2] W. Davis, V. Milman et N. Tomczak-Jaegermann : The diameter of the space of n-dimensional spaces, Israel J. Math., à paraître.

[3] T. Figiel et N. Tomczak-Jaegermann : Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces, Israel J. Math. 33 (1979), 155-171.

[4] V.I. Gurarii, M.I. Kadeč, et V.I. Mačaev : Distances entre les analogues fini-dimensionels des espaces L_p, Mat. Sb. 70 (112) (1966), 481-489 (en russe).

[5] M.B. Marcus et G. Pisier : Random Fourier series with applications to harmonic analysis, à paraître.

[6] W. Stromquist : The maximum distance between two dimensional spaces, Math. Scand., à paraître.

[7] N. Tomczak-Jaegermann : On the Banach-Mazur distance between the trace classes c_p^n, Proc. A.M.S. 72 (1978), 305-308.

[8] Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach (1977-78), Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[9] Séminaire d'analyse fonctionnelle (1978-79), Ecole Polytechnique, Palaiseau.
