G. Pisier

Conditions d'entropie assurant la continuité de certains processus et applications à l'analyse harmonique

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. n^o 13 et 14, p. 1-43
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980____A11_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1979-1980

CONDITIONS D'ENTROPIE ASSURANT LA CONTINUITE DE CERTAINS PROCESSUS ET APPLICATIONS A L'ANALYSE HARMONIQUE

G. PISIER

Exposés No XIII-XIV

1er et 8 Février 1980

PLAN

Le but de cet exposé est de présenter les conditions lipschitziennes classiques, en normes L^p, qui suffisent pour la continuité des processus, avec le point de vue plus moderne de l'entropie, tel qu'il est utilisé dans la théorie des processus gaussiens. (Cf. le théorème de Dudley-Fernique sur la continuité des processus gaussiens stationnaires [11].)

----

§ 1. PRESENTATION GENERALE ET PRINCIPAUX ENONCES.

L'exemple le plus classique d'une telle "condition de Lipschitz" est le théorème suivant dû à Kolmogorov (voir [28] § 35-3, p. 513-519).

Théorème 1.1 : Soit $(X_t)_{t\in[0,1]}$ un processus aléatoire. On suppose qu'il existe $0<p<\infty$ et $\delta>0$ tels que :

$$\forall\ t,s\in[0,1] \qquad \mathbb{E}\,|X_t - X_s|^p \leq |t-s|^{1+\delta} \quad .$$

Alors le processus $(X_t)_{t\in[0,1]}$ admet une version à trajectoires continues.

Plus récemment, ce résultat a été raffiné (cf. [17], [35]) :

Théorème 1.2 [17] : Soit $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ une fonction croissante, nulle en 0, telle que $\frac{\varphi(x)}{x}$ est décroissante et telle que

$$(I_p) \qquad \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^{1+1/p}}\,dt < \infty \quad .$$

Dans ces conditions on a :

$$(K_p) \quad \begin{cases} \text{Tout processus } (X_t)_{t\in[0,1]} \text{ vérifiant :} \\ \forall\ t,s\in[0,1] \qquad (\mathbb{E}\,|X_t - X_s|^p)^{1/p} \leq \varphi(|t-s|) \\ \text{admet nécessairement une version à trajectoires continues.} \end{cases}$$

Nous démontrerons plus loin un résultat plus général que ce théorème (voir théorème 1.9).

L'intérêt du théorème précédent est qu'il apparaît comme le meileur possible. En effet, on a :

Théorème 1.3 ([20], [27], [24]) : Soit p tel que $1<p<\infty$. Soit φ une fonction croissante, nulle en 0 et telle que $\frac{\varphi(x)}{x}$ est décroissante. Si φ vérifie (K_p), elle vérifie aussi nécessairement la condition intégrale (I_p).

La démonstration est donnée au § 3.

Ce résultat est dû pour $p=2$ à Hahn et Klass [20] et pour $p>2$ à Kôno [27]♦. Plus récemment, Ibragimov [24] a traité le cas général : $1<p<\infty$; il donne même un résultat un peu meilleur, et considère le cas de $[0,1]^k$:

Théorème 1.4 [24] : Soit k un entier. Soit p tel que $1<p<\infty$, $\alpha>0$ et soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante concave.
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

$(I_{p,k,\alpha})$ $$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^{1+\frac{k}{p}+\alpha}}\, dt < \infty \ .$$

$(K_{p,k,\alpha})$ $\begin{cases} \text{Tout processus } (X_t)_{t\in[0,1]^k} \text{ tel que} \\ \forall\, t,s \in [0,1]^k \quad (\mathbb{E}\,|X_t - X_s|^p)^{1/p} \le \varphi(\|t-s\|) \\ \text{admet une version à trajectoires lipschitziennes d'ordre } \alpha. \end{cases}$

On a posé ici $\|t\| = \sup\limits_{i\le k} |t_i| \quad \forall\, t \in [0,1]^k$.

Comme on le verra dans la suite (§ 3, 4) ces énoncés sont très étroitement liés à des théorèmes d'analyse harmonique et de théorie de l'approximation des fonctions dus à Bernstein et Stetchkine et remontant aux années 50 (cf. [26], p. 13 à 15).

Le lecteur notera aussi le lien évident avec les théorèmes de Sobolev.

Le théorème de Dudley-Fernique mentionné au début de l'exposé est le suivant :

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^k}$ un processus gaussien stationnaire. On définit un écart d_X (ou une pseudo-métrique) associé à X, de la manière suivante :

$$d_X(t,s) = (\mathbb{E}\,|X_t - X_s|^2)^{1/2} \qquad \forall\, t,s \in \mathbb{R}^k \ .$$

Soit $\varepsilon>0$, on note $N_X(\varepsilon)$ le plus petit nombre de boules de rayon ε pour la pseudo-métrique d_X qui suffisent à recouvrir $[0,1]^k$.

♦ Ibragimov dans [24] m'attribue le cas $p>2$. En effet, à l'époque où j'ai rencontré Ibragimov, j'ignorais la référence [27] que m'a signalée M. Hahn ; cette dernière m'a aussi informé que M. Klass et elle-même avaient remarqué (non publié) la validité du théorème 1.3 pour $p>2$.

Dans ces conditions, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^k}$ admet une version à trajectoires continues si et seulement si la condition d'entropie

$$\int_0 (\operatorname{Log} N_X(\varepsilon))^{1/2}\, d\varepsilon < \infty$$

est vérifiée. (cf. [9] pour la partie "si" et [11] pour la partie "seulement si".)

Bien que ce théorème soit énoncé (pour des raisons historiques) pour des processus indexés par $\mathbb{R}^k$, il s'étend sans difficulté au cas de processus gaussiens stationnaires $(X_t)_{t\in G}$ indexés par un groupe localement compact abélien et on peut même l'étendre d'ailleurs au cas non abélien. Pour plus de détails, voir [31].

Remarque 1.5 : Ce théorème qui en apparence s'applique à un processus et non pas à une classe de processus vérifiant une condition de Lipschitz, est en fait de même nature que les précédents, en raison du résultat suivant (cf. [33]) :

Soit T un ensemble et $(X_t)_{t\in T}$ un processus gaussien à trajectoires continues.
Posons $d(s,t) = (\mathbb{E}\,|X_t - X_s|^2)^{1/2} \quad \forall\, t,s \in T$.
Alors tout processus gaussien $(Y_t)_{t\in T}$ tel que

$$\forall\, t,s\in T \qquad (\mathbb{E}\,|Y_t - Y_s|^2)^{1/2} \leq d(s,t)$$

admet lui-aussi une version à trajectoires continues.

La démonstration est basée sur un lemme très utile dû à Slepian (voir [11]).

Nous allons en fait reformuler le théorème de Dudley-Fernique d'une manière analogue aux théorème 1.1 à 1.4. Pour cela, nous aurons besoin de notations relatives aux espaces d'Orlicz.
Pour toute fonction $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante nulle à l'origine, et pour tout espace mesuré (Ω,μ), on note $L^\Phi(\Omega,\mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables f pour lesquelles il existe $c > 0$ tel que :

$$\int \Phi(|\frac{f}{c}|)\, d\mu < \infty \quad .$$

On pose alors

$$\|f\|_{\Phi} = \inf\{c > 0 \int \Phi(\frac{f}{c}|)\, d\mu < 1\} \quad .$$

Il est très facile de voir que le théorème de Dudley (i.e. la condition d'entropie est suffisante pour la continuité) s'étend à des processus ni gaussiens, ni stationnaires.

On a, par exemple, le théorème suivant qui est bien connu des spécialistes ; on peut le démontrer essentiellement comme le théorème de Dudley (voir la démonstration de [8]) ; on peut aussi l'obtenir comme corollaire d'un théorème de Preston [39].

<u>Théorème 1.6</u> : Soit T un espace compact et soit d une pseudo-métrique sur T. On suppose que l'application $d: T \times T \to \mathbb{R}_+$ est continue sur $T \times T$. Soit α tel que $0 < \alpha < \infty$.

On pose $\psi_\alpha(x) = \exp |x|^\alpha - 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+$.

On définit $N_d(T,\varepsilon)$ comme le plus petit nombre de d-boules ouvertes de rayon ε suffisant à recouvrir T.

Alors la condition

$$(E_\alpha) \qquad \int_0^1 (\mathrm{Log}\, N_d(T,\varepsilon))^{1/\alpha}\, d\varepsilon < \infty$$

implique la propriété suivante :

$$(K_{\psi_\alpha}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Tout processus } (X_t)_{t\in T} \text{ tel que} \\ \forall\, t,s \in T, \qquad \|X_t - X_s\|_{\psi_\alpha} \le d(t,s) \\ \text{admet une version à trajectoires continues.} \end{array} \right.$$

<u>Remarque 1.7</u> : Les hypothèses faites sur T sont dictées par la pratique. En réalité, si T est un ensemble muni d'une pseudo-métrique d, on peut passer à l'espace compact $(\tilde{T},\tilde{d})$ obtenu par passage au quotient puis complétion (car la condition E_α implique que $\forall\, \varepsilon > 0$, $N_d(T,\varepsilon) < \infty$, elle entraîne donc que T est précompact).

Il est clair que l'on a alors

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad N_d(T,\varepsilon) = N_{\tilde{d}}(\tilde{T},\varepsilon) \quad ,$$

et de plus (T,d) vérifie K_{ψ_α} ssi $(\tilde{T},\tilde{d})$ vérifie aussi K_{ψ_α}.

On est ainsi toujours ramené au cas de T métrique et compact.

Le théorème 1.6 admet une réciproque.

Pour plus de généralité, soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace de probabilité standard (par exemple l'intervalle de Lebesgue).

Nous allons utiliser l'existence d'un sous-espace noté Λ_α de $L^{\psi_\alpha}(\Omega,\mathbb{P})$, isomorphe à un Hilbert et possédant de plus la propriété suivante :

$$(G_\alpha)\quad \begin{cases} \exists\ \delta>0\quad \forall n\quad \exists\ x_1,\dots,x_n\in\Lambda_\alpha \quad \text{tels que} \\ \qquad \|x_i\|_{\psi_\alpha} = 1 \quad \forall\ i=1,2,\dots,n \\ \text{et tels que } \mathbb{E}\sup\limits_{i\le n}|x_i| \ge \delta(\mathrm{Log}\ n)^{1/\alpha}\ . \end{cases}$$

Dans le cas gaussien (i.e. $\alpha=2$) on peut prendre pour Λ_2 le sous-espace engendré par une suite de variables gaussiennes indépendantes (g_n) normalisée dans L^{ψ_2} (de sorte que l'on peut prendre $x_i = g_i$ dans la propriété ci-dessus).

Soit (ε_n) une suite de variables de Bernoulli indépendante de la suite (g_n).

Pour le cas général, on peut poser

$$x_n = \varepsilon_n\ |g_n|^{2/\alpha}$$

et prendre pour Λ_α le sous-espace engendré par $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ dans $L^{\psi_\alpha}(\Omega,\mathbb{P})$.

Le lecteur vérifiera aisément les propriétés voulues.

Dans le cas particulier où $2/\alpha$ est égal à un entier n, on peut prendre pour $\Lambda_{2/n}$ le n-ième chaos de Wiener construit à partir de la suite $\{g_n \mid n\in\mathbb{N}\}$.

Dans toute la suite de cet exposé nous dirons que (T,d) est <u>hilbertien</u> s'il existe une partie T' d'un espace de Hilbert H et une application $\omega : T\to T'$ telle que

$$d(s,t) = \|\omega(t)-\omega(s)\| \qquad \forall\ s,\ t\in T\ .$$

On dit qu'une application $X : T\to H$ est une contraction si

$$\forall\ s,t\in T \qquad \|X(s)-X(t)\| \le d(s,t)\ .$$

On utilisera le théorème classique suivant :

Théorème d'extension (cf. [43], p. 48) : Soit (T,d) un espace pseudo-métrique hilbertien et soit S une partie de T.
Alors toute contraction $X : S \to H$ s'étend un contraction $X : T \to H$.

Nous pouvons maintenant énoncer une généralisation (facile) du théorème de Dudley-Fernique :

Théorème 1.8 : Soit α avec $0 < \alpha \leq 2$. Soit G un groupe localement compact. Soit d une pseudo-métrique hilbertienne sur G. On suppose de plus que d est "stationnaire" au sens suivant :

$$\forall\ x,\ s,\ t \in G \qquad d(x+s, x+t) = d(s,t) \quad .$$

Soit K une partie compacte d'intérieur non vide de G. Enfin, soit Λ_α un espace ayant les propriétés ci-dessus.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) tout processus $(X_t)_{t\in G} \subset L^{\psi_\alpha}(\Omega, \mathbb{P})$ vérifiant :

$$(*) \quad \forall\ t,\ s \qquad \|X_t - X_s\|_{\psi_\alpha} \leq d(s,t)$$

admet une version à trajectoires continues.

