SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

Estimations des distances à un espace euclidien et des constantes de projection des espaces de Banach de dimension finie ; d'après H. König et al.

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. nº 10, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A9_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

ESTIMATIONS DES DISTANCES À UN ESPACE EUCLIDIEN ET DES CONSTANTES DE PROJECTION DES ESPACES DE BANACH DE DIMENSION FINIE ; d'après H. König et al.

G. PISIER

Exposé No X

1er Décembre 1978

PLAN :

§ 1. Rappels sur les opérateurs linéaires.

§ 2. Rappels sur les notions de type et cotype.

§ 3. Les estimations nouvelles (cf. [5], [18]).

§ 4. Applications aux sous-espaces de dimension finie.

INTRODUCTION

Dans cet exposé, nous présentons en détail certaines conséquences de résultats récents dûs à H. König dont nous avons eu connaissance par [5]. Le lecteur pourra se reporter à [18] pour plus de précisions. Nous avons eu aussi connaissance de résultats de T. Figiel et N. Tomczak-Jaegermann [3] d'une part, de W. Johnson et V. Milman d'autre part. Une partie de leurs résultats peut s'obtenir (voir § 4) en appliquant la méthode de [5], [18]. On obtient aussi des améliorations de certains résultats de [9]. Signalons enfin, que le cas des espaces L_p qui est à l'origine de tous ces développements récents est traité dans [7].

Notre exposé est presque "self-contained" ; pratiquement, le seul résultat utilisé sans démonstration est le théorème de factorisation de Pietsch. Nous nous sommes efforcés de rendre la rédaction accessible au lecteur qui ne connaît pas la théorie de la dualité des idéaux d'opérateurs, quitte à rallonger de quelques lignes certaines démonstrations.

Notations générales : Dans tout l'exposé, les lettres X, Y, Z désigneront des espaces de Banach sur les corps des réels. L'extension au cas complexe sera toujours évidente. Si $u : X \to Y$ est un opérateur borné, on notera $u' : Y' \to X'$ l'opérateur adjoint de u.

*
* *
*

§ 1. RAPPELS SUR LES OPERATEURS LINEAIRES.

Soient p, $q > 0$.

Un opérateur $u : X \to Y$ est dit (p,q)-sommant s'il existe une constante C telle que $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\forall\, (x_1,\dots,x_m) \in X$

$$(\Sigma \|u(x_i)\|^p)^{1/p} \le C \sup\{(\Sigma\, |\xi(x_i)|^q)^{1/q} \mid \xi \in X' \ \|\xi\| \le 1\} \quad .$$

On note $\pi_{p,q}(u)$ la plus petite constante C ayant la propriété précédente. Dans le cas $p = q$, on dit simplement que u est p-sommant et on pose $\pi_p(u) = \pi_{p,p}(u)$. Ces classes d'opérateurs sont des idéaux d'opérateurs : pour $w : W \to Z$, $v : Z \to X$, $u : X \to Y$, on a

$$\pi_{p,q}(uvw) \le \|u\| \ \pi_{p,q}(v) \ \|w\| \quad .$$

Les résultats de cet exposé peuvent être considérés comme des raffinements du résultat fondamental suivant :

Théorème 1.1 [4] : Soit X un espace de Banach de dimension n. On a $\pi_2(Id_X) = \sqrt{n}$ (où l'on a noté Id_X l'opérateur identité sur X).

Indiquons brièvement la

Démonstration (Kwapień) : Pour voir que $\pi_2(u) \le \sqrt{n}$, il s'agit de démontrer que : $\forall\, u : \ell^2_m \to X$, on a

$$\pi_2(u) \le \sqrt{n}\ \|u\| \quad .$$

Comme $u : \ell^2_m \to X$ se factorise en $u : \ell^2_m \xrightarrow{P} \ell^2_n \xrightarrow{\tilde{u}} X$ avec $\|P\|\ \|\tilde{u}\| \le \|u\|$, on est ramené au cas où $m = n$. Dans ce cas, d'après la propriété d'idéal il suffit de montrer que

$$\pi_2(Id_{\ell^2_n}) \le \sqrt{n} \quad .$$

Or cela se démontre facilement à l'aide de la formule intégrale suivante (facile à vérifier) :

$$\forall\, x \in \ell^2_n \qquad \|x\|_{\ell^2_n} = \sqrt{n}\ \left(\int |<\xi,x>|^2\ d\sigma(\xi)\right)^{1/2} \quad ,$$

où σ est la mesure de surface normalisée sur la sphère unité de ℓ_n^2.

L'inégalité inverse (que nous n'utiliserons pas ici) est moins élémentaire, elle utilise le fait (cf. [16]) que le composé vu de deux opérateurs 2-sommants $u : X \to Y$, $v : Y \to Z$ est nucléaire, et la norme nucléaire $\|vu\|_N$ vérifie

$$\|vu\|_N \leq \pi_2(v)\ \pi_2(u) \quad .$$

On a donc

$$n = \operatorname{tr} Id_X \leq \|Id_X\|_N \leq \pi_2(Id_X)\ \pi_2(Id_X) \quad ,$$

d'où

$$\pi_2(Id_X) \geq \sqrt{n} \quad .$$

L'un des résultats les plus importants sur les opérateurs sommants est le théorème de factorisation de Pietsch :

<u>Théorème 1.2</u> : Soient X, Y deux espaces de Banach. Soit $u : X \to Y$ un opérateur linéaire. Alors : $\pi_p(u) \leq C$ si et seulement si il existe une mesure de probabilité λ sur la boule unité de X' (notée $B_{X'}$) munie de la topologie $\sigma(X',X)$, telle que :

$$\forall\ x \in X \qquad \|u(x)\| \leq C \left(\int |\langle\xi,x\rangle|^p \, d\lambda(\xi)\right)^{1/p} \quad .$$

Pour la démonstration, se reporter à [10] ou [17].

L'inégalité précédente (1) traduit un théorème de factorisation. Dans le cas $p = 2$, cette factorisation est particulièrement simple, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& C(B_{X'}) \arrow[r, "j"] & L^\infty(\lambda) \arrow[r, "k"] & L^2(\lambda) \arrow[dr, "\tilde{u}"] & \\
X \arrow[ur, "i"] \arrow[rrrr, "u"] & & & & Y
\end{tikzcd}$$

où i,j,k sont les injections naturelles et $\|\tilde{u}\| \leq C$.

<u>Notations 1.1</u> : Soient X, Y deux espaces et $u : X \to Y$ un opérateur borné.

