P. Assouad

Caractérisations de sous-espaces normés de L^1 de dimension finie

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 19, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1979-1980

CARACTERISATIONS DE SOUS-ESPACES NORMES DE L^1 DE DIMENSION FINIE

P. ASSOUAD
(Université Paris-Sud ERA 532)

Exposé No XIX

21 Mars 1980

§ 1. INTRODUCTION.

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé muni de la distance $x, x' \to \|x - x'\|$ (distance de Minkowski). On considère les assertions suivantes (plongement signifie ici plongement isométrique♦) :

(1) tout sous-espace métrique de E à 7 points se plonge dans un espace L^1 ;

(2) $(E, \| \ \|)$ satisfait à l'inégalité 7-polygonale (voir ci-dessous 1.8) ;

(3) tout sous-espace normé de E de dimension ≤ 3 se plonge dans un espace L^1 ;

(4) $(E, \| \ \|)$ satisfait à l'inégalité de Hlawka (voir ci-dessous § 4) ;

(5) la norme est symétriquement différentiable (voir ci-dessous 3.6) ;

(6) chaque facette de la boule unité du dual E' a un centre de symétrie ;

(7) la norme $\| \ \|$ est une norme L^1 (c'est-à-dire $(E, \| \ \|)$ est un sous-espace normé d'un espace L^1) ;

(8) la norme $\| \ \|$ est une différence de deux normes L^1.

On va montrer les implications suivantes (valables pour tout espace normé) :

$$\begin{tikzcd}
(2) \arrow[r, Rightarrow, "4.4"] & (4) \arrow[r, Rightarrow, "4.5"] & (5) \arrow[r, Rightarrow, "3.12"] & (6) \\
(1) \arrow[u, Rightarrow, "1.9"'] & (3) \arrow[u, Rightarrow, "4.1"'] & (8) \arrow[u, Rightarrow, "3.9"'] & \\
 & (7) \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

(on a indiqué pour chaque implication l'adresse de sa démonstration).

Si de plus la boule unité de $(E, \| \ \|)$ est un polytope (ce qui suppose que E est de dimension finie), alors on a aussi l'implication $(6) \Rightarrow (7)$ (critère d'Alexandrov pour les zonotopes, voir [5], [17] et ci-dessous § 2). Cela donne :

Proposition 1.1 : Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé de dimension finie ; on suppose que la boule unité de E est un polytope ; alors les assertions (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) sont équivalentes. En particulier

---

♦ Bien que L^1 ne soit pas strictement convexe, un espace normé qui se plonge isométriquement dans un espace L^1 s'y plonge alors aussi isométriquement et linéairement.

$(E,\| \ \|)$ se plonge dans L^1 dès qu'il en est de même de tout sous-espace métrique de cardinal 7 (on peut même se restreindre aux sous-espaces métriques de cardinal 7 et de rang ≤ 3).

Précisons d'abord que l'équivalence (4) $\Leftrightarrow$ (7) (lorsque la boule est un polytope) est due à Witsenhausen [19] ; c'est le point de départ du présent travail.
Par ailleurs l'équivalence (8) $\Leftrightarrow$ (7) (lorsque la boule est un polytope) est un résultat de R. Schneider ([17], p. 72, Satz 6.1). Ainsi seuls les critères (2) et (5) sont nouveaux (noter que (5) n'est qu'une reformulation de (6), cf. Bonnesen et Fenchel [6], p. 25-26 et ci-dessous 3.12). On peut faire les remarques suivantes :

(1.2) l'implication (8) $\Rightarrow$ (5) est une conséquence immédiate des implications (7) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (5) ; à ce sujet on peut noter qu'un espace normé vérifiant (8) est nécessairement stable au sens de l'exposé de Krivine [16] (un problème : L^p pour $p \in]2,\infty[$ vérifie-t-il (8) ?) ;

(1.3) l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est connue (voir par exemple mon exposé [2]) ; il faut signaler que l'inégalité 7-polygonale (ni du reste les inégalités de type négatif ou même les inégalités hypermétriques) ne suffit pas à assurer qu'un espace métrique à 7 points se plonge dans un espace L^1 (cf. [1] et [4]) ;

(1.4) l'implication (3) $\Rightarrow$ (4) sera démontrée en (4.1) ; soulignons que bien que l'inégalité de Hlawka ne fasse intervenir que 7 points de E, elle n'est pas conséquence de la plongeabilité dans L^1 de ces 7 points ;