(2) Tout processus $(X_t)_{t\in G} \subset \Lambda_\alpha$ et vérifiant (*) admet une version à trajectoires continues.

(3) $$\int_0 (\text{Log } N_d(K,\varepsilon))^{1/\alpha}\, d\varepsilon < \infty \quad .$$

Indications sur la démonstration : Compte-tenu de ce qui précède, il suffit de montrer que (2) $\Rightarrow$ (3). Pour cela, on imite la démonstration de Fernique [11] pour le cas $\alpha = 2$.
Ce dernier construit une sous-partie $S \subset K$ qui possède deux propriétés : d'une part S "porte" l'entropie de K de sorte que la condition

(4) $$\int_0 (\text{Log } N_d(S,\varepsilon))^{1/\alpha}\, d\varepsilon < \infty$$

est équivalente à (3) ; et d'autre part, (S,d) a une structure d'arbre qui permet de voir très facilement en utilisant (G_α) que (4) est vérifiée si et seulement si toute contraction $X : (S,d) \to \Lambda_\alpha$ définit un processus à trajectoires majorées sur S. Il nous suffit alors d'utiliser le théorème d'extension ci-dessus pour conclure que (2) $\Rightarrow$ (3).

Nous pouvons maintenant préciser l'orientation de notre étude : nous allons nous intéresser aux généralisations possibles des théorèmes 0.6 et 0.8 dans le cas où la fonction $\exp x^{\alpha} - 1$ est remplacée par une fonction puissance de la forme x^p.

On va démontrer en particulier le

Théorème 1.9 : Soit (T,d) comme au théorème 1.6. Soit p tel que $1 < p < \infty$. Supposons que l'on a :

$$(\mathcal{J}_p) \qquad \int_0^1 (N_d(T,\varepsilon))^{1/p}\, d\varepsilon < \infty .$$

On a alors

$$\mathcal{K}(p,\infty) \begin{cases} \text{Tout processus } (X_t)_{t\in T} \text{ tel que :} \\ (1.1) \quad \forall\, t,s \in T \quad (\sup\limits_{c>0} c^p\, \mathbb{P}(\{|X_t - X_s| > c\}))^{1/p} \leq d(s,t) \\ \text{admet une version à trajectoires continues.} \end{cases}$$

On a donc a fortiori

$$\mathcal{K}(p) \begin{cases} \text{Tout processus } (X_t)_{t\in T} \text{ tel que} \\ (1.2) \quad \forall\, t,s \in T \quad (\mathbb{E}\, |X_t - X_s|^p)^{1/p} \leq d(s,t) \\ \text{admet une version à trajectoires continues.} \end{cases}$$

Ce théorème sera démontré au § 5.

On peut compléter le théorème précédent à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 1.10 : Si $\mathcal{K}(p,\infty)$ (resp. $\mathcal{K}(p)$) est vérifiée, alors il existe une constante C telle que tout processus $(X_t)_{t\in T}$ vérifiant (1.1) (resp. (1.2)) vérifie nécessairement :

$$\sup_{c>0} c^p\, \mathbb{P}(\{\sup_{t,s} |X_t - X_s| > c\}) \leq C$$

[resp. $\mathbb{E} \sup\limits_{t,s} |X_t - X_s|^p \leq C$].

Démonstration (esquisse) : Montrons-le par exemple pour $\mathcal{K}(p)$: on peut supposer que $(X_t)_{t\in T}$ est symétrique. On va tout d'abord montrer que si (X_t) vérifie (1.2), on a : $\mathbb{E}\sup_{t,s}|X_t - X_s|^r < \infty$, $\forall\, r<1$. En effet, soit (X_t^n) une suite de copies indépendantes de $(X_t)_{t\in T}$ et soit $(\alpha_n)_n$ des scalaires tels que $\Sigma\,|\alpha_n| \le 1$. Posons

$$M_n = \sup_{t,s}|X_t^n - X_s^n| \quad .$$

Le processus $S_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n X_t^n$ vérifie (1.2) donc $\sup_{t,s}|S_t - S_s| < \infty$ p.s., ce qui entraîne $\sup_n |\alpha_n|\, M_n < \infty$ p.s., et comme cela est vrai quel que soit la suite sommable (α_n), on doit avoir

$$\mathbb{E}\, M^r < \infty \qquad \forall\, r<1 \quad .$$

Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ l'espace de probabilité sur lequel (X_t) est défini.
Fixons $r<1$, et soit Z une variable aléatoire positive telle que $\mathbb{E}\,Z = 1$. Soit Q la probabilité sur Ω définie par $dQ = Z \cdot d\mathbb{P}$. Considérons le processus $Y_t = X_t\, Z^{-1/p}$ défini sur l'espace de probabilité (Ω,Q).
Ce processus vérifie (1.2), en effet on a :

$$\mathbb{E}_Q\,|Y_t - Y_s|^p = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\,|X_t - X_s|^p \quad ;$$

on doit donc avoir $\mathbb{E}_Q \sup_{t,s}|Y_t - Y_s|^r < \infty$ c'est-à-dire :

(1.3) $$\int M^r\, Z^{1-r/p}\, d\mathbb{P} < \infty \quad .$$

Comme on a établi (1.3) quel que soit $Z \ge 0$ avec $\mathbb{E}\,Z = 1$, il en résulte que l'on a nécessairement en fait

$$\mathbb{E}\, M^p < \infty \quad .$$

Nous avons donc montré que la condition (1.2) entraîne $\mathbb{E}\,M^p < \infty$; il est alors facile d'en déduire l'existence d'une constante C ayant la propriété annoncée.

La démonstration pour $K(p,\infty)$ est analogue.

<u>Remarque</u> : L'idée d'utiliser un changement de densité dans la démonstration précédente est tirée de la théorie des applications radonifiantes.

Remarque : Soulignons que le théorème 1.9 contient le résultat classique de Kolmogorov (théorème 1.1) et le théorème 1.2.
En effet, dans le cas particulier où $T=[0,1]$ et $d(t,s)=\varphi(|t-s|)$, on voit facilement que $N_d(T,\varepsilon)\sim\frac{1}{\varphi^{-1}(\varepsilon)}$ de sorte que par un changement de variables, on a :

$$\int_0 N_d(T,\varepsilon)^{1/p}\, d\varepsilon<\infty \Longleftrightarrow \int_0 \frac{\varphi(t)}{t^{1+1/p}}\, dt<\infty \quad .$$

Malheureusement, je n'ai pas réussi à démontrer (en analogie avec le théorème 1.8) une réciproque au théorème 1.9. D'où le

Problème : Soit $1<p<\infty$.
Dans le cas particulier où $T=K$ -où K, G, d sont comme au théorème 1.8- est-il vrai que $\mathcal{K}(p,\infty)$ (ou même $\mathcal{K}(p)$) entraîne $\mathcal{J}_p$.
En particulier, est-ce que $\mathcal{K}(2)$ entraîne $\mathcal{J}_2$?

Je ne serais pas étonné si $\mathcal{K}(p)$ et $\mathcal{K}(p,\infty)$ étaient équivalentes dans ce cas particulier.

§ 2. LE CAS $p\le 2$.

L'objet de cette section est la démonstration du théorème suivant.

Théorème 2.1 : Soit p tel que $1\le p\le 2$. Soit T un espace compact muni d'une pseudo-métrique d continue sur $T\times T$. Posons simplement $N_d(\varepsilon)=N_d(T,\varepsilon)$ (cf. théorème 1.6). On suppose que

$$\int_0^1 (N_d(\varepsilon))^{1/p}\, d\varepsilon<\infty \quad .$$

Soit alors $(X_t)_{t\in T}$ un processus aléatoire tel que :

$$\forall\, t,s\in T \qquad (\mathbb{E}\,|X_t-X_s|^p)^{1/p}\le d(s,t) \quad .$$

On a alors :

(i) $(X_t)_{t\in T}$ a une version à trajectoires continues sur T.

(ii) $$\{\mathbb{E}\,(\sup_{d(t,s)<\delta}|X_t-X_s|)^p\}^{1/p}\le K\int_0^{K\delta}(N_d(\varepsilon))^{1/p}\, d\varepsilon$$

où K est une constante numérique.

(iii) $$\left(\mathbb{E}\sup_{T\times T}|X_t - X_s|^p\right)^{1/p} \le K\int_0^{KD} N_d(\varepsilon)^{1/p}\,d\varepsilon$$

où $D = \sup_{T\times T} d(s,t)$.

(iv) De plus, pour toute fonction $\Phi = \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, croissante, nulle à l'origine et telle que :

(2.1) $$\int_0 \frac{N_d(\varepsilon)^{1/p}}{\Phi(\varepsilon)}\,d\varepsilon < \infty \quad ,$$

on a :

$$\left(\mathbb{E}\sup_{T\times T}\left|\frac{X_t - X_s}{\Phi(d(t,s))}\right|^p\right)^{1/p} \le K_1\int_0^D \frac{N_d(\varepsilon)}{\Phi(\varepsilon)}\,d\varepsilon$$

où K_1 est une constante numérique.

Remarque : Le lecteur notera qu'il existe toujours une fonction Φ ayant les propriétés ci-dessus et vérifiant (2.1), dès que $\int_0 N_d(\varepsilon)^{1/p}\,d\varepsilon < \infty$.

La démonstration doit paraître extrêmement facile à un lecteur familier de la théorie des opérateurs p-sommants et p-radonifiants. En effet, le point crucial est le fait que la norme p-sommante de l'identité d'un espace de Banach de dimension n est majorée par $n^{1/p}$ si $1 \le p \le 2$. (Voir aussi sur ce sujet le § 6, remarques 6.3 et 6.4).
Nous avons néanmoins préféré présenter une démonstration élémentaire accessible au lecteur probabiliste. On peut en effet reformuler la propriété des opérateurs sommants mentionnée ci-dessus, de la manière très simple suivante :

Lemme 2.2 : Soit (Ω,μ) un espace mesuré. Soit p tel que $1 \le p \le 2$ et soit $\{Y_i \mid i \in I\} \subset L^p(\Omega,\mu)$ une famille de fonctions dans $L^p(\Omega,\mu)$. Supposons que $(Y_i)_{i\in I}$ engendre linéairement un sous-espace E de dimension finie de $L^p(\Omega,\mu)$. Soit n la dimension de E. On a alors :

$$\left\|\sup_{i\in I}|Y_i|\right\|_p \le n^{1/p}\sup_{i\in I}\|Y_i\|_p \quad .$$

(Evidemment, $\sup_{i\in I}|Y_i|$ doit ici être pris au sens du treillis de Banach $L^p(\Omega,\mu)$.)

<u>Démonstration</u> : Commençons par montrer le cas $p = 2$.
Dans ce cas, l'espace E admet une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ et on peut développer tout élément Y_i sous la forme

$$Y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k e_k \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{n} |\alpha_i^k|^2 = \|Y_i\|_2^2 .$$

On a donc, par Cauchy-Schwarz :

$$\sup_{i\in I} |Y_i| \leq \sup_{i\in I} \left(\sum_1^n |\alpha_i^k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_1^n |e_k|^2\right)^{1/2}$$

d'où :

$$\|\sup_{i\in I} |Y_i|\|_2 \leq \sup_I \|Y_i\|_2 \left\|\left(\sum_1^n |e_k|^2\right)^{1/2}\right\|_2$$

$$\leq \sqrt{n} \sup_I \|Y_i\|_2 .$$

Ce qui établit le cas $p = 2$.

Supposons maintenant que $p < 2$. On pose

$$M = \sup_{i\in I} |Y_i| \quad \text{et} \quad \tilde{Y}_i = |Y_i| \, M^{p/2-1} .$$

On note que $|\tilde{Y}_i| \leq |Y_i|^{p/2}$, donc

$$\sup_{i\in I} \|\tilde{Y}_i\|_2 \leq \sup_{i\in I} \|Y_i\|_p^{p/2} .$$

Si l'on applique la première partie de la démonstration (cas $p = 2$), on trouve :

$$\|\sup_{i\in I} |\tilde{Y}_i|\|_2 \leq \sqrt{n} \sup_{i\in I} \|\tilde{Y}_i\|_2$$

d'où
$$\|M^{p/2}\|_2 \leq \sqrt{n} \sup_{i\in I} \|Y_i\|_p^{p/2}$$

soit en élevant à la puissance $2/p$:

$$\|M\|_p \leq n^{1/p} \sup_{i\in I} \|Y_i\|_p . \qquad \text{cqfd.}$$

<u>Remarque</u> : (i) Il est facile de voir que $n^{1/p}$ est la plus petite constante vérifiant la propriété du lemme précédent.