On notera $\gamma_2(u)$ la "norme de factorisation par un Hilbert" de u, c'est-à-dire :

$$\gamma_2(u) = \inf\{\|v\| \, \|w\|\} \quad ,$$

où l'infimum est relatif à toutes les factorisations de u de la forme $X \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} Y$ où H est un Hilbert et v, w sont des opérateurs linéaires bornés.

D'autre part, rappelons que si X et Y sont isomorphes on pose $d(X,Y) = \inf\{\|T\| \, \|T^{-1}\|\}$, la borne inférieure étant prise sur tous les isomorphismes $T : X \to Y$; c'est la "distance de Banach-Mazur".

<u>Corollaire 1.1</u> : Soit Z un espace de Banach et $X \subset Z$ un sous-espace de dimension n. Alors il existe une projection $P : Z \to X$ telle que

$$\gamma_2(P) \leq \sqrt{n} \quad .$$

En particulier $\qquad d(X,\ell_n^2) \leq \sqrt{n}$ et $\|P\| \leq \sqrt{n}$.

<u>Démonstration</u> : D'après ce qui précède l'identité de X se factorise de la façon suivante : $Id_X = ABC$

$$\begin{array}{l} \qquad\quad Z \\ \qquad\quad \cup \\ Id_X : X \xrightarrow{C} L^\infty(\lambda) \xrightarrow{B} L^2(\lambda) \xrightarrow{A} X \end{array} \quad ,$$

où λ est une probabilité sur $(B_{X'}, \sigma(X',X))$, où B est l'injection naturelle et $\|C\| \leq 1$, $\|A\| \leq \sqrt{n}$.

Par la propriété d'extension de l'espace $L^\infty(\lambda)$, il existe un plongement de C, noté $\tilde{C}$, de Z dans $L^\infty(\lambda)$ avec $\|\tilde{C}\| \leq 1$. L'opérateur $P = AB\tilde{C}$ a alors les propriétés de l'énoncé.

En général, l'estimation du corollaire précédent ne peut être améliorée : par exemple, on sait que $d(\ell_n^\infty, \ell_n^2) = d(\ell_n^1, \ell_n^2) = \sqrt{n}$. Par contre, si d'une certaine manière on exclut ces cas extrêmes -par exemple en supposant Z uniformément convexe- alors on peut s'attendre à de meilleures estimations, c'est-à-dire étant donné $X \subset Z$ de dimension n on peut chercher à trouver une projection $P : Z \to X$ avec $\gamma_2(P) \leq Cn^\alpha$ pour une constante C et $\alpha < 1/2$.

C'est le sujet du présent exposé.

Dans toutes ces questions, la théorie de la dualité des idéaux d'opérateurs (en particulier pour l'idéal des opérateurs qui se factorisent par un Hilbert) joue un rôle important. En effet, les "factorisations" sont obtenues le plus souvent en appliquant le théorème de Hahn-Banach dans un certain espace d'opérateurs, d'où la nécessité de savoir identifier le dual. Pour éviter au lecteur de recourir à des applications répétées de cette théorie, nous avons choisi de présenter les résultats à partir d'une version (due à Maurey [11]) d'un théorème de factorisation de Lindenstrauss-Pełczynski ([10]). Bien entendu, pour les spécialistes cela revient au même.

Introduisons tout d'abord une notation supplémentaire :

Notation 1.2 : Soit $(x_i)_{i\le k}$, $(y_j)_{j\le m}$ deux suites finies dans un espace de Banach X. On notera $(x_i)_{i\le k} \prec (y_j)_{j\le m}$ si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall\ \xi \in X' \qquad \sum_{i=1}^{k} |\xi(x_i)|^2 \le \sum_{j=1}^{m} |\xi(y_j)|^2 .$$

Remarque 1.1 : On a $(x_i)_{i\le k} \prec (y_j)_{j\le m}$ si et seulement si il existe une matrice scalaire $(a_{ij})_{\substack{i\le k\\ j\le m}}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$(1.1) \qquad \sum_{i=1}^{k} \left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,\alpha_j\right|^2 \le \sum_{1}^{m} |\alpha_j|^2 \qquad \forall\ (\alpha_j) \in \mathbb{R}^m$$

$$(1.2) \qquad x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, y_j .$$

La démonstration facile est laissée au lecteur.

Notre outil principal pour obtenir des raffinements du corollaire 1.1 sera le

Théorème 1.3 [11] : Soient X, Z deux espaces de Banach, Y un sous-espace de X, et soit u un opérateur borné de Y dans Z. Les propriétés suivantes sont équivalentes (C est une constante ≥ 1) :

i) il existe une extension de u, notée $\tilde{u} : X \to Z$ telle que $\gamma_2(\tilde{u}) \le C$.

ii) pour toutes suites finies $(y_i)_{i\le k}$ et $(z_j)_{j\le m}$ dans X, avec $\{y_1,\dots,y_k\} \subset Y$, on a :

$$(y_i)_{i\le k} \prec (z_j)_{j\le m} \Longrightarrow \sum_{1}^{k} \|u(y_i)\|^2 \le C^2 \sum_{1}^{m} \|z_j\|^2 .$$

Démonstration : L'implication i) $\rightarrow$ ii) est facile et laissée au lecteur. Montrons ii) $\Rightarrow$ i) (nous reproduisons l'argument de [11] pour la commodité du lecteur) : par un argument standard de compacité, on se ramène au cas où X est de dimension finie. (On peut obtenir le cas général par exemple par la technique des ultraproduits.)
On pose $\forall\ x \in X$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \|u(x)\| & \text{si } x \in Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Posons $K = \{\xi \in X' \ ; \ \|\xi\| = 1\}$. Définissons pour $x \in X$ une fonction continue f_x sur le compact K par $f_x(\xi) = \langle x,\xi\rangle$. Désignons par C_1 l'enveloppe convexe de $\{|f_y|^2 \ ; \ \varphi(y) \geq 1\}$ et par C_2 l'enveloppe convexe de $\{|f_x|^2 \ ; \ \|x\| \leq 1/C\}$. Posons ensuite

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\rho>1} (\rho\, C_1 - C_2) \quad .$$

Il résulte de ii) que toute fonction $g \in \mathcal{C}$ a un maximum ≥ 0 sur K. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une mesure positive non nulle μ sur K telle que l'on ait $\mu(g) \geq 0$, $\forall\ g \in \mathcal{C}$, ce qui implique :

$$\forall\ x,y \in X \quad \varphi(y) \geq 1 \ , \quad \|x\| \leq 1/C \Longrightarrow \int |f_x|^2\, d\mu \leq \int |f_y|^2\, d\mu \quad .$$

Posons $\gamma = \inf\{\int |f_y|^2\, d\mu \ ; \ \varphi(y) \geq 1\}^{1/2}$. On voit que $\gamma \neq 0$, sinon $\int |f_x|^2\, d\mu = 0 \ \ \forall\ x \in X$, ce qui est impossible puisque μ est non nulle.