(1.5) le critère (3) de plongement dans L^1 (lorsque la boule est un polytope) est à rapprocher du critère évident suivant (conséquence de l'identité de la médiane) : un espace normé $(E,\| \ \|)$ se plonge dans L^2 dès que tout sous-espace normé de E de dimension ≤ 2 se plonge dans un espace L^2 (mais dans L^2 le critère (1) n'a pas d'analogue) ;

(1.6) signalons aussi qu'une norme indéfiniment différentiable satisfait à (5), à (6) et aussi à (8) lorsque la dimension est finie (R. Schneider [18], p. 77) ;

(1.7) la remarque (1.6) ôte toute signification à (8), (5) et (6) pour les plongements dans L^1 d'espaces normés en général (lorsque la boule n'est pas un polytope) ; par contre le problème se pose de savoir si l'inégalité de Hlawka ou l'inégalité 7-polygonale est un critère de plongement dans L^1 des espaces normés lorsque la boule n'est pas un polytope.

Rappelons la définition de l'inégalité 7-polygonale (cf. mon exposé [2]) :

Définition 1.8 : Un écart d sur un ensemble X est dit 7-polygonal s'il vérifie :

$\forall$ a, b, c, x, y, z, $t \in X$,

$$d(a,b)+d(a,c)+d(b,c)+d(x,y)+d(x,z)+d(x,t)+d(y,z)+d(y,t)+d(z,t)$$
$$\le d(a,x)+d(a,y)+d(a,z)+d(a,t)+d(b,x)+d(b,y)+d(b,z)$$
$$+d(b,t)+d(c,x)+d(c,y)+d(c,z)+d(c,t)$$

(on parlera de l'inégalité 7-polynomale appliquée aux points $(a,b,c;x,y,z,t)$).

Proposition 1.9 (Deza [8]) : Tout écart plongeable dans L^1 est 7-polygonal.

Pour les sous-espaces métriques de L^1 on renvoie à Assouad, Deza [3].

§ 2. ZONOTOPES ET ZONOIDES.

Soient E, E' deux espaces vectoriels localement convexes en dualité. Soit $(\xi_i)_{i\in I}$ une famille finie de points de E'. Soit μ la mesure $\sum_{i\in I} \delta_{\xi_i}$. Le zonotope K' engendré par la famille $(\xi_i)_{i\in I}$ est l'image centrée de la mesure vectorielle $\eta\,\mu(d\eta)$, c'est-à-dire l'ensemble des points $\int f(\eta)\,\eta\,\mu(d\eta)$ pour f mesurable, $-1 \le f \le 1$; c'est donc l'ensemble des points $\sum_{i\in I} \lambda_i\,\xi_i$ pour $-1 \le \lambda_i \le 1$ (sous cette forme on voit que c'est bien un polytope).

Si $\eta\,\mu(d\eta)$ n'est plus discrète, on parle de zonoïde.

Si μ est sans atome et si E' est de dimension finie, le théorème de Liapounov montre que l'image centrée de la mesure vectorielle $\eta\,\mu(d\eta)$ reste la même si on se restreint aux f à valeurs dans $\{-1,1\}$ (cette image est fermée ; pour ce genre de question, on renvoie à [14] et aussi [12] p. 265-277).

On vérifie immédiatement que le polaire K d'un zonoïde K' a pour jauge

$$x \longrightarrow \int_{E'} |\langle\eta,x\rangle|\,\mu(d\eta) \quad ; \tag{2.1}$$

cette jauge est donc une semi-norme plongeable dans L^1 (c'est la fonction d'appui du zonoïde). Par ailleurs si E' est de dimension finie, toute semi-norme plongeable dans L^1 est de la forme (2.1) (c'est un résultat de Paul Lévy, voir par exemple [7] Lemme 2, p. 239) ; on a donc :

<u>Proposition 2.2</u> : On suppose E' de dimension finie ; alors une partie convexe fermée de E' est un zonoïde si et seulement si la jauge de son polaire est plongeable dans L^1.