(ii) Le lemme précédent devient faux pour $p > 2$; le meileur résultat possible du même type devient seulement pour $p > 2$:

$$\|\sup |Y_i|\|_p \le \sqrt{n}\ \sup \|Y_i\|_p \quad .$$

C'est ce qui explique pourquoi la démonstration qui suit ne s'étend pas au cas $p > 2$.

Démonstration du théorème 2.1 : Notons $B(x,\delta)$ la boule de centre x et de rayon δ relativement à d. Posons $\delta_n = 2^{-n}D$ et $N_n = N(\delta_n)$.
On sait qu'il existe, pour chaque n, des points $(t_j^n)_{j\le N_n}$ tels que :

$$\bigcup_{j\le N_n} B(t_j^n,\delta_n) = T \quad .$$

On peut donc trouver une partition A_j^n de T telle que $A_j^n \subset B(t_j^n,\delta_n)$ $\forall\ j \le N_n$ et

$$\bigcup_{j\le N_n} A_j^n = T \quad .$$

Posons alors $$X_t^n(\omega) = \sum_{j\le N_n} 1_{A_j^n}(t)\ X_{t_j^n}(\omega) \quad .$$

Remarquons tout de suite que :

$$(2.2)\qquad \|X_t^n - X_t\|_p < \delta_n \qquad \forall\ t\in T \quad \forall\ n\in \mathbb{N} \quad .$$

Posons $\Delta_t^n = X_t^n - X_t^{n-1}$. On a :

$$(2.3)\qquad \|\Delta_t^n\|_p \le \|X_t^n - X_t\|_p + \|X_t - X_t^{n-1}\|_p$$

$$< \delta_n + \delta_{n-1} = 3\ \delta_n \quad .$$

Montrons d'abord (ii). Les points (i) et (iii) en sont des conséquences immédiates.
Fixons $k\in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$X_t = X_t^k + \sum_{n>k} \Delta_t^n \quad , \qquad \text{d'où}$$

$$(2.4)\qquad \|\sup_{d(t,s)<\delta_k} |X_t - X_s|\|_p \le \|\sup_{d(t,s)<\delta_k} |X_t^k - X_s^k|\|_p$$

$$+ \sum_{n>k} \|\sup_{t,s} |\Delta_t^n - \Delta_s^n|\|_p \quad .$$

On peut remarquer que l'on a, d'après (2.2) :

$$\|X_t^k - X_s^k\|_p \leq \|X_t^k - X_t\|_p + \|X_t - X_s\|_p + \|X_s - X_s^k\|_p$$

$$\leq 2\,\delta_k + d(t,s)$$

d'où, si $d(t,s) < \delta_k$: $\quad \|X_t^k - X_s^k\|_p \leq 3\,\delta_k$.

Comme le sous-espace engendré par $(X_t^k)_{t\in T}$ est évidemment de dimension au plus égale à N_k , on a d'après le lemme 2.2 :

$$\text{(2.5)}\qquad \Big\| \sup_{d(t,s)<\delta_k} |X_t^k - X_s^k| \Big\|_p \leq N_k^{1/p} \sup_{d(t,s)<\delta_k} \|X_t^k - X_s^k\|_p \leq 3\,\delta_k\, N_k^{1/p} .$$

D'autre part, on a d'après (2.3) :

$$\forall n \ \forall t,s\in T \qquad \|\Delta_t^n - \Delta_s^n\|_p \leq 6\,\delta_n \ ;$$

de plus, le sous-espace engendré par $(\Delta_t^n)_{t\in T}$ est de dimension au plus égale à $N_n + N_{n-1}$. On a donc, par le lemme 2.2 :

$$\text{(2.6)}\qquad \Big\|\sup_{t,s} |\Delta_t^n - \Delta_s^n|\Big\|_p \leq (N_n + N_{n-1})^{1/p}\, 6\,\delta_n .$$

En reportant (2.5) et (2.6) dans (2.4), on trouve :

$$\Big\| \sup_{d(t,s)<\delta_k} |X_t - X_s| \Big\|_p \leq 3\,\delta_k\, N_k^{1/p} + 6\,.\,2^{1/p} \sum_{n>k} \delta_n\, N_n^{1/p}$$

$$\leq 6\,.\,2^{1/p} \sum_{n\geq k} \delta_n\, N_n^{1/p} ,$$

soit, en comparant avec l'intégrale correspondante :

$$\leq 12\,.\,2^{1/p} \int_0^{\delta_k} N_d(\varepsilon)^{1/p}\, d\varepsilon .$$

Cela prouve le résultat annoncé pour $\delta = \delta_k$, $k = 1,2,\ldots$; on en déduit alors facilement le même résultat pour $\delta > 0$ quelconque.
La démonstration de (iv) est similaire :

si $\delta_{k+1} < d(t,s) \leq \delta_k$, on a :

$$\Phi(\delta_n) < \Phi(d(t,s)) \quad \forall\, n > k \ ;$$

donc, si $\delta_{k+1} < d(t,s) \leq \delta_k$, on peut écrire :

$$(2.7) \qquad \left|\frac{X_t - X_s}{\Phi(d(t,s))}\right| \le \frac{|X_t^k - X_s^k|}{\Phi(\delta_{k+1})} + \sum_{n>k} \frac{|\Delta_t^n - \Delta_s^n|}{\Phi(\delta_n)} \quad .$$

Posons
$$S_1 = \sum_{k\ge 0} \sup_{d(t,s)\le\delta_k} \frac{|X_t^k - X_s^k|}{\Phi(\delta_{k+1})}$$

et
$$S_2 = \sum_{n\ge 1} \sup_{t,s} \frac{|\Delta_t^n - \Delta_s^n|}{\Phi(\delta_n)} \quad .$$

D'après les estimations (2.5) et (2.6), on a :

$$\|S_1\|_p \le \sum_{k\ge 0} 3\,\delta_k\, N_k^{1/p}\, \Phi(\delta_{k+1})^{-1}$$
$$\le 6 \sum_{k\ge 0} \delta_{k+1}\, N_{k+1}^{1/p}\, \Phi(\delta_{k+1})^{-1}$$

et
$$\|S_2\|_p \le 6 \,.\, 2^{1/p} \sum_{n\ge 1} \delta_n\, N_n^{1/p}\, \Phi(\delta_n)^{-1} \,.$$

D'où :

$$\|S_1\|_p + \|S_2\|_p \le (6 + 6 \,.\, 2^{1/p}) \sum_{n\ge 1} \delta_n\, N_n^{1/p}\, \Phi(\delta_n)^{-1}$$
$$\le 12(1 + 2^{1/p}) \int_0^D \frac{N_d(\varepsilon)^{1/p}}{\Phi(\varepsilon)}\, d\varepsilon \quad .$$

D'après (2.7), il est évident que l'on a :

$$\sup_{t,s\in T} \left|\frac{X_t - X_s}{\Phi(d(t,s))}\right| \le S_1 + S_2 \quad ,$$

on en déduit donc (iv) immédiatement. Ce qui termine la démonstration du théorème 2.1.

§ 3. RAPPORTS AVEC L'ANALYSE HARMONIQUE.

Considérons le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
Soit $t \in \mathbb{T}$ et soit $\dot{t} \in [0,2\pi]$ un représentant de t . On pose $|t| = \dot{t} \wedge (2\pi - \dot{t})$.
L'application $(t,s) \to |t-s|$ est évidemment une distance, invariante par translation sur $\mathbb{T}$. Soit φ une fonction continue, croissante, nulle à l'origine, de $[0,2\pi]$ dans $\mathbb{R}_+$. Soit p tel que $1 \le p \le \infty$. On note $\mathrm{Lip}_p(\mathbb{T},\varphi)$ l'espace formé fonctions $f \in L^p(\mathbb{T})$ telles que :

$$\sup\left\{\frac{\|f_t - f_s\|_p}{\varphi(|t-s|)} \mid t,s\in\mathbb{T}\ ,\ t\neq s\right\} < \infty \quad .$$

Rappelons que si $\frac{\varphi(x)}{x}$ est décroissante (en particulier si φ est concave), alors il existe une fonction sous-additive équivalente à φ, de sorte que l'on peut supposer que $\varphi(|t-s|)$ est une distance sur $\mathbb{T}$.
On note $A(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ à séries de Fourier absolument convergentes.

Le théorème suivant montre que les théorèmes 1.2 et 1.3 sont étroitement liés (au moins pour $p=2$) à un résultat classique de Bernstein sur les séries de Fourier absolument convergentes, et à la réciproque due à Stetchkine :

<u>Théorème 3.1</u> : Soit $\varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}_+$, croissante, concave, nulle à l'origine. Les propriétés suivantes de φ sont équivalentes :

i) $\int_0 \frac{\varphi(t)}{t^{3/2}}\, dt < \infty$,

ii) $\mathrm{Lip}_\infty(\mathbb{T},\varphi) \subset A(\mathbb{T})$,

iii) $\mathrm{Lip}_2(\mathbb{T},\varphi) \subset A(\mathbb{T})$,

iv) φ vérifie la propriété K_2 (cf. théorème 1.2).

L'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii) est un résultat classique dû à Bernstein et Stetchkine remontant aux années 50. Pour une démonstration (en particulier pour ii)$\Rightarrow$i)) voir [26] p. 14 . Avec une méthode semblable, nous montrerons plus loin (cf. remarque 3.3) que iii)$\Rightarrow$i). L'implication iii)$\Rightarrow$ii) est triviale. Il se trouve que iv)$\Rightarrow$iii) est très facile : en effet, soit $f\in \mathrm{Lip}_2(\mathbb{T},\varphi)$, posons

$$g_t(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|\ e^{in(\omega+t)}$$

on a évidemment

$$\forall\ t,s\in\mathbb{T} \qquad \|g_t - g_s\|_2 = \|f_t - f_s\|_2 \le C\ \varphi(|t-s|)$$

pour une constante C ; si l'on suppose que φ vérifie K_2, alors le processus $(g_t)_{t\in[0,2\pi]}$ est nécessairement à trajectoires continues, ce qui entraîne évidemment que $g(x) = \sum |\hat{f}(n)|\ e^{inx}$ est elle-même continue, et puisque $\hat{g}(n) \geq 0 \ \forall n$, on doit avoir $\Sigma |\hat{g}(n)| = \Sigma |\hat{f}(n)| < \infty$, soit finalement $f \in A(\mathbb{T})$. Ce qui montre que iv) implique iii).

On peut ainsi remarquer que le principal résultat de [20] (i.e. le théorème 1.3 pour $p = 2$) peut se déduire des travaux bien moins récents de Bernstein et Stetchkine. Nous allons d'ailleurs reprendre la méthode de démonstration indiquée dans [26] p. 14 pour démontrer maintenant le théorème 1.3.

<u>Démonstration du théorème 1.3</u> : Posons $D(n) = \sum_{2^n \leq k < 2^{n+1}} e^{2i\pi kt} \cdot 2^{-n/p'}$.

On montre aisément le lemme élémentaire suivant :

<u>Lemme 3.2</u> : $\|D(n)\|_p \leq C_p$

$$\|D(n)_t - D(n)_s\|_p \leq C_p \, 2^n \, |t - s| \quad ,$$

où C_p est une constante ne dépendant que de p.

Il est clair que l'on peut (en passant à une fonction équivalente) supposer que φ est concave sur $[0,1]$.

Posons alors

$$\psi_n = 2\,\varphi(2^{-n-1}) - \varphi(2^{-n})$$

et

$$R_n = \psi_n - \psi_{n+1} \quad .$$

On a $R_n \geq 0 \ \forall n$, puisque φ est concave. On considère la fonction

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} R_n \, D(n) \quad .$$

On va appliquer la propriété K_p au processus $(f_t)_{t \in \mathbb{T}}$ formé des fonctions translatées de la fonction f, (i.e. $f_t(\omega) = f(\omega + t)$).