On peut donc définir $w : X \rightarrow L^2(\mu)$ par :

$$w(x) = \frac{1}{\gamma} f_x$$

et on vérifie que

$$(1.3) \quad \forall\ x \in X \qquad \varphi(x) \leq \|w(x)\|_{L^2(\mu)} \leq C\|x\| \quad .$$

Soit alors H l'espace engendré par $w(Y)$ dans $L^2(\mu)$ et soit $P : L^2(\mu) \rightarrow H$ la projection sur H. On peut définir $B : w(Y) \rightarrow Z$ par

$$\forall\ y \in Y \qquad B(w(y)) = u(y) \quad ;$$

d'après (1.3), cette définition a bien un sens et B s'étend en un opérateur $\overline{B} : H \to Z$ tel que $\|\overline{B}\| \leq 1$. L'opérateur $\tilde{u} = \overline{B}Pw$ est une extension de u et il est clair que $\gamma_2(\tilde{u}) \leq C$.

§ 2. RAPPELS SUR LES NOTIONS DE TYPE ET COTYPE.

On notera (dans toute la suite) $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; on supposera de plus que : $\mathbb{E}\,|g_n|^2 = 1$, $\forall\, n \geq 1$.

<u>Définition 2.1</u> : Soient Y, Z deux espaces de Banach et $u : Y \to Z$ un opérateur.

i) On dit que u est de type p $(1 < p \leq 2)$ s'il existe une constante C telle que : $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\forall\, \{x_1, \ldots, x_m\} \subset Y$

$$(\mathbb{E}\,\|\sum_1^m g_i\, u(x_i)\|^2)^{1/2} \leq C(\sum \|x_i\|^p)^{1/p} .$$

On notera $T_p(u)$ la plus petite constante C ayant cette propriété.

ii) On dit que u est de cotype q $(2 \leq q < \infty)$ s'il existe une constante C telle que : $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\forall\, \{x_1, \ldots, x_m\} \subset Y$,

$$(\sum \|u(x_i)\|^q)^{1/q} \leq C(\mathbb{E}\,\|\sum_1^m g_i\, x_i\|^2)^{1/2} .$$

On notera $C_q(u)$ la plus petite des constantes C ayant cette propriété. On dit qu'un espace de Banach X est de type p (resp. de cotype q) si l'opérateur identité sur X est de type p (resp. de cotype q). Dans ce cas, on écrira simplement $T_p(X)$ et $C_q(X)$ au lieu de $T_p(Id_X)$ et $C_q(Id_X)$.

La proposition simple suivante jouera un rôle important.

<u>Proposition 2.1</u> (cf. [12]) : Soit $(x_i)_{i\leq k}$, $(y_j)_{j\leq m}$ des éléments d'un espace X. Si $(x_i)_{i\leq k} \prec (y_j)_{j\leq m}$, alors nécessairement :

$$\mathbb{E}\,\|\sum_1^k g_i\, x_i\|^2 \leq \mathbb{E}\,\|\sum_1^m g_j\, y_j\|^2 .$$

<u>Démonstration</u> : On se ramène trivialement au cas où $k = m$. D'après la remarque 1.1, il suffit de vérifier que :

$$\mathbb{E}\,\|\sum_1^m G_j\, y_j\|^2 \leq \mathbb{E}\,\|\sum_1^m g_j\, y_j\|^2 \tag{2.1}$$

où l'on a posé $G_j = \sum_{i=1}^{k} g_i \, a_{ij}$ et (a_{ij}) vérifie (1.1). Soit K l'ensemble des matrices vérifiant (1.1). Par un argument de convexité, on voit qu'il suffit de démontrer (2.1) quand (a_{ij}) est un point extrémal de K, c'est-à-dire quand (a_{ij}) est une matrice orthogonale. Or, dans ce cas, (2.1) est évidemment vrai puisque $(G_1,\dots,G_m)$, a alors la même distribution que $(g_1,\dots,g_m)$, d'après l'invariance par rotation des mesures gaussiennes canoniques.

Le lien avec les opérateurs sommants se fait par la proposition suivante, variante du théorème 2 de [12].

<u>Proposition 2.2</u> : Soit $u : Y \to Z$ un opérateur entre deux espaces de Banach Y, Z.
u est de cotype q si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que :
$\forall\, v : \ell_m^2 \to Y$, on a

$$\pi_{q,2}(uv) \le \lambda (\mathbb{E} \| \sum_{j=1}^{m} g_j \, v(e_j) \|^2)^{1/2} .$$

La norme $C_q(u)$ coïncide alors avec la borne inférieure des constantes λ ayant la propriété ci-dessus.

<u>Démonstration</u> : <u>La partie "si" est facile</u> : étant donné $x_1,\dots,x_m$ dans Y, on définit v par $v(e_j) = x_j$. On a alors

$$(\sum \|u(x_j)\|^q)^{1/q} = (\sum \|uv(e_j)\|^q)^{1/q} \le \pi_{q,2}(uv)$$
$$\le \lambda (\mathbb{E} \|\sum_1^m g_j \, x_j\|^2)^{1/2} .$$

Donc $C_q(u) \le \lambda$.

<u>Démontrons la partie "seulement si"</u> : supposons u de cotype q. Soit $v : \ell_m^2 \to Y$ et soit $(x_1,\dots x_k)$ dans ℓ_m^2. Posons

$$\alpha = \sup\{ (\sum_{i=1}^{k} |\xi(x_i)|^2)^{1/2} \mid \|\xi\|_{\ell_m^2} \le 1\} .$$

On a alors : $$(x_i)_{i\le k} \prec (\alpha \, e_j)_{j\le m} .$$

A fortiori : $$(vx_i)_{i\le k} \prec (\alpha \, v(e_j))_{j\le m} .$$

On a : $$(\sum \|uv(x_i)\|^q)^{1/q} \le C_q(u) (\mathbb{E} \|\sum g_i \, v(x_i)\|^2)^{1/2}$$

donc (cf. prop. 2.1) : $$\le \alpha \, C_q(u) (\mathbb{E} \|\sum g_j \, v(e_j)\|^2)^{1/2} ;$$

on conclut bien que

$$\pi_{q,2}(uv) \leq C_q(u)(\mathbb{E}\|\Sigma\, g_j\, v(e_j)\|^2)^{1/2} \quad .$$

Le résultat analogue pour le type nécessite une dualisation.