On remarque que si K' est un zonotope engendré par la famille $(\xi_i)_{i\in I}$ et si η_1 est un point extrémal de K', alors K' - η_1 (zonotope décentré où on a amené l'origine en η_1) est la fermeture convexe de l'ensemble des vecteurs $\sum_{i\in A} \zeta_i$ pour tout $A\subset I$ (où $\zeta_i = 2\,\varepsilon_i\,\xi_i$ avec $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ une suite convenable fixée de signes). Sous cette forme on a clairement :

<u>Proposition 2.3</u> [9] [10] : Soit $(E,\|\ \|)$ un espace normé de dimension 2 ; c'est un sous-espace de L^1.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de la montrer lorsque la boule unité K de $(E,\|\ \|)$ est un polygone. Alors K' (le polaire de K) est aussi un polygone symétrique et donc un zonotope de façon évidente (déplacer l'origine en un point extrémal de K', les ζ_i sont les arêtes de K') ; donnons cependant deux autres démonstrations :

a) (c'est en substance celle de Ferguson [9]) supposons que K soit un polygone et notons $(x_i)_{i\in I}$ ses points extrémaux (on les suppose indiciés de façon cyclique et dans l'ordre où on les rencontre en parcourant ∂K dans le sens positif ; l'espace est supposé orienté) ; on pose $y_i = x_i - x_{i-1}$ pour tout $i\in I$; on a alors pour tout $x\in E$:

$$\|x\| = \sum_{i\in I} \frac{y_{i+1}\wedge y_i}{4(x_{i+1}\wedge x_i)(x_i\wedge x_{i-1})}\,|x\wedge x_i|$$

(ici $\wedge$ désigne les produits extérieurs).

b) si au contraire la norme est de classe C^2, posons $p_0(x) = \|x\|$; on a alors :

$$\|x\| = \int_0^{2\pi} \frac{\Delta p_0(e^{it})}{4}\,|x\wedge e^{it}|\,dt$$

(où on a identifié E à $\mathbb{C}$ et où Δ est le laplacien ; notons que parmi les fonctions 1-homogènes de classe C^2 sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, les semi-normes sont celles qui ont un laplacien positif). ■

Enfin rappelons le critère d'Alexandrov pour les zonotopes (on renvoie à [5] Th. 3.3, p. 331 ou [17] Lemma 6.2, p. 72) :

Proposition 2.4 : Un polytope centré en 0 est un zonotope si et seulement si toutes ses faces admettent un centre de symétrie.

§ 3. LES CARACTERISTIQUES DES FACETTES ET LES IMPLICATIONS (8)⇒(5)⇒(6).

On sait que dans tout espace normé $(E,\|\ \|)$ la norme admet une dérivée directionnelle au point v dans la direction x ; autrement dit $\tau(v,x) = \lim\limits_{\lambda\to 0_+} \frac{1}{\lambda}(\|v+\lambda x\| - \|v\|)$ existe (Bonnesen et Fenchel [6], p. 19) ; de plus c'est la fonction d'appui de la facette dans la direction v de la boule unité du dual ([6], p. 25-26, voir ci-dessous 3.12). Soit $p_v(x)$ (resp. $\eta_v(x)$) la partie symétrique (resp. antisymétrique) en x de $\tau(v,x)$; on a donc :

$$p_v(x) = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\|x+\lambda v\| + \|x-\lambda v\|}{2} - \|\lambda v\|$$

$$\eta_v(x) = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\|x+\lambda v\| - \|x-\lambda v\|}{2} \quad .$$

Dans un espace L^1 on a de plus (Kripke et Rivlin [15], Th. 1.1, p. 103) si on note $\|x\| = \int |x|$:

$$p_v(x) = \int_{v=0} |x| \quad \text{et} \quad \eta_v(x) = \int x \operatorname{sgn} v \quad (\operatorname{sgn} 0 = 0) \quad .$$

Comme tout espace normé de dimension ≤ 2 est un sous-espace de L^1 (voir ci-dessus 2.3) on a dans tout espace normé (avec une autre preuve de l'existence de p_v et η_v) :

(3.1) $p_v(x)$ est 0- (resp. 1-) positivement homogène et paire en v (resp. x) ;

(3.2) $\eta_v(x)$ est 0- (resp. 1-) positivement homogène et impaire en v (resp. x) ;

(3.3) $p_v(x+v) = p_v(x)$, $\eta_v(x+v) = \eta_v(x) + \|v\|$;

(3.4) $p_v(x) + |\eta_v(x)| \leq \|x\|$;

(3.5) $p_o(x) = \|x\|$, $\eta_o(x) = 0$ (on utilisera donc $p_o(x)$ pour $\|x\|$) .