Soit $t, s \in \mathbb{T}$ tel que $2^{-(N+1)} \leq |t - s| \leq 2^{-N}$. On peut écrire d'après le lemme ci-dessus :

$$\|f_t - f_s\|_p \leq C_p \sum_{n=1}^{N} R_n \, 2^n \, |t - s| + 2 \sum_{n>N} \|D(n)\|_p \, R_n$$

$$\leq C_p (2^{-N} \sum_{1}^{N} R_n \, 2^n + 2\, \psi_{N+1}) \quad ,$$

d'où (en développant) :

$$\leq C' (2^{-N} + \varphi(2^{-N-1})) \quad ,$$

où C' est une constante indépendante de N. Puisque $\frac{\varphi(x)}{x} \downarrow$, on a $\frac{\varphi(x)}{x} \geq \varphi(1) \quad \forall\, x > 0$, et on conclut donc que, si $2^{-N-1} \leq |t-s| \leq 2^{-N}$

$$\|f_t - f_s\|_p \leq C'' \varphi(2^{-N-1}) \leq C'' \varphi(|t-s|)$$

où C" est une constante.

Si l'on suppose que K_p est vérifiée, le processus $(f_t)_{t\in\mathbb{T}}$ doit avoir une version à trajectoires continues ; évidemment, cela n'est possible que si f elle-même est la série de Fourier d'une fonction continue ; comme les coefficients de Fourier de f sont positifs, la série de Fourier de f doit être absolument convergente, par conséquent, on a :

$$\sum_n 2^{n/p} R_n < \infty$$

et on voit aisément, pour finir, que

$$\sum_n 2^{n/p} R_n < \infty \quad \text{ssi} \quad \sum_n 2^{n/p} \varphi(2^{-n}) < \infty \quad .$$

Cela termine la démonstration puisqu'il est évident que $\sum_n 2^{n/p} \varphi(2^{-n}) < \infty$ ssi on a :

$$(I_p) \qquad \int_0 \frac{\varphi(t)}{t^{1+1/p}}\, dt < \infty \quad .$$

Remarque 3.3 : La démonstration précédente montre aussi que si $Lip_p(\mathbb{T},\varphi) \subset A(\mathbb{T})$, alors

$$\int_0 \frac{\varphi(t)}{t^{1+1/p}}\, dt < \infty \quad .$$

§ 4. UNE GENERALISATION DU THEOREME DE BERNSTEIN.

Soit G un groupe compact abélien (le cas non abélien ne pose pas de problème, voir la remarque 4.4 ci-dessous), et soit Γ son dual. Soit $f \in L^2(G)$, on pose

$$\forall\, t,s \in G \qquad f_t(x) = f(t+x) \quad , \quad d(t,s) = \|f_t - f_s\|_2$$

et

$$\omega_2(f,t) = \|f_t - f\|_2 \quad .$$

Pour alléger, on notera souvent $\omega_2(t)$ au lieu de $\omega_2(f,t)$. Soit m la mesure de Haar normalisée sur G. On pose $\forall\ \varepsilon>0$

$$\mu(\varepsilon) = m(\{x\in G \mid \omega_2(x)<\varepsilon\})$$

et $\forall\ t\in[0,1]$

$$\bar{\omega}_2(t) = \inf\{y>0 \quad \mu(y)<t\} \quad .$$

La fonction $\bar{\omega}_2 : [0,1]\to \mathbb{R}_+$ est croissante et a même distribution sur l'intervalle de Lebesgue que la fonction $\omega_2 : G\to\mathbb{R}_+$ sur G muni de la mesure m. On peut donc considérer $\bar{\omega}_2$ comme une "réarrangée croissante" de la fonction ω_2.

Notons simplement $N_d(\varepsilon)$ le nombre $N_d(G,\varepsilon)$ (cf. théorème 1.6). Il est facile de voir que

$$(4.0) \quad \forall\ \varepsilon>0 \qquad \frac{1}{\mu(\varepsilon)} \le N_d(\varepsilon) \le \frac{1}{\mu(\frac{\varepsilon}{2})} \quad ;$$

par conséquent $\int_0 N_d(\varepsilon)^{1/p}\, d\varepsilon < \infty$ ssi $\int_0 \frac{1}{\mu(\varepsilon)^{1/p}}\, d\varepsilon < \infty$;

un changement de variable évident montre alors que :

$$(4.1) \qquad \int_0 N_d(\varepsilon)^{1/p}\, d\varepsilon < \infty \quad \text{ssi} \quad \int_0 \frac{\bar{\omega}_2(t)}{t^{1+1/p}}\, dt < \infty \quad .$$

On peut maintenant donner une généralisation du théorème de Bernstein dont le principal intérêt est d'avoir un sens quel que soit le groupe G, alors que les formulations habituelles sont limitées à $\mathbb{T}$ ou bien $\mathbb{T}^k$.

Théorème 4.1 : Soit $f\in L^2(G)$, si $\int_0^1 \frac{\bar{\omega}_2(t)}{t^{3/2}}\, dt<\infty$ alors $\Sigma\ |\hat{f}(\gamma)|<\infty$.

De plus, il existe une constante numérique C telle que :

$$(4.2) \qquad \sum_{\gamma\neq 0} |\hat{f}(\gamma)| \le C \int_0^1 \frac{\bar{\omega}_2(t)}{t^{3/2}}\, dt$$

et telle que

$$(4.3) \qquad |f(t)-f(s)| \le C \int_0^{C\omega_2(t-s)} (N_d(\varepsilon))^{1/2}\, d\varepsilon$$

Démonstration : D'après (4.1), on a $\int_0 N_d(\varepsilon)^{1/2}\, d\varepsilon<\infty$; on peut donc appliquer le théorème 2.1 au processus $(g_t)_{t\in G}$ où $g\in L^2(G)$ est la fonction définie par $g = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\hat{f}(t)| \gamma$. Puisque $\|g_t - g_s\|_2 \leq d(t,s) \quad \forall\, t,s \in G$, le processus (g_t) doit être à trajectoires continues, ce qui signifie ici que la fonction g elle-même est continue. Comme $\hat{g}(\gamma) \geq 0 \quad \forall\, \gamma$, on doit avoir $\sum \hat{g}(\gamma) < \infty$, c'est-à-dire $\sum |\hat{f}(\gamma)| < \infty$. L'inégalité (4.2) s'obtient aisément à partir de la partie (iii) du théorème 2.1, tandis que la partie (ii) entraîne :

$$\left(\int \left(\sup_{\omega_2(t-s)<\delta} |f_t(x) - f_s(x)|\right)^2 m(dx)\right)^{1/2} \leq K \int_0^{K\delta} N_d(\varepsilon)^{1/2}\, d\varepsilon$$

d'où (4.3) puisque $\sup_{\omega_2(t-s)<\delta} |f_t(x) - f_s(x)|$ est indépendant de x.

Nous allons voir une autre démonstration de (4.2) qui résulte du

<u>Lemme 4.2</u> [31] : Soit $(a_k^*)_{k \geq 1}$ la suite obtenue en réarrangement (et en énumérant) en décroissant le module des coefficients $(|\hat{f}(\gamma)|_{\gamma \in \Gamma})$ de f. On a : $\forall\, n \geq 1$

$$(4.4) \qquad \bar{\omega}_2\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{k>n} a_k^{*2}\right)^{1/2} .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $T : L^2(G) \to C(G)$ l'opérateur de convolution par f, de sorte que $T(x) = x * f$ et soit j l'injection de C(G) dans $L^2(G)$. Pour tout opérateur $A : X \to Y$ entre espaces de Banach on pose $a_n(A) = \inf \|A-B\|$ où l'infimum porte sur tous les opérateurs $B : X \to Y$ de rang $< n$. Il est classique que l'on ait : $\forall\, n \geq 1$

$$a_n^* = a_n(jT)$$

(cf. e.g. [10] § XI.9).

Pour démontrer le lemme 4.2, nous allons minorer $\bar{\omega}_2(\frac{1}{n})$ par $\frac{1}{2}\left(\sum_{k>n} a_k(jT)^2\right)^{1/2}$.

Tout d'abord, montrons

$$\bar{\omega}_2\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{2}\, a_{n+1}(T) \quad .$$

En effet, par définition de $\bar{\omega}_2(\frac{1}{n})$ et d'après (4.0), il existe $t_1, \ldots, t_n$ dans G tels que

$$(4.5) \quad \forall\, t \in G \quad \exists\, j \leq n \quad \|f_t - f_{t_j}\|_2 \leq 2\, \bar{\omega}_2\left(\frac{1}{n}\right) \quad .$$

Soit alors P la projection orthogonale de $L^2(G)$ sur le sous-espace de dimension $\leq n$ engendré par $(f_{t_j})_{j\leq n}$. On pose $S = TP$. Il est facile de vérifier à partir de (4.5) que l'on a $\|T - S\| \leq 2\ \bar{\omega}_2(\frac{1}{n})$, donc

$$a_{n+1}(T) \leq 2\ \bar{\omega}_2(\frac{1}{n}) \quad .$$

Dans une deuxième étape, on va majorer la norme de Hilbert-Schmidt de $j(T - S)$:

$$(4.6) \qquad \|j(T - S)\|_{HS} \leq 2\ \bar{\omega}_2(\frac{1}{n}) \quad ;$$

(le lecteur familier de la théorie des opérateurs sommants doit trouver ce fait évident).

Montrons-le : posons $\varphi_\gamma = (T - S)(\gamma)$. L'inégalité (4.6) revient à montrer

$$(4.7) \qquad (\Sigma\ \|\varphi_\gamma\|_2^2)^{1/2} \leq 2\ \bar{\omega}_2(\frac{1}{n}) \quad .$$

Or, on a :

$$\forall\ x \in L^2(G) \qquad \|\Sigma\ \hat{x}(\gamma)\ \varphi_\gamma\|_C \leq \|T - S\|\ \ (\Sigma\ |\hat{x}(\gamma)|^2)^{1/2}$$

d'où $\sup\limits_{t\in G}\ (\Sigma\ |\varphi_\gamma(t)|^2)^{1/2} \leq 2\ \bar{\omega}_2(\frac{1}{n})$, et (4.7) est alors évidente. Enfin dans une troisième étape, on va voir que

$$(4.8) \qquad (\sum_{k>n} a_k(jT)^2)^{1/2} \leq \|j(T - S)\|_{HS}$$

si rang $S \leq n$.

Pour cela, on utilise l'identité suivante valable pour tout opérateur $A : L^2 \to L^2$:

$$\|A\|_{HS} = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n(A)^2)^{1/2} \quad ,$$

(cf. [10] § XI.9).

Posons $jT = B$. On a : $j(T - S) = B(I - P)$ d'où

$$\begin{aligned}
\|B(1 - P)\|_{HS}^2 &= \mathrm{tr}\ (1 - P)\ B^*\ B(1 - P) \\
&= \mathrm{tr}\ B^*\ B - \mathrm{tr}\ P\ B^*\ B\ P \\
&= \|B\|_{HS}^2 - \|BP\|_{HS}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(B)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(BP)^2
\end{aligned}$$

or on a $a_k(BP) = 0$ si $k > n$ puisque rang $P \leq n$ et $a_k(BP) \leq a_k(B)$ $\forall$ k.
Par conséquent :

$$\|B(1-P)\|_{HS}^2 \geq \sum_{k>n} a_k(B)^2 \quad .$$

Ce qui établit (4.8).
On peut donc achever la démonstration en combinant (4.8) et (4.6) puisque $a_k(jT) \quad a_k^*$.

Remarque : Nous pouvons donner une seconde démonstration de (4.2) à partir du lemme précédent. En effet

$$\int_0^1 \frac{\bar{\omega}_2(t)}{t^{3/2}}\, dt < \infty \iff \sum_n \frac{\bar{\omega}_2(1/n)}{\sqrt{n}} < \infty$$

donc cela entraîne $\displaystyle \sum_n \left(\frac{\sum_{k>n} a_k^{*2}}{n} \right)^{1/2} < \infty$,

or il est bien connu (et vérifiable aisément) que pour une suite (a_k^*) décroissante cette dernière condition entraîne $\sum a_k^* < \infty$ donc $\sum |\hat{f}(\gamma)| < \infty$.
L'inégalité (4.2) elle-même s'obtient alors par un calcul simple.
Notons $L^{p,\infty}(G)$ l'espace des fonctions f mesurables sur G et telles que

$$\|f\|_{p,\infty} = (\sup_{c>0} c^p \, m(\{|f| > c\}))^{1/p} < \infty \quad .$$

Soit $f \in L^{p,\infty}$, on pose $\omega_{p,\infty}(f,t) = \|f_t - f\|_{p,\infty}$. On définit $\bar{\omega}_{p,\infty}(f,t)$ de manière analogue à $\bar{\omega}_2(t)$.