Notation 2.1 : Soit $m \in \mathbb{N}$. On notera $G_m(X)$ l'espace X^m muni de la norme

$$(x_1,\ldots,x_m) \longrightarrow (\mathbb{E}\|\sum_1^m g_j\, x_j\|^2)^{1/2} \quad .$$

Nous aurons besoin de considérer le dual $G_m(X)'$ de $G_m(X)$. Pour cela, on posera pour toute suite finie $\xi_1,\ldots,\xi_m$ dans X'

$$g^*(\xi_1,\ldots,\xi_m) = \sup\{\sum_1^m \langle \xi_i, x_i\rangle\} \quad ,$$

où le supremum porte sur toutes les suites $x_1,\ldots,x_m$ dans X telles que $\mathbb{E}\|\sum_1^m g_j\, x_j\|^2 \leq 1$. L'espace X'^m muni de la norme g^* s'identifie alors au dual de $G_m(X)$.

La proposition suivante dualise la proposition 2.1 :

Proposition 2.3 : Soit X un espace de Banach. Soit $(\xi_j)_{j\leq m}$ et $(\eta_i)_{i\leq k}$ des éléments de X'.
Si $(\xi_j)_{j\leq m} \prec (\eta_i)_{i\leq k}$, alors nécessairement

$$g^*(\xi_1,\ldots,\xi_m) \leq g^*(\eta_1,\ldots,\eta_k) \quad .$$

Démonstration : Etant donné une matrice scalaire (a_{ij}) vérifiant (1.1), on peut définir un opérateur $A : G_m(X) \to G_k(X)$ par :

$$A((x_1,\ldots,x_m)) = (\sum_j a_{1j}\, x_j,\ldots,\sum_j a_{kj}\, x_j) \quad .$$

La proposition 2.1 exprime le fait que $\|A\| \leq 1$. Par conséquent, le transposé $A' : G_k(X)' \to G_m(X)'$ est aussi de norme ≤ 1. D'où :
$\forall\, (\eta_i)_{i\leq k} \in X'^k$

$$g^*(\sum_i a_{i1}\, \eta_i \,,\ldots, \sum_i a_{im}\, \eta_i) \leq g^*(\eta_1,\ldots,\eta_k) \quad .$$

Il suffit alors d'appliquer la remarque 1.1 pour conclure la démonstration.

Remarque 2.1 : Soit $u : Y \to Z$ un opérateur. Soit $m \in \mathbb{N}$. Définissons $\bar{u} : \ell^p_m(Y) \to G_m(Y)$ par $\bar{u}((y_1,\dots,y_m)) = (uy_1,\dots,uy_m)$. Il est clair que $\|\bar{u}\| = \|(\bar{u})'\|$, par conséquent la constante de type p de u est caractérisée par : $\forall\, m$, $\forall\, (z'_1,\dots,z'_m) \subset Z'$

$$(\Sigma \|u'(z'_j)\|^{p'})^{1/p'} \leq T_p(u)\ g^*(z'_1,\dots,z'_m) \quad .$$

Proposition 2.4 : Soit $u : Y \to Z$. L'opérateur u est de type p si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que : $\forall\, v : \ell^2_m \to Z'$ on a

$$\pi_{p',2}(u'v) \leq \lambda\ g^*(v(e_1),\dots,v(e_m)) \quad ,$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. La norme $T_p(u)$ coïncide alors avec la borne inférieure des constantes λ ayant cette propriété.

Démonstration : En utilisant la remarque 2.1 et la proposition 2.3, on démontre ce résultat exactement comme la proposition 2.2.

§ 3. LES ESTIMATIONS NOUVELLES (cf. [5], [18]).

Pour les applications qui suivent, le résultat suivant est essentiel ; les estimations que l'on obtient par la méthode de [2] (cf. [2] theorem 6.3) donnent seulement $(n^2)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}$ au lieu de $n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}$.

Théorème 3.1 : Soit $u : \ell^2_n \to X$. On a :

$$\forall\, q > 2 \qquad \pi_2(u) \leq K_q\ n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\ \pi_{q,2}(u) \quad ,$$

où K_q est une constante ne dépendant que de q.
(Le résultat est trivial si $q = 2$, et nous poserons toujours dans la suite $K_2 = 1$).

La démonstration repose sur la proposition suivante, inspirée du lemme 2 de [8] :

<u>Proposition 3.1</u> : Soit $u : \ell_n^2 \to X$. On définit les nombres d'approximation de u par :

$$\forall\, j = 1,2,\dots,n \qquad a_j(u) = \inf\{\|u - uP\|\} \quad ,$$

où l'infimum porte sur tous les projecteurs orthogonaux P de rang $< j$ sur ℓ_n^2. On a alors :

$$\forall\, q \geq 2 \qquad (\sum_1^n a_j(u)^q)^{1/q} \leq \pi_{q,2}(u) \quad .$$

<u>Démonstration</u> : On peut construire une suite $x_1,\dots,x_n$ orthonormale dans ℓ_n^2 et telle que

$$\|u(x_j)\| \geq a_j(u) \qquad \text{pour } j = 1,\dots,n \quad .$$

Montrons-le par récurrence. Puisque $a_1(u) = \|u\|$, $\exists\, x_1 \in \ell_n^2$ tel que $\|x_1\| = 1$ et $\|u(x_1)\| \geq a_1(u)$. Supposons que l'on a construit $x_1,\dots,x_k$ vecteurs orthonormaux dans ℓ_n^2 avec $k < n$ tels que $\|u(x_j)\| \geq a_j(u)$ pour $j = 1,\dots,k$. Soit P le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par $\{x_1,\dots,x_k\}$. On a :

$$\|u - uP\| \geq a_{k+1}(u) \quad ,$$

donc $\exists\, x'_{k+1} \in \ell_n^2$, $\|x'_{k+1}\| = 1$ et $\|(u - uP)x'_{k+1}\| \geq a_{k+1}(u)$. Il est alors clair que si

$$x_{k+1} = \frac{(I - P)x'_{k+1}}{\|(I - P)x'_{k+1}\|} \quad ,$$

l'hypothèse de récurrence est vérifiée à l'ordre k+1.
La proposition 3.1 est alors immédiate puisque : $\forall\, \xi \in \ell_n^2$

$$\sum_1^n |\langle \xi, x_j\rangle|^2 = (\|\xi\|_{\ell_n^2})^2 \quad ,$$

on a : $$(\sum_1^n a_j(u)^q)^{1/q} \leq (\sum_1^n \|u(x_j)\|^q)^{1/q} \leq \pi_{q,2}(u) \quad . \qquad \text{cqfd.}$$