Notons que si la norme est Gateaux-différentiable au point v (c'est-à-dire si la dérivée directionnelle $\tau(v,x)$ est une forme linéaire en x) alors $p_v(x)$ est nul et $\eta_v(x)$ est linéaire en x.

<u>Définition 3.6</u> : Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé. On dit que la norme $\| \ \|$ est <u>symétriquement différentiable</u> si pour tout $v \in E$, la fonction $x \to \eta_v(x)$ est linéaire.

Voici des exemples de normes symétriquement différentiables :

(3.7) les normes Gateaux-différentiables (voir ci-dessus) ;

(3.8) les semi-normes L^1 (voir ci-dessus, mais alors p_v n'est pas nul en général) ;

(3.9) les différences de deux semi-normes L^1

(mais la norme de $\ell^\infty_{(3)}$ n'est pas symétriquement différentiable : prendre $v_1 = v_2 = v_3 = 1$, alors on a $\eta_v(x) = \frac{1}{2}(x_1 \vee x_2 \vee x_3 + x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$).

On va voir que la fonction $x \to p_v(x)$ hérite des inégalités linéaires (les PLI de Witsenhausen [20] satisfaites par la norme :

(3.10) une <u>inégalité linéaire</u> $(\forall\, x_1, x_2, \dots, x_n \in E,\ \sum_{i=1}^{k} c_i\, p(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j) \geq 0)$

concernant une fonction 1-positivement homogène p sur un espace vectoriel E est dite <u>effective</u> si elle est vraie sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire pour t_1 $t_1, t_2, \dots, t_n$ réels et $p : t \to |t|$) et <u>minimale</u> si on a :

$$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ avec } \sum_{i=1}^{k} c_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \lambda_j \right| = 0$$

$$\text{et} \quad \inf_{1 \leq i \leq k} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \lambda_j \right| > 0$$

(cela signifie en particulier que les coefficients c_i sont minimaux).

<u>Proposition 3.11</u> : Pour tout $v \in E$, toute inégalité linéaire effective et minimale satisfaite par la norme est satisfaite par p_v.

<u>Démonstration</u> : On garde les notations de 3.10 ; soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ annulant l'inégalité et tels que $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \lambda_j$ soit non nul pour tout $i = 1, \dots, k$; soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$; on applique l'inégalité (pour $p : x \to \|x\|$) aux points $(x_j + \lambda \lambda_j v)_{j=1,\dots,n}$, puis aux points $(x_j - \lambda \lambda_j v)_{j=1,\dots,n}$ et enfin aux points $(\lambda \lambda_j v)_{j=1,\dots,n}$ (dans ce dernier cas c'est une <u>égalité</u>) ; on somme les trois inégalités avec les coefficients $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et -1 et on fait tendre λ vers $+\infty$; on obtient donc :

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\, p_{b_i v} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \right) \geq 0 \quad ;$$

cela donne le résultat (par 3.1, car b_i est non nul pour tout $i = 1,\dots,k$).

Comme on l'a dit plus haut, il est classique (Bonnesen et Fenchel [6], p. 25-26) que $x \to \tau(v,x)$ est la fonction d'appui de la facette F_v dans la direction v de la boule unité de son dual E', c'est-à-dire $\sup_{\xi \in F_v} \langle x,\xi\rangle$.

Si la norme est symétriquement différentiable, la forme linéaire η_v est centre de symétrie de F_v ; on se contente de reprendre la démonstration de [6] dans ce cas :

Proposition 3.12 : Si la norme de E est symétriquement différentiable, alors les facettes de la boule unité K' du dual E' sont centrées. De façon précise pour tout élément $v \neq 0$ de E, la facette de K' dans la direction v (c'est-à-dire l'intersection de K' avec l'hyperplan $\{\xi \in E' \mid \langle v,\xi\rangle = \|v\|\}$) est exactement

$$K'_v = \{\xi \in E' \mid \forall\, x \in E,\ |\langle x,\xi - \eta_v\rangle| \leq p_v(x)\}$$

et a donc la forme linéaire continue η_v pour centre de symétrie.