On peut généraliser le théorème 4.1 de la manière suivante :

Théorème 4.3 : Soit p tel que $1 < p < 2$ et soit $f \in L^{p,\infty}(G)$. Il existe une constante C_p (ne dépendant que de p) telle que :

(4.9) $$\sum_{\gamma \neq 0} |\hat{f}(\gamma)| \leq C_p \int_0^1 \frac{\bar{\omega}_{p,\infty}(f,t)}{t^{1+1/p}}\, dt \quad .$$

Démonstration : On sait que la transformation de Fourier $f \to \hat{f}$ est bornée de $L^{p,\infty}(G)$ dans $\ell^{p',\infty}(\Gamma)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On peut donc écrire :

$\forall$ $t \in G$ $\qquad \omega_{p,\infty}(f,t) \geq \delta\, \varphi(t)$, où

$\delta > 0$ est une constante et $\varphi(t) = \|(\hat{f}(\gamma)(\gamma(t) - 1))_{\gamma \in \Gamma}\|_{\ell^{p',\infty}(\Gamma)}$. Soit $(\gamma_n)_n$ un réarrangement de $(\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de sorte que $|\hat{f}(\gamma_n)| = a_n^*$. Posons :

$$\forall\ (\alpha_i)_{i\leq n} \in \mathbb{C}^n\ ,\quad \|(\alpha_i)_{i\leq n}\|_{p',\infty} = (\sup_{c>0}\ c^{p'}\ \mathrm{card}(\{i \mid |\alpha_i| > c\}))^{1/p'} \quad .$$

On peut écrire :

$$\varphi(t) \geq a_n^* \ \|(\gamma_k(t) - 1)_{k\leq n}\|_{p',\infty} \quad .$$

On vérifie élémentairement qu'il existe une constante numérique $\delta_1 > 0$ telle que :

$$\|(\gamma_k(t) - 1)_{k\leq n}\|_{p',\infty} \geq \delta_1\ n^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{2}}\ (\sum_1^n |\gamma_k(t) - 1|^2)^{1/2} \quad .$$

On a donc :

$$\forall\ t \in G \qquad \omega_{p,\infty}(f,t) \geq \delta\ \delta_1\ a_n^*\ n^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{2}}\ \omega_2(S_n,t)$$

avec $S_n = \sum_1^n \gamma_k$.
Il en résulte immédiatement :

$$\forall\ t \in [0,1] \qquad \bar{\omega}_{p,\infty}(f,t) \geq \delta\ \delta_1\ a_n^*\ n^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{2}}\ \bar{\omega}_2(S_n,t) \quad .$$

Supposons que n est pair, soit $n = 2m$, et appliquons la dernière inégalité pour $t = \frac{1}{m}$; on trouve d'après (4.4) : $2\bar{\omega}_2(S_{2m}, \frac{1}{m}) \geq m^{1/2}$, d'où :

$$\bar{\omega}_{p,\infty}(f, \tfrac{1}{m}) \geq \delta_2\ a_{2m}^*\ m^{1/p'}$$

où $\delta_2 > 0$ est une constante.
On a donc

$$\int_0^1 \frac{\bar{\omega}_{p,\infty}(f,t)}{t^{1+1/p}}\,dt \geq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{1/m+1}^{1/m} \frac{\bar{\omega}_{p,\infty}(f,t)}{t^{1+1/p}}\,dt$$

$$\geq \delta_3 \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m+2}^*$$

soit

$$\geq \delta_4 \sum_{n=4}^{\infty} a_n^*$$

où δ_3, δ_4, etc. sont des constantes positives. Comme il n'est pas difficile de vérifier, par ailleurs, que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{\bar{\omega}_{p,\infty}(f,t)}{t^{1+1/p}}\,dt \geq \delta_5 \sup_{\gamma\neq 0} |\hat{f}(\gamma)| \quad ,$$

on obtient finalement (4.9). cqfd.

Remarque 4.4 : Le théorème 4.1 reste valable pour un groupe G compact non abélien. Dans ce cas, le groupe dual Γ est remplacé par l'ensemble Σ des classes des représentations unitaires irréductibles de G. Les coefficients de Fourier $(\hat{f}(i))_{i\in\Sigma}$ sont alors des opérateurs :

$$\forall\ i \in \Sigma \qquad \hat{f}(i) = \int U_i(-x)\ f(x)\ dm(x)$$

où U_i est une représentation unitaire de la classe définie par i.
L'inégalité (4.2) devient dans ce cadre :

$$\sum_{i\neq 0} \dim(U_i)\ \mathrm{tr}|\hat{f}(i)| \leq C \int_0^1 \frac{\bar{\omega}_2(f,t)}{t^{3/2}}\ dt \quad .$$

On peut aussi étendre le théorème 4.3 en suivant essentiellement la même démonstration.

Remarque 4.5 : Supposons G non discret. Il résulte d'inégalités classiques sur les réarrangements (cf. e.g. [5] § 13) que pour toute fonction décroissante $\chi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ et pour toute fonction $\sigma : G \to \mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_0^1 \bar{\sigma}(t)\ \chi(t)\ dt = \inf\{\int_G \sigma(x)\ \lambda(x)\ dm(x)\}$$

où l'infimum porte sur toutes les fonctions $\lambda : G \to \mathbb{R}_+$ ayant même distribution (relativement à m) que χ (relativement à la mesure de Lebesgue normalisé sur $[0,1]$) ; soit $A(\chi)$ l'ensemble de ces fonctions λ.
Posons $\chi_p(t) = t^{-1-1/p}$. On a en particulier :

$$(4.10) \qquad \int_0^1 \bar{\omega}_{p,\infty}(f,t)\ t^{-1-1/p}\ dt = \inf_{\lambda\in A(\chi_p)} \{\int_G \omega_{p,\infty}(f,t)\ \lambda(t)\ dm(t)\} \ .$$

Remarque 4.6 : Les théorèmes 4.1 et 4.3 améliorent certains résultats relativement récents de A. Garsia (cf. [13] th. 1.6) : d'une part, nous pouvons énoncer ce résultat sur un groupe compact quelconque (indépendamment des questions de dimension du groupe) d'autre part nous avons le résultat avec $L^{p,\infty}$ au lieu de L^p.

Indiquons brièvement comment déduire le théorème 1.6 de [13] des résultats précédents : on considère le cas où $G = \mathbb{T}$, et on remarque que la fonction $\lambda_p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\lambda_p(t) = (2|t|)^{-1-1/p}$ (où $|t|$ est défini au début du § 3) a la même distribution que χ_p. On a donc d'après (4.10),

$\forall\ f \in L^{p,\infty}(\mathbb{T})$,

$$\int_0^1 \frac{\bar{\omega}_{p,\infty}(f,t)}{t^{1+1/p}}\, dt \le \int_{\mathbb{T}} \omega_{p,\infty}(f,t)\ \lambda_p(t)\ dm(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\omega_{p,\infty}(f,t)}{(2t)^{1+1/p}}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\omega_{p,\infty}(f,t)}{(2(2\pi-t))^{1+1/p}}\, dt$$

$$= (\pi\ 2^{1+1/p})^{-1} \int_0^{\pi} \frac{\omega_{p,\infty}(f,t)}{t^{1+1/p}}\, dt \quad ,$$

soit finalement :

$$(4.11) \qquad \int_0^1 \frac{\bar{\omega}_{p,\infty}(f,t)}{t^{1+1/p}}\, dt \le C'_p \int_0^{\pi} \frac{\omega_{p,\infty}(f,t)}{t^{1+1/p}}\, dt$$

où C'_p ne dépend que de p.
Posons $\omega_p(f,t) = \|f_t - f\|_p$; on a évidemment

$$\forall\ t \in G \qquad \omega_{p,\infty}(f,t) \le \omega_p(f,t) \quad ;$$

les inégalités (4.11) et (4.9) entraînent

$$\sum_{\gamma\neq 0} |\hat{f}(\gamma)| \le C_p\ C'_p \int_0^{\pi} \frac{\omega_p(f,t)}{t^{1+1/p}}\, dt$$

ce qui constitue le théorème I.6 de [13].
On peut aussi dériver le cas de $G = \mathbb{T}^k$ qui est traité dans [36]. D'autre part, les théorèmes 2.1 et 1.9 permettent d'obtenir les théorèmes 1.3, 1.4 et 1.5 de [13], ainsi que le théorème 1.2 mais celui-là seulement pour $p \le 2$.
Revenons au cas de G quelconque ; soit $A_p(G)$ l'espace formé des fonctions $f \in C(G)$ qui s'écrivent sous la forme $f = \sum_1^{\infty} h_n * k_n$ avec $\sum_1^{\infty} \|h_n\|_p\ \|k_n\|_{p'} < \infty$; on munit cet espace de la norme $\|f\|_{A_p} = \inf\ \{\sum_1^{\infty} \|h_n\|_p\ \|k_n\|_{p'}\}$ où l'infimum porte sur toutes les représentations de f. Cet espace est classiquement identifié à un prédual de l'espace $M_p(G)$ formé des opérateurs de convolution bornés sur $L^p(G)$.

Le théorème 1.9 a pour conséquence immédiate :

<u>Théorème 4.7</u> : Soit p tel que $1 < p < \infty$ et soit $f \in L^p(G)$ telle que $\int_0^1 \frac{\bar{\omega}_p(f,t)}{t^{1+1/p}}\, dt < \infty$. Alors f est dans $A_p(G)$ et l'on a :

(4.12) $$\|f\|_{A_p(G)} \leq C''_p \{|\hat{f}(0)| + \int_0^1 \frac{\bar{\omega}_p(f,t)}{t^{1+1/p}} dt\}$$

où C''_p est une constante ne dépendant que de p.

Démonstration (esquisse) : Signalons tout d'abord que pour $p \leq 2$, le résultat précédent est plus faible que le théorème 4.3. Posons encore $d(s,t) = \|f_t - f_s\|_p$; soit $T \in M_p(G)$ de norme ≤ 1, de sorte que l'on a $\|T(f_t) - T(f_s)\|_p \leq d(t,s)$, $\forall\ t,s \in G$. L'hypothèse du théorème 4.7 signifie que $\int_0^1 N_d(\varepsilon)^{1/p} d\varepsilon < \infty$, par conséquent (cf. théorème 1.9) le processus $(T(f_t))_t = (T(f)_t)_t$ doit être à trajectoires continues. Il en résulte que $T(f)$ est nécessairement elle-même une fonction continue, et cela pour tout T dans la boule unité de $M_p(G)$; cela n'est possible que si f est dans $A_p(G)$.

Le lecteur vérifiera aisément (4.12).

D'autre part, signalons que nous aurions pu obtenir un résultat analogue avec $\omega_{p,\infty}(f,t)$ en considérant les multiplicateurs sur $L^{p,\infty}(G)$; cela aussi est laissé au lecteur.

Remarque 4.8 : On pourrait aussi démontrer le théorème 4.3 en se basant sur les résultats de [38]. En effet avec les notations de cet article, la condition $\int_0^1 \frac{\bar{\omega}_{p,\infty}(f,t)}{t^{1+1/p}} dt < \infty$ entraîne (voir § 6) que les nombres de Weyl de l'opérateur $T : L^{p',1}(G) \to C$ de convolution par f sont dans $\ell^{p,1}$; comme on peut vérifier que les nombres de Weyl de l'injection $\alpha : C \to L^{p',1}$ sont (pour $p' > 2$) dans $\ell^{p',\infty}$, on trouve que les nombres de Weyl (et donc d'après [38] les valeurs propres) de αT sont sommables, d'où le théorème 4.3 puisque les valeurs propres de αT ne sont autres que les coefficients de Fourier de f.

§ 5. RAPPORTS AVEC LES OPERATEURS SOMMANTS ET DEMONSTRATION DU THEOREME 1.9.