Le lecteur notera que puisque $a_j(u)$ est une suite décroissante, on a a fortiori :

$$(3.1) \qquad a_j(u) \leq j^{-1/q}\, \pi_{q,2}(u) \qquad \forall\, j = 1,2,\dots,n \quad .$$

<u>Démonstration du théorème 3.1</u> : Il est clair qu'il suffit de le démontrer pour des entiers n de la forme $n = 2^N - 1$ avec $N \in \mathbb{N}$. On utilise une astuce classique (voir [15]) : par définition des nombres $a_{2^k}(u)$, il existe pour $k = 0,\dots,N$ un projecteur P_k tel que

$$\mathrm{rang}(P_k) < 2^k$$

et

$$\|u - uP_k\| = a_{2^k}(u) \quad .$$

On peut écrire (noter que $a_{2^N}(u) = 0$, donc $u = uP_N$) :

$$u = \sum_{k=0}^{N-1} uP_{k+1} - uP_k \quad .$$

Soit Π_k le projecteur orthogonal sur le sous-espace $\mathrm{Ker}(P_{k+1} - P_k)^{\perp}$, de sorte que $(P_{k+1} - P_k)\Pi_k = P_{k+1} - P_k$. On peut écrire :

$$\pi_2(u) \le \sum_{k=0}^{N-1} \pi_2(uP_{k+1} - uP_k) \quad \text{, soit par la}$$

propriété d'idéal :

$$\le \sum_{k=0}^{N-1} \|uP_{k+1} - uP_k\| \; \pi_2(\Pi_k) \quad ,$$

d'où, d'après le choix des P_k et d'après le théorème 1.1 :

$$\le \sum_{0}^{N-1} (\|u - uP_k\| + \|u - uP_{k+1}\|)(\mathrm{rang}\ \Pi_k)^{1/2}$$

$$\le \sum_{0}^{N-1} 2a_{2^k}(u)\ [3.2^k]^{1/2} \quad ,$$

d'où, d'après (3.1) :

$$\le 2\sqrt{3} \sum_{0}^{N-1} 2^{-k/q}\ 2^{k/2}\ \pi_{q,2}(u)$$

soit finalement :

$$\le K_q\ n^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})}\ \pi_{q,2}(u)$$

où K_q est une constante ne dépendant que de q.

<u>Remarque 3.1</u> : Posons, pour $u : X \to Y$ et pour $k \in \mathbb{N}$

$$\pi_{q,2}^{(k)}(u) = \sup\{(\sum_{1}^{k} \|u(x_i)\|^q)^{1/q}\} \quad ,$$

où le supremum porte sur tous les k-uples $(x_1,\dots,x_k)$ dans X tels que :

$$\sum_1^k |\xi(x_i)|^2 \le \|\xi\|^2 \qquad \forall\, \xi \in X' \quad .$$

C'est la même définition que la norme (q,2)-sommante usuelle mais restreinte aux k-uples. La démonstration de la proposition 3.1 établit en fait l'inégalité plus fine :

$$(3.2) \quad \forall\, u : \ell_n^2 \to X \qquad \left(\sum_1^k a_j(u)^q\right)^{1/q} \le \pi_{q,2}^{(k)}(u) \qquad \forall\, k=1,2,\dots \; , \; \forall\, q \ge 2 \, .$$

De même, la démonstration du théorème 3.1 montre en fait :

$$(3.3) \qquad \pi_2(u) \le K_q \; \pi_{q,2}^{(n)}(u) \qquad \forall\, q > 2 \quad .$$

Remarque 3.2 : On peut voir facilement par interpolation à partir du théorème 1.1 que pour tout espace X de dimension n et tout $r > 2$

$$(3.4) \qquad \pi_{r,2}(Id_X) \le n^{1/r} \quad .$$

En utilisant cette estimation (au lieu du théorème 1.1) dans la démonstration du théorème 3.1, on trouve : si $2 \le r < q < \infty$, il existe une constante $K_{q,r}$ telle que, pour tout espace X,

$$\forall\, u : \ell_n^2 \to X \qquad \pi_{r,2}(u) \le K_{q,r}\, n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \; \pi_{q,2}^{(n)}(u) \quad .$$

Remarque 3.3 : On peut aussi chercher à majorer $\pi_{q,2}(u)$ en fonction de $\pi_{q,2}^{(n)}(u)$. Si l'on reprend la situation du théorème 3.1, on a :

$$\begin{aligned} \pi_{q,2}(u) &\le \sum_{k=0}^{N-1} \|uP_{k+1} - uP_k\| \; \pi_{q,2}(\Pi_k) \quad , \text{ soit d'après (3.4) :} \\ &\le \sum_0^{N-1} 2a_{2^k}(u) \; (3.2^k)^{1/q} \quad , \end{aligned}$$

et en utilisant (3.2) on en déduit : $\forall\, u : \ell_n^2 \to X$, $\forall\, q \ge 2$

$$\pi_{q,2}(u) \le K(\mathrm{Log}\; n)^{1/q'} \; \pi_{q,2}^{(n)}(u) \quad ,$$

où K est une constante numérique.

<u>Définition 3.1</u> : Pour tout opérateur $u : Y \to Z$ entre espaces de Banach, on pose, pour chaque $n = 1, \ldots$

$$C_q^n(u) = \mathrm{Sup}\left(\sum_1^n \|u(x_i)\|^q\right)^{1/q} ,$$

où le supremum porte sur les <u>n-uples</u> $\{x_1, \ldots, x_n\}$ dans Y tels que $\mathbb{E}\left\|\sum_1^n g_i\, x_i\right\|^2 \le 1$. On définit la constante $T_p^n(u)$ similairement à partir de la définition 2.1 en se restreignant aux n-uples.