Démonstration : Notons F_v la facette de K' dans la direction v ; par hypothèse η_v est une forme linéaire sur E et on a :

$$\langle v,\eta_v\rangle = \|v\| \quad \text{(par 3.3)} \quad \text{et} \quad \|\eta_v\| = 1 \quad \text{(par 3.4)} \quad .$$

(i) On a $F_v \subset K'_v$: en effet soit $\xi \in F_v$; on a donc $\|\xi\| = 1$ et $\langle v,\xi\rangle = \|v\|$; on a donc $\langle x,\xi\rangle = \langle x + \lambda v,\xi\rangle - \langle \lambda v,\xi\rangle \leq \|x + \lambda v\| - \lambda\|v\|$; lorsque $\lambda \to +\infty$, on trouve $\langle x,\xi\rangle \leq \langle x,\eta_v\rangle + p_v(x)$ pour tout $x \in E$; donc $\xi \in K'_v$.

(ii) Inversement on a $K'_v \subset F_v$: en effet soit $\xi \in K'_v$; par 3.3 on a $p_v(v) = 0$, donc $\langle v,\xi\rangle = \langle v,\eta_v\rangle = \|v\|$; par ailleurs pour tout $x \in E$ on a $\langle x,\xi\rangle \leq p_v(x) + \langle x,\eta_v\rangle \leq \|x\|$ (par 3.4) ; donc $\xi \in F_v$. ∎

§ 4. L'INEGALITE DE HLAWKA ET LES IMPLICATIONS (2) ⇒ (4) ⇒ (5).

La forme initiale de l'inégalité de Hlawka (celle de [11] et [19]) est la suivante :

$$(H_1) \qquad \|a + b\| + \|a + c\| + \|b + c\| \leq \|a\| + \|b\| + \|c\| + \|a + b + c\| \quad .$$

On va donner plusieurs autres formes équivalentes :

- si on pose $a = \frac{y+z-x}{4}$, $b = \frac{x+z-y}{4}$, $c = \frac{x+y-z}{4}$, on obtient :

$$(H_2) \qquad \frac{\|x\| + \|y\| + \|z\|}{2} \leq E\|x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3\| \quad ;$$

- si on pose $a = z + x$, $b = z - x$, $c = y - z$, on obtient :

$$(H_3) \qquad \|x+y\| + \|x-y\| - \|x\| - \|y\|$$

$$< (\|x+z\| + \|x-z\| - \|x\| - \|z\|) + (\|y+z\| + \|y-z\| - \|y\| - \|z\|) \quad ;$$

- si on pose $a = x - v$, $b = y - v$, $c = 2v$, on obtient :

$$(H_4) \quad (\|x+v\| - \|x-v\|) + (\|y+v\| - \|y-v\|) + \left(\frac{\|x+y+2v\| + \|x+y-2v\|}{2} - \|2v\|\right)$$

$$\leq \left(\frac{\|x+y+2v\| - \|x+y-2v\|}{2}\right) + \|x+y\| \quad .$$

<u>Propriétés</u> : Les formes (H_1), (H_2), (H_3) et (H_4) sont équivalentes ; on va pour l'instant utiliser seulement la forme (H_3) :

(4.1) dans $\mathbb{R}$ on a $|x+y| + |x-y| - |x| - |y| = \big|\,|x| - |y|\,\big|$; cela montre que l'inégalité de Hlawka est vraie dans $\mathbb{R}$ (est effective) et donc dans L^1 (sous la forme (H_3)) ;

(4.2) d'ailleurs l'inégalité de Hlawka (sous la forme (H_3)) exprime simplement que $\|x+y\| + \|x-y\| - \|x\| - \|y\|$ est un écart ;

(4.3) lorsqu'elle devient une égalité, l'inégalité de Hlawka (sous la forme (H_3)) signifie (dans $\mathbb{R}$) : $|z|$ sépare $|x|$ et $|y|$ (elle est donc minimale).

Dans un espace normé, l'inégalité 7-polygonale implique l'inégalité de Hlawka :

<u>Proposition 4.4</u> : L'inégalité 7-polygonale (cf. 1.8) appliquée aux points $(0,z,-z;x,-x,y,-y)$ donne exactement l'inégalité de Hlawka (sous la forme (H_3), multipliée par 2).