Rappelons tout d'abord qu'un opérateur $u : X \to Y$ entre espaces de Banach est dit p-sommant ($0 < p < \infty$) s'il existe une constante λ telle que : $\forall\ n\ \forall\ \{x_1,\ldots,x_n\} \subset X$ on a

$$\Sigma \|ux_i\|^p \leq \lambda^p \sup\{\Sigma\ |\langle\xi,x_i\rangle|^p\ ,\ \xi \in X',\ \|\xi\| \leq 1\}\ .$$

On note $\pi_p(u)$ la plus petite constante λ vérifiant cette propriété.
Etant donné un espace métrique (ou pseudo-métrique) (T,d), on définit l'espace de Banach $\mathrm{Lip}(T,d)$ comme l'espace des fonctions $f : T \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe une constante λ telle que :

$$\forall\, t,s \in T \qquad |f(t)| \leq \lambda$$

$$|f(t) - f(s)| \leq \lambda\, d(t,s) \quad ;$$

on note $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$ la plus petite constante λ vérifiant cette propriété ; l'espace $\mathrm{Lip}(T,d)$ muni de cette norme est évidemment un espace de Banach continûment injecté dans $C(T)$.
On note $j_d : \mathrm{Lip}(T,d) \to C(T)$ l'injection naturelle de $\mathrm{Lip}(T,d)$ dans $C(T)$.
Pour toute v.a. Z, on pose

$$\Lambda_p(Z) = (\sup_{c>0} c^p\, \mathbb{P}(\{|Z| > c\}))^{1/p} \quad .$$

Rappelons que, pour $1 < p < \infty$, la fonctionnelle $Z \to \Lambda_p(Z)$ est équivalente à une norme sur l'espace des variables où elle est finie.

Dans le cas $p > 2$, nous ne savons pas obtenir un résultat aussi complet que celui du § 2 ; nous avons besoin de recourir, pour $p > 2$, à la théorie des opérateurs p-radonifiants (cf. [41]), et pour $\mathcal{K}(p,\infty)$ à la théorie des opérateurs Λ_p-radonifiants (cf.[1]). Donnons quelques mots d'explication pour le lecteur qui n'est pas familier de cette théorie :
Nous utilisons cette théorie uniquement pour vérifier la <u>continuité</u> p.s. des processus considérés ; en effet, les arguments ci-dessous montrent seulement que les processus vérifiant les conditions de Lipschitz habituelles sont <u>bornés</u> p.s. Nous avons alors recours à la théorie des opérateurs sommants et radonifiants, car cette théorie permet (grâce à un théorème de factorisation de Pietsch) de se ramener au cas où l'espace $C(T)$ est remplacé par un espace réflexif, auquel cas "borné" et "continu" p.s. reviennnent au même. (Nous indiquons aussi au § 7 une démonstration n'utilisant pas cette théorie.)

Posons :
$$\mathcal{E}_p(T,d) = \int_0^D N_d(T,\varepsilon)^{1/p}\, d\varepsilon$$

avec $D = \sup_{T\times T} d(s,t)$.
Le point essentiel de la démonstration est le lemme suivant :

<u>Lemme 5.1</u> : Il existe des constantes C'_p et C''_p ne dépendant que de p, telles que :
Pour tout espace métrique <u>fini</u> (T,d) et pour tout processus $(X_t)_{t\in T}$, on a :

(5.1) $$\Lambda_p(\sup_{t,s} |X_t - X_s|) \leq C'_p \,\mathcal{E}_p(T,d) \sup_{t,s} \frac{\Lambda_p(X_t - X_s)}{d(t,s)}$$

(5.2) $$\|\sup_{t,s} |X_t - X_s|\|_p \leq C''_p \,\mathcal{E}_p(T,d) \sup_{t,s} \frac{\|X_t - X_s\|_p}{d(t,s)} \quad .$$

Nous aurons besoin de quelques notations techniques :
Soit (T,d) un espace métrique fini. On pose

$$\delta = \inf \{d(s,t) \mid s,t \in T\}$$

$$D = \sup \{d(s,t) \mid s,t \in T\}$$

$$N = [\mathrm{Log}\ \frac{2D}{\delta}] + 1$$

et $$\delta_n = \frac{\delta}{2} e^n \qquad \text{pour } n = 0,1,2,\ldots,N \quad .$$

On pose $$N_j = N_d(T,\delta_j) \quad .$$

Noter que $\delta_N \geq D$, de sorte que $N_d(\delta_N) = 1$; d'autre part $N_o = \text{card}\ (T)$.
Soient Δ', Δ'' deux partitions de T, nous dirons que Δ' est moins fine que Δ'', (ou plus grossière) et nous noterons $\Delta' \succ \Delta''$ si tout élément de Δ'' est inclus dans un élément de Δ'.
Soit A une partie de T, on notera diam(A) le diamètre de A relativement à d, i.e. :

$$\mathrm{diam}(A) = \sup \{d(t,s) \mid s,t \in A\} \quad .$$

Soit Δ une partition de T. On pose

$$\pi(A) = \sup \{\mathrm{diam}(A) \mid A \in \Delta\} \quad .$$

$\pi(A)$ est appelé le "pas" de Δ.

La clé de la démonstration du lemme 5.1 est le

<u>Lemme 5.2</u> : Avec les notations précédentes, il existe une famille de partitions $\Delta_o \prec \Delta_1 \prec \cdots \prec \Delta_N$, de moins en moins fines, telles que : $\forall\ j = 0,1,\ldots,N$

$$\pi(\Delta_j) \leq K\ \delta_j$$

où K est une constante numérique, et

$$\mathrm{card}(\Delta_j) \leq N_j \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Il est clair que l'on peut trouver des partitions $(\Delta'_j)_{0\leq j\leq N}$ de T telles que $\pi(\Delta'_j) \leq 2\ \delta_j$ et $\mathrm{card}(\Delta'_j) \leq N_j$, et telles que Δ'_o est la partition triviale de T en singletons. On va montrer que l'on peut modifier les partitions (Δ'_j) pour obtenir de partitions <u>emboîtés</u> (Δ_j), ayant encore essentiellement les mêmes propriétés que (Δ'_j).
On va construire (Δ_j) par récurrence :

On pose $\lambda_k = 2\ \delta_k + 2^2\ \delta_{k-1} + \cdots + 2^{k+1}\ \delta_o$ $\forall\ k \geq 0$; remarquons que $\lambda_k \leq K\ \delta_k$ $\forall\ k \geq 0$, où K est une constante numérique.
On pose $\Delta_o = \Delta'_o$. Soit j un entier ≥ 0. Supposons que l'on a construit des partitions $\Delta_j \succ \Delta_{j-1} \succ \cdots \succ \Delta_o$ telles que :

$$\forall\ k = 0,1,\ldots,j \qquad\qquad \mathrm{card}(\Delta_k) \leq N_k$$

$$\text{et} \qquad\qquad \pi(\Delta_k) \leq \lambda_k \quad .$$

On va construire une partition $\Delta_{j+1} \succ \Delta_j$ et telle que :

$$\mathrm{card}(\Delta_{j+1}) \leq N_{j+1}$$

$$\text{et} \qquad\qquad \pi(\Delta_{j+1}) \leq \lambda_{j+1} \quad .$$

Pour cela, à toute partie $A \subset T$ appartenant à Δ'_{j+1} associons la partie $[A]$ définie de la manière suivante :

$$[A] = \bigcup_{\substack{B\in\Delta_j \\ B\cap A\neq\emptyset}} B$$

($[A]$ est le plus petit ensemble contenant A et appartenant à l'algèbre booléenne engendrée par la partition Δ_j).

La collection $\mathcal{C}_{j+1} = \{[A] \mid A \in \Delta'_{j+1}\}$ est alors un recouvrement de T formé d'ensembles appartenant à l'algèbre engendrée par Δ_j ; en remplaçant chaque élément de $\mathcal{C}_{j+1}$ par une sous-partie convenable, on peut donc former une partition de T, notée Δ_{j+1}, formée d'ensembles appartenant à l'algèbre engendrée par Δ_j. On a alors :

$$\Delta_{j+1} \succ \Delta_j$$

$$\mathrm{card}(\Delta_{j+1}) \leq \mathrm{card}(\mathcal{C}_{j+1}) \leq \mathrm{card}(\Delta'_{j+1}) \leq N_{j+1}$$

et
$$\pi(\Delta_{j+1}) \leq \pi(\Delta'_{j+1}) + 2\,\pi(\Delta_j) \quad ;$$

vu l'hypothèse de récurrence, la dernière ligne entraîne :

$$\pi(\Delta_{j+1}) \leq 2\,\delta_{j+1} + 2\,\lambda_j = \lambda_{j+1} \quad ,$$

par conséquent, Δ_{j+1} vérifie la récurrence à l'ordre j+1, ce qui termine la démonstration par récurrence sur j.

C'est le lemme (trivial) ci-dessous qui jouera un rôle analogue à celui du lemme 2.2 dans le cas $p \leq 2$.

<u>Lemme 5.3</u> : Soient $Z_1,\ldots,Z_n$, n variables aléatoires. On a :

$$\Lambda_p(\sup_{i\leq n} |Z_i|) \leq n^{1/p} \sup_{i\leq n} \Lambda_p(Z_i)$$

et
$$\|\sup_{i\leq n} |Z_i|\|_p \leq n^{1/p} \sup_{i\leq n} \|Z_i\|_p \quad .$$

<u>Démonstration du lemme 5.1</u> : On utilise les partitions $\Delta_o \prec \Delta_1 \prec \cdots \prec \Delta_N$ du lemme 5.2.

Pour chaque j et chaque partie $A \in \Delta_j$ on choisit un point $t^j_A \in A$.

On pose alors :

$$X^j_t(\omega) = \sum_{A\in\Delta_j} 1_A(t)\, X_{t^j_A}(\omega) \quad ,$$

et
$$\Delta^j_t = X^j_t - X^{j+1}_t \quad .$$

On a : $\forall\ t,s \in T$

$$X_t - X_s = X^o_t - X^o_s = \sum_{0\leq j<N} \Delta^j_t - \Delta^j_s$$

donc :

(5.3) $$\sup_{t,s} |X_t - X_s| \leq 2 \sum_{0\leq j<N} \sup_t |\Delta_t^j| .$$

On va maintenant évaluer $\sup_t |\Delta_t^j|$:

Fixons j, et notons $A \to \underline{A}$ l'application qui fait correspondre à toute partie A de Δ_j la partie $\underline{A}$ de Δ_{j+1} qui contient A. On peut écrire :

$$X_t^{j+1} = \sum_{A\in\Delta_{j+1}} \sum_{\substack{B\in\Delta_j \\ B\subset A}} 1_B(t)\, X_{t_A^{j+1}}$$

d'où
$$\Delta_t^j = \sum_{B\in\Delta_j} 1_B(t)\, (X_{t_B^j} - X_{t_{\underline{B}}^{j+1}}) .$$

On a donc :

$$\sup_t |\Delta_t^j| \leq \sup\{ |X_{t_B^j} - X_{t_{\underline{B}}^{j+1}}| \; B \in \Delta_j\} ;$$

d'où d'après le lemme 5.3 :

$$\|\sup_t |\Delta_t^j|\|_p \leq \mathrm{card}(\Delta_j)^{1/p}\, \pi(\Delta_{j+1}) \sup_{T\times T} \frac{\|X_t - X_s\|_p}{d(s,t)} .$$

Par conséquent, d'après (5.3) et d'après le lemme 5.2 on a :

$$\|\sup_{t,s} |X_t - X_s|\|_p \leq \sum_{0\leq j<N} N_j^{1/p}\, K\, \delta_{j+1} \sup_{T\times T} \frac{\|X_t - X_s\|_p}{d(t,s)} ;$$

on en déduit immédiatement (5.2), puisque l'on peut écrire :

$$\sum_{0\leq j<N} N_j^{1/p}\, \delta_{j+1} \leq \frac{e^2}{e-1} \sum_{0\leq j<N} \int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} N_d(T,\varepsilon)^{1/p}\, d\varepsilon$$

$$\leq \frac{e^2}{e-1}\, \mathcal{E}_p(T,d) .$$

La démonstration de (5.1) est tout-à-fait similaire.
On déduit immédiatement du lemme 5.1 :

<u>Théorème 5.3</u> : Si $\int_0 N_d(T,\varepsilon)^{1/p}\, d\varepsilon < \infty$, alors j_d est p-sommant et même Λ_p-sommant et l'on a :

(5.4) $$\pi_p(j_d) \leq 1 + C''_p\, \mathcal{E}_p(T,d)$$

(5.5) $$\pi_{\Lambda_p}(j_d) \le 1 + C'_p\, \mathcal{E}_p(T,d) \quad .$$

Démonstration : Soit $(x_1,\dots,x_n) \in Lip(T,d)$. Si l'on considère $(x_i)_{i\le n}$ comme une variable aléatoire sur l'espace $\{1,2,\dots,n\}$ muni de la probabilité uniforme et si l'on applique (5.2) on trouve, pour toute partie finie $S \subset T$:

(5.6) $$\left(\sum_1^n \sup_{s,t\in S} |x_i(t) - x_i(s)|^p\right)^{1/p} \le$$

$$\le C''_p\, \mathcal{E}_p(T,d) \sup_{t,s\in S} \left(\sum_1^n \left|\frac{x_i(t) - x_i(s)}{d(t,s)}\right|^p\right)^{1/p} \quad .$$

Par continuité, on en déduit que (5.6) reste valable aussi pour $S = T$.
Posons

$$\chi = \sup\{(\sum_1^n |\langle\xi, x_i\rangle|^p)^{1/p} \quad , \ \xi \in Lip(T,d)' \quad , \ \|\xi\| \le 1\} \quad .$$

Comme on a

$\forall\ t \in T$ $$\sum_1^n |x_i(t)|^p \le \chi^p \quad ,$$

il résulte immédiatement de (5.6) que :

$$(\sum_1^n \|x_i\|^p_{C(T)})^{1/p} \le (1 + C''_p\, \mathcal{E}_p(T,d))\, \chi \quad ,$$

ce qui établit (5.4).
La démonstration de (5.5) est analogue.