En combinant les remarques précédentes avec les arguments utilisés pour les propositions 2.2 et 2.4, on obtient aisément le résultat suivant (que nous n'utiliserons pas dans la suite) :

<u>Proposition 3.2</u> : Soit $u : Y \to Z$ un opérateur de rang $\le n$.

i) Si $2 \le r < q < \infty$, $\quad C_r(u) \le K_{q,r}\, n^{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}\, C_q^n(u)$;

et si $\quad q \ge 2$, $\quad C_q(u) \le K(\mathrm{Log}\ n)^{1/q'}\, C_q^n(u)$.

ii) Si $1 < p < s \le 2$, $\quad T_s(u) \le K_{p',s'}\, n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{s}}\, T_p^n(u)$,

et si $\quad p \le 2$, $\quad T_p(u) \le K(\mathrm{Log}\ n)^{1/p'}\, T_p^n(u)$.

Cette proposition améliore les estimations données dans [2] ; nous ignorons si l'on peut supprimer les facteurs logarithmiques. Pour des résultats voisins, voir [1] [9].

<u>§ 4. APPLICATIONS AUX SOUS-ESPACES DE DIMENSION FINIE.</u>

Pour les applications nous utiliserons le lemme simple suivant sur les formes quadratiques :

<u>Lemme 4.1</u> : Soit $u : Y \to Z$ un opérateur de rang $\le n$. Pour toute suite finie $(y_j)_{j \le m}$ dans Y, il existe $(w_i)_{i \le n}$ et $(\tilde{y}_j)_{j \le m}$ dans Y tels que :

i) $(w_i)_{i \le n} \prec (y_j)_{j \le m}$.

ii) $(\tilde{y}_j)_{j \le m} \prec (w_i)_{i \le n}$ et $(w_i)_{i \le n} \prec (\tilde{y}_j)_{j \le m}$ (on notera alors $(w_i)_{i \le n} \sim (\tilde{y}_j)_{j \le m}$).

iii) $\tilde{y}_j - y_j \in \mathrm{Ker}\ u$.

<u>Démonstration</u> : Soit $v : \ell^2_m \to Y$ défini par $v(e_j) = y_j$. Soit $f_1, \dots, f_k$ une base orthonormale de $(\operatorname{Ker} u\, v)^{\perp}$; on a nécessairement $k \le \operatorname{rang}(uv) \le n$. Posons $w_i = v(f_i)$ pour $i \le k$ et $w_i = 0$ si $k < i \le n$. Il est clair que $(w_i)_{i\le n} \prec (y_j)_{j\le m}$.
Soit P la projection orthogonale de ℓ^2_m sur $(\operatorname{Ker} u\, v)^{\perp}$. On pose $\tilde{y}_j = v\, P\, e_j$. Le lecteur vérifiera sans peine les trois propriétés de l'énoncé.

<u>Proposition 4.1</u> : Soit $u : Y \to Z$ un opérateur de cotype q. Soient $(w_i)_{i\le n}$ et $(y_j)_{j\le m}$ dans Y. Si

$$(y_j)_{j\le m} \prec (w_i)_{i\le n} ,$$

alors : $$\Big(\sum_1^m \|u(y_j)\|^2\Big)^{1/2} \le K_q\, C_q(u)\, n^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \Big(\mathbb{E}\,\Big\|\sum_1^n g_i\, w_i\Big\|^2\Big)^{1/2} .$$

<u>Démonstration</u> : On définit $v : \ell^2_n \to Y$ par $v(e_i) = w_i$. D'après la proposition 2.2, on a :

$$\pi_{q,2}(uv) \le C_q(u)\Big(\mathbb{E}\,\Big\|\sum g_i\, w_i\Big\|^2\Big)^{1/2} .$$

D'après le théorème 3.1, $\pi_2(uv) \le K_q\, n^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\, \pi_{q,2}(uv)$. Soit $A : \ell^2_m \to \ell^2_n$ tel que $\|A\| \le 1$ et $v\, A\, e_j = y_j$ $(j \le m)$ (un tel A existe d'après la remarque 1.1). On a alors (par définition de $\pi_2(uv)$) :

$$\begin{aligned}\Big(\sum \|u\, y_j\|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum \|uvAe_j\|^2\Big)^{1/2} &\le \pi_2(uv)\\ &\le K_q\, C_q(u)\, n^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\Big(\mathbb{E}\,\Big\|\sum g_i\, w_i\Big\|^2\Big)^{1/2} .\end{aligned}$$

cqfd.

L'analogue pour le "type" est la

<u>Proposition 4.2</u> : Soit $u : Y \to Z$ un opérateur de type p. Soient $(w_i)_{i\le n}$ et $(y_j)_{j\le m}$ dans Y.
Si $$(w_i)_{i\le n} \prec (y_j)_{j\le m}$$

alors $$\Big(\mathbb{E}\,\Big\|\sum g_i\, u(w_i)\Big\|^2\Big)^{1/2} \le T_p(u)\, K_{p'}\, n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \Big(\sum_1^m \|y_j\|^2\Big)^{1/2} .$$

Démonstration : Soit $\xi_1,\dots,\xi_n$ dans Z' tels que

$$\sum_1^n <\xi_i, uw_i> = (\mathbb{E}\|\Sigma\, u(w_i)g_i\|^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad g^*(\xi_1,\dots,\xi_n) \le 1 \quad .$$

On définit $v : \ell_n^2 \to Z'$ par $v(e_i) = \xi_i$. D'après la proposition 2.4 :

$$\pi_{p',2}(u'v) \le T_p(u)$$

donc d'après le théorème 3.1 :

$$\pi_2(u'v) \le \alpha_n = K_{p'}\, T_p(u)\, n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \quad .$$

Soit (a_{ij}) tel que

$\forall\ (\alpha_j) \in \mathbb{R}^m$ $$\sum_{i=1}^n \Big|\sum_{j=1}^m a_{ij}\,\alpha_j\Big|^2 \le \sum_1^m |\alpha_j|^2$$

et $$w_i = \sum_j a_{ij}\, y_j \qquad \text{(cf. remarque 1.1).}$$

On peut écrire :

$$\Big(\sum_{j=1}^m \|u'v(\sum_i a_{ij}\, e_i)\|^2\Big)^{1/2} \le \pi_2(u'v) \le \alpha_n \quad ,$$

d'où :

$$\sum_{j=1}^m <y_j, u'v(\sum_i a_{ij}\, e_i)> \le \alpha_n(\Sigma\, \|y_j\|^2)^{1/2}$$

c'est-à-dire

$$\sum_i <uw_i, \xi_i> = \sum_i <\sum_j a_{ij}\, u(y_j), \xi_i> \le \alpha_n(\Sigma\, \|y_j\|^2)^{1/2}$$

soit, d'après le choix initial de (ξ_i) :

$$(\mathbb{E}\|\Sigma\, g_i\, u(w_i)\|^2)^{1/2} \le \alpha_n(\Sigma\, \|y_j\|^2)^{1/2} \quad . \qquad \text{cqfd}$$