<u>Démonstration</u> : Une vérification très simple (on peut noter que le cas d'égalité dans $\mathbb{R}$ de cette inégalité 7-polygonale est : $0,z,-z$ séparent $x,-x,y,-y$; c'est un résultat de J.B. Kelly [13] ; comparer avec 4.3). ■

Enfin sous la forme (H_4) l'inégalité de Hlawka implique que la norme est symétriquement différentiable :

Proposition 4.5 : Si l'espace normé $(E, \| \ \|)$ satisfait à l'inégalité de Hlawka, alors $x \to \eta_v(x)$ est une forme linéaire pour tout $v \in E$.

Démonstration : On applique (H_4) à λv, x, y ; on obtient (lorsque $\lambda \to +\infty$) :

$$2\eta_v(x) + 2\eta_v(y) + p_v(x+y) \leq \eta_v(x+y) + \|x+y\| \quad .$$

On applique cette inégalité à x et $y + \lambda v$; tenant compte de (3.3) on obtient (lorsque $\lambda \to +\infty$) :

$$2\eta_v(x) + 2\eta_v(y) \leq 2\eta_v(x+y) \quad .$$

Changeant v en $-v$ et tenant compte de (3.2) on obtient :

$$\eta_v(x) + \eta_v(y) = \eta_v(x+y) \quad . \qquad \blacksquare$$

On a donc montré lorsque la boule unité est un polytope l'équivalence de (2), (4) et (7). Le problème se pose de savoir si on peut se débarrasser de cette hypothèse ; autrement dit :

(4.6) soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé de dimension finie ; on suppose que la norme de E est 7-polygonale ; peut-on approcher la norme de E par des normes linéaires par morceaux (c'est-à-dire dont la boule unité est un polytope) et 7-polygonales ?

Dans le cas d'une réponse positive, l'inégalité 7-polygonale pourrait se substituer au type négatif [7] comme critère de plongement des espaces normés dans L^1 ; on notera que, pour un espace métrique quelconque, type négatif et inégalité 7-polygonale ne s'impliquent pas mutuellement (voir [3]) et ne sont ni l'un ni l'autre des critères de plongement dans L^1, cf. 1.3.

D'autre part, on peut se demander si 7-polygonal peut être remplacé par 5-polygonal (c'est-à-dire pentagonal, cf. [2]) :

(4.7) peut-on trouver un espace normé de dimension finie, dont la boule unité soit un polytope et qui soit 5-polygonal et non plongeable dans L^1 ?

Cet exposé doit beaucoup aux encouragements de Hans S. Witsenhausen (qui m'a signalé les résultats de R. Schneider) ; je tiens à l'en remercier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Assouad : C.R. Acad. Sc. Paris 285 (1977), 361-363.

[2] P. Assouad : dans ce même volume, exposé No 3.

[3] P. Assouad, M. Deza : Embeddings of metric spaces in combinatorics and analysis (livre en cours de rédaction).

[4] D. Avis : Technical report SOCS-78.4 (1978), McGill University.

[5] E.D. Bolker : Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 323-345.

[6] T. Bonnesen, W. Fenchel : Theorie der konvexen Körper, Springer Verlag (1934) Berlin (reprint de 1948).

[7] J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle, J.L. Krivine : Ann. Inst. Henri Poincaré 2 (1966), 231-259.

[8] M. Deza (Tyklin) : Doklady Akad. Nauk SSSR, 134 (1960), 1037-1040.

[9] T.S. Ferguson : Ann. Math. Stat. 33 (1962), 1256-1266.

[10] C.S. Herz : Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 670-676.

[11] H Hornich : Math. Zeitschrift 48 (1942), 268-275.

[12] S. Karlin, W.J.Studden : Tchebycheff systems, Interscience publ. (1966).

[13] J.B. Kelly : Metric inequalities and symmetric differences, in Inequalities II , Oved Shisha ed. (Colorado 1967), 193-212.

[14] I. Kluvanek, G. Knowles : Vector measures and control systems, Notas de Matematica No 20 (1976).

[15] B.R. Kripke, T.J. Rivlin : Trans. Amer. Math. Soc. 119 (1965), 101-122.

[16] J.L. Krivine : dans ce même volume, exposé No 12.

[17] R. Schneider : Math. Nachr. 44 (1970), 55-75.

[18] R. Schneider : Math. Z. 101 (1967), 71-82.

[19] H.S. Witsenhausen : Mathematika (Londres) 25 (1978), 13-16.

[20] H.S. Witsenhausen : Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973).