Le lien avec la théorie des opérateurs sommants se fait par l'intermédiaire de la proposition suivante :

Proposition 5.4 : L'espace métrique (ou pseudo-métrique) (T,d) vérifie la propriété $\mathcal{K}(p)$ (resp. $\mathcal{K}(p,\infty)$) si et seulement si l'opérateur j_d est p-sommant (resp. Λ_p-sommant).

La démonstration est facile à partir du théorème suivant :

Théorème 5.5 : a) [41] Tout opérateur p-sommant est p-radonifiant.
b) [1] Tout opérateur Λ_p-sommant est Λ_p-radonifiant.

Démonstration de la proposition 5.4 : La partie seulement si est facile : en effet on a vu (cf. proposition 1.10) que si $\mathcal{K}(p)$ est vérifiée, alors il existe une constante C pour laquelle on a une inégalité analogue à (5.2). On conclut alors que j_d est p-sommante en considérant un espace de probabilité fini comme dans la démonstration du théorème 5.3. Inversement, si j_d est p-sommant, il est aussi p-radonifiant d'après le théorème 5.5 ; soit alors $(X_t)_{t\in T}$ un processus (sur un espace de probabilités $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$) tel que

$$\sup_{t\in T} \|X_t\|_p < \infty$$

et $\forall\ t,s\in T$ $$\|X_t - X_s\|_p \leq d(t,s) \quad .$$

Considérons l'opérateur linéaire

$$u : L^{p'}(\Omega,\mathbb{P}) \longrightarrow \mathrm{Lip}(T,d)$$

défini par $$u\,\xi(t) = \langle\xi,X_t\rangle \qquad \forall\ \xi\in L^{p'}(\Omega,\mathbb{P}) \quad .$$

Le transposé de u, soit $u' : \mathrm{Lip}(T,d)' \to L^p(\Omega,\mathbb{P})$ définit une "probabilité cylindrique de type p sur Lip(T,d) " au sens de [41]. Puisque j_d est p-radonifiante, cette probabilité cylindrique doit être radonifiée sur C(T), ce qui prouve bien que $(X_t)_{t\in T}$ a une version à trajectoires continues sur T.

La démonstration avec Λ_p au lieu de L^p est similaire.

<u>Démonstration du théorème 1.9</u> : Elle est en fait terminée : en combinant le théorème5.3 avec la proposition 5.4, on obtient le théorème 1.9. Une autre démonstration est donnée au §7.

§ 6. RAPPORTS AVEC LES NOMBRES D'APPROXIMATION.

Pour tout opérateur $u : X\to Y$ entre espaces de Banach, et pour tout entier k, on pose :

$$a_k(u) = \inf \|u - v\|$$

où l'infimum porte sur tous les opérateurs $v : X\to Y$ de rang $< k$.

Soit (T,d) un espace pseudo-métrique comme précédemmment. On pose

$\forall\ \varepsilon > 0$ $$\delta(\varepsilon) = \inf\{\rho \mid N_d(T,\rho) \leq \frac{1}{\varepsilon}\} \quad .$$

La fonction $\varepsilon \to \delta(\varepsilon)$ est en quelque sorte une fonction inverse de $\varepsilon \to \frac{1}{N_d(T,\varepsilon)}$.

Les deux lemmes ci-dessous relient les nombres d'approximation de l'opérateur j_d avec la fonction $N_d(T,\varepsilon)$:

<u>Lemme 6.1</u> :

(6.1) $$a_{n+1}(j_d) \leq \delta(\tfrac{1}{n}) \quad \forall\, n \geq 1 .$$

<u>Démonstration</u> : Vu la définition de $\delta(\varepsilon)$, il existe n points $t_1,\dots,t_n$ dans T tels que :

$$T = \bigcup_{j\leq n} B(t_j, \delta(\tfrac{1}{n})) ,$$

(où on a noté $B(t,\delta)$ la boule ouverte de centre t et de rayon δ pour la métrique d).

Soit alors $(\varphi_j)_{j\leq n}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $(B(t_j,\delta(\frac{1}{n})))_{j\leq n}$.

Considérons l'opérateur $v : Lip(T,d) \to C(T)$ défini par : $\forall\, f \in Lip(T,d)$

$$v(f) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)\, \varphi_j .$$

Soit f dans la boule unité de Lip(T,d).

On a évidemment (puisque $\Sigma \varphi_j = 1$ et $\varphi_j \geq 0$) :

$$\begin{aligned}\|j_d(f) - v(f)\| &= \sup_{x\in T} |\Sigma\, (f(t_j) - f(x))\, \varphi_j(x)| \\ &\leq \sup_{x\in T} \Sigma\, \varphi_j(x) \sup_{x\in \mathrm{supp}\, \varphi_j} |f(t_j) - f(x)| .\end{aligned}$$

Puisque $$\begin{aligned}|f(t_j) - f(x)| &\leq d(x,t) \\ &\leq \delta(\tfrac{1}{n}) \quad \forall\, x \in \mathrm{supp}(\varphi_j) ,\end{aligned}$$

on a :

$$\|j_d(f) - v(f)\| \leq \delta(\tfrac{1}{n}) , \quad \text{donc} \quad \| j_d - v\| \leq \delta(\tfrac{1}{n}) ,$$

et par conséquent $$a_{n+1}(j_d) \leq \delta(\tfrac{1}{n}) . \qquad \text{cqfd.}$$

Lemme 6.2 : Si l'espace métrique (T,d) est supposé hilbertien, alors on a aussi :

(6.2) $$\frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{1}{2n}\right) \leq 2\, a_{n+1}(j_d) \quad ,$$

à condition que $\delta(\frac{1}{2n}) \leq \sqrt{2}$.

Démonstration : On va voir une inégalité a priori un meilleure que (6.2) en termes des nombres de Weyl introduits par Pietsch dans [38]. Si $u : X \to Y$ est un opérateur entre espaces de Banach, on définit le n-ième "nombre de Weyl" de u de la manière suivante :

$$x_n(u) = \sup\{a_n(uw)\}$$

où le supremum porte sur tous les opérateurs $w : \ell^2 \to X$ de norme ≤ 1. Il est clair que :

$$x_n(u) \leq a_n(u) \quad .$$

Nous allons montrer que si (T,d) un sous-espace métrique d'un espace hilbertien, on a

(6.3) $$\frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{1}{2n}\right) \leq x_{n+1}(j_d) \quad .$$

Comme $x_{n+1}(j_d) \leq a_{n+1}(j_d)$, on voit que (6.3) implique (6.2).
Soit m un entier quelconque et soit $\rho < \delta(\frac{1}{m})$, de sorte que $N_d(T,\rho) > m$.
On peut trouver $t_1,\dots,t_m$ dans T tels que

(6.4) $\forall\ i \neq j \leq m$ $$d(t_i,t_j) > \rho \quad .$$

Posons $S = \{t_1,\dots,t_m\}$. On définit une application $\varphi : S \to \ell^2_m$ en posant :

$$\varphi(t_j) = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\, e_j \qquad j \leq m \quad ,$$

où l'on a noté (e_j) la base canonique de ℓ^2_m.
D'après (6.4), on a alors :

$\forall\ t,s \in S$ $$\|\varphi(t) - \varphi(s)\| \leq d(s,t) \quad .$$

D'après un théorème bien connu (cf. [43] p. 48 et p. 96) on peut prolonger

φ en une application $\Phi : T \to \ell^2_m$ telle que :

$$(6.5) \quad \forall\, t,s \in T \qquad \|\Phi(t) - \Phi(s)\| \le d(t,s)$$

$$\|\Phi(t)\| \le \frac{\rho}{\sqrt{2}} \quad .$$

Posons $\qquad \Phi_n(t) = \langle e_n, \Phi(t)\rangle$

et considérons l'opérateur $w : \ell^2_m \to \mathrm{Lip}(T,d)$ défini par $w\, e_n = \Phi_n$. Il est facile de vérifier que (6.5) entraîne que $\|w\| \le \alpha$ avec $\alpha = \max\,\{1, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\}$.

Soit $P_m : C(T) \to \ell^\infty_m$ l'opérateur défini par :

$$\forall\, f \in C(T) \qquad P_m(f) = (f(t_j))_{1 \le j \le m} \quad .$$

On notera $J_m : \ell^2_m \to \ell^\infty_m$ l'injection naturelle de ℓ^2_m dans ℓ^∞_m. Considérons l'opérateur

$$P_m\, j_d\, w : \ell^2_m \longrightarrow \ell^\infty_m \quad .$$

Il est facile de voir que : $P_m\, j_d\, w = \frac{\rho}{\sqrt{2}} J_m$. On doit donc avoir, $\forall\, n \le m$,

$$x_{n+1}(P_m\, j_d\, w) = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\, x_{n+1}(J_m)$$

d'où $\qquad \alpha\, x_{n+1}(j_d) \ge \frac{\rho}{\sqrt{2}}\, x_{n+1}(J_m) = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\, a_{n+1}(J_m) \quad .$

Or on sait calculer $a_{n+1}(J_m)$, en effet, un résultat de Stetchkine (cf. [37] lemme 11.11.8 p. 163) assure que

$$a_{n+1}(J_m) = \left(\frac{m-n}{m}\right)^{1/2} \qquad \text{si} \quad n \le m \quad .$$

On a donc $\forall\, n \le m$, et si $\delta(\frac{1}{m}) \le \sqrt{2}$

$$x_{n+1}(j_d) \ge \delta\left(\frac{1}{m}\right) \left(\frac{m-n}{2m}\right)^{1/2}$$

et en particulier, avec $m = 2n$, si $\delta(\frac{1}{2n}) \le \sqrt{2}$, on a :

$$x_{n+1}(j_d) \ge \frac{1}{2}\, \delta\left(\frac{1}{2n}\right) \quad .$$

Ce qui achève la démonstration de (6.2).

Remarque 6.3 : D'après les deux lemmes précédents on voit que si (T,d) est un espace métrique hilbertien on a, par un changement de variables :

$$\int_0 N_d(T,\varepsilon)^{1/p}\, d\varepsilon < \infty \Longleftrightarrow \sum_n \frac{a_n(j_d)}{n^{1/p'}} < \infty$$

avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $1\le p<\infty$.
(L'implication de gauche à droite est vraie en général.)
Similairement, on a : si $0<\alpha<\infty$,

$$\int_0 (\mathrm{Log}\, N_d(T,\varepsilon))^{1/\alpha}\, d\varepsilon < \infty \Longleftrightarrow \sum_n \frac{a_n(j_d)}{n(\mathrm{Log}\, n)^{1/\alpha'}}$$

avec $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}=1$.

Remarque 6.4 : Le lemme 6.1 explique bien pourquoi le cas $p\le 2$ du théorème 1.9 est plus facile à démontrer que le cas $p>2$.
En effet, il est bien connu que si un opérateur $u : X\to Y$ entre espaces de Banach vérifie

$$\sum_n \frac{a_n(u)}{n^{1/p'}} < \infty$$

alors, si $p\le 2$, u est nécessairement p-sommant. En effet, on peut trouver pour tout entier k un opérateur $u_k : X\to Y$ de rang $< 2^k$ et tel que

$$\|u-u_k\| \le a_{2^k}(u) .$$

On a $$\mathrm{rang}(u_k-u_{k-1}) < 2^k+2^{k-1}<2^{k+1}$$

et $$\|u_k-u_{k-1}\| \le a_{2^k}(u)+a_{2^{k-1}}(u) \le 2\, a_{2^{k-1}}(u) .$$

Comme pour tout espace E de dimension n, on a

$$\pi_p(Id_E) \le n^{1/p} \quad \text{si} \quad p\le 2$$

(ce résultat est en fait équivalent au lemme 2.2), on a

$$\pi_p(u_k-u_{k-1}) \le 2^{\frac{k+1}{p}} \|u_k-u_{k-1}\|$$

$$\le 2\, 2^{\frac{k+1}{p}} a_{2^{k-1}}(u)$$

d'où
$$\pi_p(u) \leq \pi_p(u_o) + \sum_{k=1}^{\infty} \pi_p(u_k - u_{k-1})$$
$$\leq \pi_p(u_o) + \sum_k 2 \cdot 2^{\frac{k+1}{p}} a_{2^{k-1}}(u) \ ,$$

et on vérifie élémentairement que cette dernière série converge ssi $\sum_n \frac{a_n(u)}{n^{1/p'}} < \infty$.