Remarque 4.1 : Si l'on passe "du discret au continu" dans les propositions 4.1 et 4.2 on obtient les résultats suivants (que nous n'utiliserons pas) : Soit (Ω,μ) un espace mesuré quelconque et soit $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ dans $L^2(\Omega,\mu)$,

(i) si $\forall\ (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n$ $\int \Big|\sum_1^n \alpha_i\, \varphi_i\Big|^2 d\mu \le \sum_1^n |\alpha_i|^2$,

alors si $u : Y \to Z$ est un opérateur de cotype q, on a :

$$\forall\ (w_i)_{i\le n} \in Y^n\ ,\quad \Big(\int \Big\|\sum_1^n \varphi_i\, u(w_i)\Big\|^2 d\mu\Big)^{1/2} \le C_q(u)\, K_q\, n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_1^n w_i\, g_i\Big\|^2\Big)^{1/2} .$$

(ii) Si $\forall\ (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\sum_1^n |\alpha_i|^2 \le \int \Big|\sum_1^n \alpha_i\, \varphi_i\Big|^2 d\mu$,

alors si $u : Y \to Z$ est un opérateur de type p, on a

$$\forall\ (w_i)_{i\le n} \in Y^n\ ,\quad \Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_1^n u(w_i) g_i\Big\|^2\Big)^{1/2} \le T_p(u)\, K_{p'}\, n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \Big(\int \Big\|\sum \varphi_i\, w_i\Big\|^2 d\mu\Big)^{1/2} .$$

L'une ou l'autre des hypothèses faites sur $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est vérifiée si les (φ_i) sont orthonormales dans $L^2(\Omega,\mu)$.

<u>Théorème 4.1</u> : Soient X_1, X, Y, Z des espaces de Banach. On suppose que Y est un sous-espace de X. Soit $A : X_1 \to X$ un opérateur de type $p \le 2$. Soit $u : Y \to Z$ un opérateur de rang $\le n$. Posons $Y_1 = A^{-1}(Y) \subset X_1$, et notons $A_1 : Y_1 \to Y$ la restriction de A.
L'opérateur $uA_1 : Y_1 \to Z$ admet une extension $B : X_1 \to Z$ telle que :

$$\forall\ q \ge 2 \qquad \gamma_2(B) \le K_{p'}\, K_q\, T_p(A)\, C_q(u)\, n^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} .$$

<u>Remarque 4.1</u> : Noter que si $p = q = 2$, alors $K_{p'} = K_q = K_2 = 1$ et le théorème se réduit alors au principal résultat de [11].

<u>Démonstration</u> : On a à établir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "A"] \arrow[rrdd, bend left, "B"] & X & \\
\bigcup & \bigcup & \\
Y_1 \arrow[r, "A_1"] & Y \arrow[r, "u"] & Z
\end{tikzcd} .$$

Pour simplifier les notations posons $\lambda_n = K_{p'}\, T_p(A)\, n^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}$ et

$\mu_n = K_q\, C_q(u)\, n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}$.

La démonstration consiste à vérifier que le critère du théorème 1.3 s'applique à l'opérateur uA_1 : soit donc $(y_j^1)_{j\le m}$ et $(x_i^1)_{i\le k}$ dans X_1 avec $\{y_1^1,\dots,y_m^1\} \subset Y_1$ et $(y_j^1)_{j\le m} \prec (x_i^1)_{i\le k}$. On va montrer que

$$(4.1) \qquad \Big(\sum_1^m \|uA_1(y_j^1)\|^2\Big)^{1/2} \le \lambda_n\, \mu_n \Big(\sum_1^k \|x_i^1\|^2\Big)^{1/2} .$$

Posons $y_j = A_1(y_j^1)$. D'après le lemme 4.1, il existe $(w_i)_{i\le n}$ et $(\tilde{y}_j)_{j\le m}$ dans Y tels que :

$$(\tilde{y}_j)_{j\le m} \sim (w_i)_{i\le n} \prec (y_j)_{j\le m} \quad \text{et} \quad \tilde{y}_j - y_j \in \operatorname{Ker} u \ .$$

D'après la remarque 1.1, on a

$$\{\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_m\} \cup \{w_1,\dots,w_n\} \subset A_1(Y_1) \quad ;$$

cette même remarque 1.1 assure que l'on peut trouver $(\tilde{y}_j^1)_{j\le m}$ et $(w_i^1)_{i\le n}$ dans Y_1 tels que

$$(\tilde{y}_j^1)_{j\le m} \sim (w_i^1)_{i\le n} \prec (y_j^1)_{j\le m}$$

et

$$A_1(\tilde{y}_j^1) = \tilde{y}_j \qquad \forall\, j \le m \ ,$$

$$A_1(w_i^1) = w_i \qquad \forall\, i \le n \ .$$

On peut alors compléter la démonstration : la proposition 2.2 nous donne :

$$(\Sigma\, \|u(y_j)\|^2)^{1/2} = (\Sigma\, \|u(\tilde{y}_j)\|^2)^{1/2} \le \mu_n(\mathbb{E}\, \|\sum_1^n g_i\ w_i\|^2)^{1/2}$$

$$= \mu_n(\mathbb{E}\, \|\Sigma\, g_i\ A_1(w_i^1)\|^2)^{1/2} \ ,$$

et la proposition 2.4 montre que :

$$(\mathbb{E}\, \|\sum_1^n g_i\ A_1\ w_i^1\|^2)^{1/2} \le \lambda_n(\Sigma\, \|x_i^1\|^2)^{1/2}$$

puisque

$$(w_i^1)_{i\le n} \prec (y_j^1)_{j\le m} \prec (x_i^1)_{i\le k} \ .$$

En combinant les deux dernières inégalités on obtient bien le résultat annoncé (4.1), qui permet d'appliquer le théorème 1.3.

Les corollaires suivants sont immédiats :

Corollaire 4.1 : Soit $q \ge 2$. Si X est de type $p \le 2$ et $Y \subset X$ est de dimension n, alors il existe une projection $P : X \to Y$ telle que :

$$\gamma_2(P) \le K_{p'}\ K_q\ C_q(Y)\ T_p(X)\ n^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} = \lambda_n\ \mu_n \ .$$

Par conséquent, on a aussi $\|P\| \le \lambda_n\ \mu_n$ et $d(Y,\ell_n^2) \le \lambda_n\ \mu_n$.

La dernière assertion résulte des inégalités évidentes :

$$d(Y,\ell_n^2) \le \gamma_2(P) \quad \text{et} \quad \|P\| \le \gamma_2(P) \quad .$$

Le résultat suivant était connu avant les résultats de König, il semble dû indépendamment à W. Johnson et V. Milman d'une part, à T. Figiel et N. Tomczak-Jaegermann [3] d'autre part.

Corollaire 4.2 : Soit X de type $p \le 2$ et soit Y un sous-espace de X.

i) pour tout $u : Y \to \ell_n^2$, il existe une extension

$$\tilde{u} : X \to \ell_n^2 \quad \text{telle que} \quad \|\tilde{u}\| \le T_p(X)\, K_{p'}\, n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \quad .$$

ii) si $\dim Y = n$ et si l'on suppose que $d(Y,\ell_n^2) \le 2$, alors il existe une projection $P : X \to Y$ telle que

$$\|P\| \le 2\, T_p(X)\, K_{p'}\, n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \quad .$$

Corollaire 4.3 : Soit X de type p et de cotype q. Soit Y un sous-espace d'un quotient de X avec $\dim Y = n$. Alors

$$d(Y,\ell_n^2) \le K_q\, K_{p'}\, T_p(X)\, C_q(X)\, n^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \quad .$$

Remarque 2.1 : Dans le cas où X est un espace $L^r(\mu)$ $(1 < r < \infty)$, on constate que les corollaires précédents donnent la meilleure estimation asymptotique possible (sauf peut-être pour ce qui est des constantes). Dans ce cas particulier, les résultats sont dûs à Lewis [7]. Ce dernier a obtenu des estimations exactes en ce qui concerne les constantes : si $X = L^r(\mu)$, il obtient dans le corollaire 4.1 $\gamma_2(P) \le n^{|\frac{1}{2}-\frac{1}{r}|}$ et dans le corollaire 4.3 $d(Y,\ell_n^2) \le n^{|\frac{1}{2}-\frac{1}{r}|}$.

Pour des résultats complémentaires voir [8], [9].

Remarque 4.3 : L'estimation asymptotique du corollaire 4.2 est pratiquement la meilleure possible : en effet, les estimations de [2] démontrent qu'on ne peut pas les améliorer dans le cas de $X = \ell^p$, $1 < p < 2$.

On en déduit automatiquement une réciproque partielle du corollaire 4.2 : soit p avec $1 < p < 2$ et soit X un espace tel que $\forall\ Y \subset X$ avec $\dim Y = n$ et $d(Y, \ell^2_n) \leq 2$ il existe une projection $P : X \to Y$ avec $\|P\| \leq C\ n^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})}$ pour une constante C indépendante de Y et n. Dans ces conditions l'espace X est nécessairement de type r pour tout $r < p$.

En effet, l'hypothèse entraîne que ℓ^r n'est pas finiment représentable dans X pour chaque $r < p$. Les résultats combinés de [13] et [6] assurent alors que X est de type r pour tout $r < p$.

Remarque 4.4 : Par contre, il est très probable que les corollaires 4.1 et 4.3 puissent être améliorés ; d'ailleurs, le lecteur notera que si par exemple $p = 4/3$ et $q = 4$, alors le corollaire 4.1 ne donne rien de mieux que le corollaire 1.1.

Les deux problèmes suivants sont donc ouverts :

Problèmes : Soit X un espace de Banach de type $p > 1$.

i) Existe-t-il $C > 0$ et $\alpha < 1/2$ tels que pour tout $Y \subset X$ de dimension finie n on a $d(Y, \ell^2_n) \leq C\ n^\alpha$?

ii) Existe-t-il $C > 0$ et $\alpha < 1/2$ tels que $\forall\ Y \subset X$ de dimension n il existe une projection $P : X \to Y$ avec $\|P\| \leq C\ n^\alpha$?

Les résultats de [14] suggèrent une réponse affirmative à ces problèmes. D'autre part, si l'on suppose que X est un espace de Banach réticulé, alors les problèmes ci-dessus ont une réponse affirmative (voir la suite du séminaire).

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Carl, Inequalities between absolutely (p,q)-summing norms, (à paraître).

[2] T. Figiel, J. Lindenstrauss, V. Milman, The dimension of almost spherical sections of convex bodies, Acta Math. 139 (1977) 53-94 ; (voir aussi l'exposé No 19/20 du séminaire Maurey-Schwartz 75-76).

[3] T. Figiel, N. Tomczak-Jaegermann, Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces, (à paraître).

[4] D.J.H. Garling, Y. Gordon, Relations between some constants asso-

ciated with finite dimensional Banach spaces, Israel J. Math. 9 (1971) 346-361.

[5] H. König, Communication orale.

[6] J.L. Krivine, Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés, Annals of Math. 104 (1976) 1-29.

[7] D. Lewis, Finite dimensional subspaces of L_p, Studia Math.

[8] D. Lewis, The dimensions of complemented Hilbertian subspaces of uniformly convex Banach lattices, (à paraître).

[9] D. Lewis, N. Tomczak-Jaegermann, Hilbertian and complemented finite dimensional subspaces of Banach lattices and unitary ideals, (à paraître).

[10] J. Lindenstrauss, A. Pełczynski, Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968) 275-326.

[11] B. Maurey, Un théorème de prolongement, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris t. 279 (1974) 329-332.

[12] B. Maurey, Espaces de cotype p, $0 < p \leq 2$, Exposé No 7 du Séminaire Maurey-Schwartz 72-73, Ecole Polytechnique, Paris.

[13] B. Maurey, G. Pisier, Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, Studia Math. 58 (1976) 45-90.

[14] V. Milman, H. Wolfson, Minkowski spaces with extremal distance from the euclidean space, (à paraître).

[15] A. Pietsch, Operator ideals, Livre à paraître.

[16] A. Pietsch, Absolut p-summeriende Abbildungen in normierten Räumen, Studia Math. 28 (1967) 333-353.

[17] L. Schwartz, Les applications p-sommantes, Exposé No 2 du Séminaire Maurey-Schwartz 72-73, Ecole Polytechnique, Paris.

[18] H. König, R. Retherford, N. Tomczak-Jaegermann, On the eigenvalues of (p,2)-summing operators and constants associated to normed spaces, (en préparation).