On comprend ainsi mieux pourquoi, si $p \leq 2$, la condition $\int_0 N_d(T,\varepsilon)^{1/p} d\varepsilon < \infty$ implique directement que j_d est p-sommant.

Remarque 6.5 : Les lemmes 6.1 et 6.2 généralisent des résultats bien connus pour des fonctions sur l'intervalle [0,1], cf. [29], [30].

§ 7. REMARQUES DIVERSES.

Théorème 7.1 : Soit (T,d) un espace pseudo-métrique vérifiant la propriété $\mathcal{K}(p)$ introduite au théorème 1.9. On a alors :

a) Si $p \geq 2$, tout processus $(X_t)_{t\in T}$ vérifiant (1.2) vérifie le théorème limite central et la loi du logarithme itéré sur C(T).

b) Soit E un espace de Banach ; tout processus $(X_t)_{t\in T} \subset L^p(E)$ (formé de variables aléatoires à valeurs dans E) tel que :

(7.1) $\forall\ t,s \in T$ $\qquad (\mathbb{E}\, \|X_t - X_s\|_E^p)^{1/p} \leq d(t,s)$

admet une version à trajectoires bornées et vérifie :

$$\mathbb{E} \sup_{t,s} \|X_t - X_s\|^p < \infty \ .$$

Indications sur la démonstration : La démonstration de a) est une conséquence facile de résultats connus (utiliser la proposition 5.4, le théorème de factorisation de Pietsch, cf. [41], ainsi que les résultats connus sur les théorèmes limites pour les variables aléatoires à valeurs dans les espaces de Banach de type 2 ; cf. [22] et l'exposé No 3 du séminaire Maurey-Schwartz 1975-76).

La démonstration de b) est facile à partir de la proposition 5.4 et de la proposition 2 de l'exposé No 1 de Maurey dans [42]. Signalons que si $p > 1$ et si l'on suppose de plus que E est réflexif, on peut conclure, dans b), que le processus (X_t) admet une version à trajectoires continues (cf. le théorème 2 de l'exposé No 2 de Maurey dans [42]).

Seconde démonstration du théorème 1.9 : Soit (T,d) tel que $\int_0 N_d(T,d)^{1/p}\, d\varepsilon < \infty$ et soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus vérifiant (1.2) sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On peut évidemment supposer que $\mathcal{A}$ est dénombrablement engendrée. Soit $(\mathcal{A}_n)$ une suite croissante de sous-tribus finies de $\mathcal{A}$ telles que $\bigcup_n \mathcal{A}_n$ engendre $\mathcal{A}$.

Posons $$Y_t^n = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{A}_n)$$

et $$Z_t^n = X_t - Y_t^n \quad .$$

Par le théorème de convergence des martingales, on sait que :

$$\forall\, t \in T \qquad \|Y_t^n - X_t\|_p \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n\to\infty \quad .$$

Posons $$D_n = \sup_{t,s\in T} \|Z_t^n - Z_s^n\|_p \quad .$$

Puisque l'ensemble $\{X_t \mid t\in T\}$ est relativement compact dans $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, on a nécessairement :

(7.2) $$\lim_{n\to\infty} D_n = 0 \quad .$$

Remarquons que $\|Z_t^n - Z_s^n\|_p \le 2\,\|X_t - X_s\|_p \le 2\, d(t,s)$,
et

(7.3) $$\|Y_t^n - Y_s^n\|_p \le d(t,s) \quad .$$

On a donc, d'après (5.2), pour toute partie finie $S\subset T$:

(7.4) $$\Big\| \sup_{t,s\in S} |Z_t^n - Z_s^n| \Big\|_p \le 2\, C_p'' \int_0^{D_n} N_d(T,\varepsilon)^{1/p}\, d\varepsilon \quad .$$

Or, puisque $\mathcal{A}_n$ est finie, le processus Y_t^n a ses trajectoires p.s. continues (cela résulte de (7.3)). D'après (7.2) et (7.4) on voit que (modulo les constantes) le processus (Y_t^n) converge vers (X_t) dans l'espace $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}\,;\, C(T))$; il en résulte donc que (X_t) lui-même admet une version à trajectoires continues.

On peut aussi mettre au point un argument (légèrement différent) adapté au cas des processus vérifiant (1.1). Nous le laissons au lecteur.

Remarque 7.2 : La démonstration précédente s'étend sans difficulté au cas de processus (X_t) à valeurs dans un espace de Banach E : si $\mathcal{E}_p(T,d) < \infty$, tout processus (X_t) vérifiant (7.1) admet une version à trajectoires continues dans E (pour la norme de E).
On peut aussi traiter le cas de Λ_p au lieu de L^p.

Remarque 7.3 : Pour finir nous voudrions reformuler le problème présenté à la fin du § 1 en termes d'analyse harmonique ; il s'agit en fait, dans les cas $p = 2$ et $K = G$ de savoir si la généralisation du théorème de Bernstein donnée au § 4 admet une réciproque :

Problème : Soit G un groupe compact et soit $f \in L^2(G)$. On suppose que $f \in A(G)$ et de plus que toute fonction g dans $L^2(G)$ telle que

$$\forall\, t \in G \qquad \|g_t - g\|_2 \le \|f_t - f\|_2$$

est elle aussi dans A(G).
La fonction f doit-elle alors nécessairement vérifier

$$\int_0^1 \frac{\bar{\omega}_2(f,t)}{t^{3/2}}\, dt < \infty \qquad ?$$

Il est facile de voir que f doit vérifier :

$$\sup_{0<t<1} t^{1/2}\, \bar{\omega}_2(f,t) < \infty \quad .$$

Il serait sans doute intéressant de comparer la classe des fonctions f ayant la propriété ci-dessus avec celle des fonctions de A(G) sur lesquelles toute fonction lipschitzienne d'ordre 1 opère.

***

Pour la commodité du lecteur, nous avons inclus dans la bibliographie un certain nombre d'articles qui ne sont pas cités dans le texte, mais qui traitent de sujets en rapport avec cet exposé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Assouad : Factorisation des applications Λ_p-sommantes, Séminaire Maurey-Schwartz 1973-74, exposé No 11.

[2] P. Boulicaut : Fonctions de Young et continuité des trajectoires d'une fonction aléatoire, Annales de l'Institut Fourier, 24, 2 (1974), 27-47.

[3] B. Carl : Entropy numbers, s-numbers and eigenvalue problems, à paraître.

[4] B. Carl et H. Triebel : Inequalities between eigenvalues, entropy numbers and related quantities of compact operators in Banach spaces, à paraître.

[5] K.M. Chong et N.M. Rice : Equimeasurable rearrangements of functions, Queens Papers in Pure and Applied Maths. No 28, Queens Univetsity 1971.

[6] P. De Land : Moduli of continuity for exponential Lipschitz classes, TAMS 229 (1977) 175-189.

[7] J. Delporte : Fonctions aléatoires presque sûrement continues sur un intervalle fermé, Ann. Inst. H. Poincaré Sér. B 1 (1964), 111-215.

[8] R.M. Dudley : Sample functions of the Gaussian process, Annals of Probability 1 (1973) 66-103.

[9] R.M. Dudley : The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes, J. Functional. Analysis 1 (1967) 290-330.

[10] N. Dunford, J. Schwartz : Linear operators, Part II, Wiley Interscience 1963.

[11] X. Fernique : Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes, Ecole d'Eté de Saint Flour (1974), Springer Lecture Notes in Maths. No 480.

[12] X. Fernique : Continuité des processus gaussiens, C. R. Acad. Sc. Paris, A 258 (1964) 6058-6060.

[13] A. Garsia : A remarkable inequality and the uniform convergence of Fourier series, Indiana Univ. Math. Journal 25 (1976) 85-102.

[14] A.M. Garsia et E. Rodemich : Monotonicity of certain functionals under rearrangement, Annales de l'Institut Fourier 24, 2 (1974), 67-116.

[15] A. Garsia, E. Rodemich et H. Rumsey Jr. : A real variable lemma and the continuity of paths of Gaussian processes, Indiana Univ. Math. Journal 20 (1970) 565-578.

[16] A. Garsia : Combinatorial inequalities and smoothness of functions, Bull. A.M.S. 82 (1976) 157-170.

[17] M.G. Hahn : Central limit theorems for D([0,1])-valued random variables, Ph. D Thesis, M.I.T. Cambridge 1975.

[18] M.G. Hahn : Conditions for sample continuity and the central limit theorem, Annals of Probability 5 (1977) 351-360.

[19] M.G. Hahn : A note on the central limit theorem of square integrable processes, Proc. A.M.S. 64 (1977) 331-334.

[20] M.G. Hahn et M.J. Klass : Sample continuity of square integrable processes, Annals of Probability 5 (1977) 361-370.

[21] C.S. Herz : Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transform, J. Math. Mech. 18 (1968) 283-324.

[22] J. Hoffmann-Jørgensen et G. Pisier : The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces, Annals of Probability 4 (1976) 587-599.

[23] I. Ibragimov : Properties of sample functions for stochastic processes and embedding theorems, Theory of Probability and its Appl. 18 (1973) 442-453.

[24] I. Ibragimov : Sur la régularité des trajectoires des fonctions aléatoires, C. R. Acad. Sc. Paris A 289 (1979) 545-547.

[25] N. Jain et M.B. Marcus : Sufficient conditions for the continuity of stationary Gaussian processes and applications to random series series of functions, Annales Inst. Fourier 24, 2 (1974) 117-141.

[26] J.P. Kahane : Séries de Fourier absolument convergentes, Springer Verlag (1970), Ergebnisse Band 50.

[27] N. Kôno : Best possibility of an integral test for sample continuity of L_p-processes ($p \geq 2$), Proc. Japan Acad. 54 ser. A (1978) 197-201.

[28] M. Loeve : Probability theory, Van Nostrand, 3ème édition, 1963.

[29] G.G. Lorentz : Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, New-York 1966.

[30] G.G. Lorentz : Metric entropy and approximation, Bull. A.M.S. 72 (1966) 903-937.

[31] M.B. Marcus et G. Pisier : Random Fourier series with applications to harmonic analysis, preprint.

[32] M.B. Marcus et L.A. Shepp : Sample behavior of Gaussian processes, Sixth Berkeley Symposium (1970) p. 423-441.

[33] M.B. Marcus et L.A. Shepp : Continuity of Gaussian processes, Trans. A.M.S. 151 (1970) 377-391.

[34] C. Nanopoulos et P. Nobelis : Etude de la régularité et des propriétés limites des fonctions aléatoires définies sur $[0,1]^n$, de type puissance. C. R. Acad. Sc. Paris A 285 (1977) 273-276.

[35] C. Nanopoulos et P. Nobelis : Etude de la régularité des fonctions aléatoires et de leurs propriétés limites, Thèse de 3ème cycle (1977) Université de Strasbourg.

[36] T.W. Park : Sobolev type inequalities and path continuity of L_p processes with multidimensional time parameter, Ph. D. Thesis.

[37] A. Pietsch : Operator ideals, Berlin, 1978.

[38] A. Pietsch : Weyl numbers and eigenvalues of operators in Banach spaces, Math. Annalen (1980).

[39] C. Preston : Banach spaces arising from some integral inequalities, Indiana University Math. Journal 20 (1971) 997-1015.

[40] C. Preston : Continuity properties of some Gaussian processes, Annals of Math. Stat. 43 (1972) 285-292.

[41] Séminaire L. Schwartz sur les applications radonifiantes 1969-70, Ecole Polytechnique, Paris.

[42] Séminaire Maurey-Schwartz 1973-74, Ecole Polytechnique, Paris.

[43] J.H. Wells et L.R. Williams : Embeddings and extensions in analysis, Springer Verlag (1975), Ergebnisse Band 84.
