Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

J. B. Baillon

Quelques aspects de la théorie des points fixes dans les espaces de Banach - II

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. nº 8, p. 1-32
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

QUELQUES ASPECTS DE LA THEORIE DES POINTS FIXES DANS LES ESPACES DE BANACH - II -

J.B. BAILLON

Exposé No VIII

17 Novembre 1978

§ 1. INTRODUCTION.

On considère une contraction $T : C \to C$ où C est un convexe fermé borné d'un espace de Banach E. On considère $S_n x = \frac{1}{n}(x + Tx + \dots + T^{n-1}x)$. On pourrait croire que $S_n x$ converge (faiblement) vers un point fixe de T quand celui-ci existe. Il n'en est rien même en dimension finie comme on peut le voir dans l'exemple suivant dû à R. Sine :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la norme suivante :

$$|(a,b,c)| = \operatorname{Max}(\sqrt{a^2+b^2}, |c|) \quad ,$$

on considère l'application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$T(a,b,c) = (-b, a, \sqrt{a^2+b^2}) \quad .$$

Alors T est une contraction qui a pour point fixe 0. Mais $S_n(a,b,c) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0,\sqrt{a^2+b^2})$.

D'après cet exemple, on est obligé d'imposer de bonnes propriétés géométriques à l'espace pour pouvoir avoir la convergence (faible) de $S_n x$.

Dans cet article, on démontre en particulier que dans les espaces L^p, $1 < p < \infty$, $S_n x$ converge faiblement vers un point fixe de T s'il en existe au moins un.

D'autre part, il existe un lien étroit entre la convergence (faible) de $S_n x$ vers un point fixe et l'équivalence suivante :

$$T^{n+1} - T^n x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Longleftrightarrow T^n x \text{ converge faiblement vers un point fixe.}$$

Equivalence qui est vraie dans les espaces L^p, $1 < p < \infty$ en particulier.

De plus, il est faux de penser que $S_n x$ converge fortement vers un point fixe dans un espace de Hilbert comme c'est le cas pour les applications affines contractantes. Néanmoins si on ajoute une hypothèse comme celle de l'imparité de T, alors $S_n x$ converge fortement. La question reste ouverte dans le cas non-hilbertien.

§ 2. CONTRACTIONS DE TYPE Γ.

Toute contraction T dans un espace de Hilbert vérifie l'inéquation suivante, cf [1] :

$$\left|\begin{array}{l} \forall x_i \in D(T), \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ avec } \alpha_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \\ \| T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T x_i \|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j [\|x_i - x_j\|^2 - \|Tx_i - Tx_j\|^2], \end{array}\right.$$

Cette inéquation est vraie d'une part parce que l'on est dans un espace de Hilbert, et d'autre part, parce que T est " presque linéaire ". C'est pourquoi, on introduit la notion de contractions de type Γ qui vérifieront une inéquation de même forme, soit parce que l'on est dans un " bon " espace de Banach, soit parce que la contraction est " presque linéaire ".

On a besoin des notations suivantes :

E sera un espace vectoriel normé par $\|.\|$ et E' sera son dual topologique.

C sera un sous-ensemble convexe de E.

Γ sera l'ensemble des fonctions γ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ convexe strictement croissante avec $\gamma(0) = 0$.

Contractions de type Γ

Soit T : C $\rightarrow$ E. T sera une contraction de type Γ si :

$$\left|\begin{array}{l} \exists \gamma \in \Gamma \text{ tel que} \\ \forall x,y \in C, \quad \gamma\left(\left\|T\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{2} Tx - \frac{1}{2} Ty\right\|\right) \leq \gamma\left(\left\|\frac{x-y}{2}\right\|\right) - \gamma\left(\left\|\frac{Tx - Ty}{2}\right\|\right). \end{array}\right.$$

γ s'appellera la caractéristique de la contraction T.

Remarque :

Une contraction de type Γ est toujours une contraction. Dans certains cas, on a la réciproque . C'est ce que l'on va préciser dans le lemme suivant :

Lemme 1 :

Dans tout espace de Hilbert, dans tout espace $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, toute contraction est une contraction de type Γ de caractéristique :

si $p \geq 2$ ou si l'espace est de Hilbert (dans ce cas $p = 2$) :

$$\gamma(r) = r^p$$

si $1 < p < 2$

$$\gamma(r) = r^{p/p-1} .$$

Démonstration :

1°) Soit E un espace de Hilbert, ou soit E un espace $L^p(\Omega)$ avec $2 \leq p < \infty$. Alors on a l'inégalité de Clarkson [5 , page 225] :

$$\forall\, x,y \in E \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^p \leq \frac{1}{2}\|x\|^p + \frac{1}{2}\|y\|^p$$

p est égal à 2 dans le cas où E est un espace de Hilbert.

Soit T : $C \to E$ une contraction de C (convexe) dans E. Alors grâce à l'inégalité de Clarkson , on a $\forall\, x,y \in C$:

$$\left\| T\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{Tx+Ty}{2}\right\|^p + \left\|\frac{Tx-Ty}{2}\right\|^p \leq \frac{1}{2}\left\| T\left(\frac{x+y}{2}\right) - Tx\right\|^p + \left\| T\left(\frac{x+y}{2}\right) - Ty\right\|^p .$$

Comme T est une contraction, on a :

$$\forall\, x,y \in C, \quad \left\| T\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{Tx+Ty}{2}\right\|^p + \left\|\frac{Tx-Ty}{2}\right\|^p \leq \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^p .$$

De ce fait T est une contraction de type Γ de caractéristique $\gamma(r) = r^p$.

2°) Soit E un espace $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < 2$. L'inégalité de Clarkson dans ce cas est, cf [5 , page 225] :

$$\forall\, x,y \in E, \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^{\frac{p}{p-1}} + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^{\frac{p}{p-1}} \leq \left(\frac{1}{2}\|x\|^p + \frac{1}{2}\|y\|^p\right)^{\frac{1}{p-1}} .$$

Soit T : C → E une contraction. Alors on a pour tout $x,y \in C$:

$$\left\| T\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{Tx+Ty}{2}\right\|^{\frac{p}{p-1}} + \left\|\frac{Tx-Ty}{2}\right\|^{\frac{p}{p-1}} \leq \left(\frac{1}{2}\left\|T\left(\frac{x+y}{2}\right) - Tx\right\|^p + \frac{1}{2}\left\| T\left(\frac{x+y}{2}\right) - Ty\right\|^p\right)^{\frac{1}{p-1}} .$$

D'où $\forall\, x,y \in C$.

$$\left\| T\frac{x+y}{2} - \frac{Tx+Ty}{2}\right\|^{\frac{p}{p-1}} + \left\|\frac{Tx-Ty}{2}\right\|^{\frac{p}{p-1}} \leq \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^{\frac{p}{p-1}} .$$

Donc T est une contraction de type Γ avec $\gamma(r) = r^{\frac{p}{p-1}}$. ∎

<u>Remarque</u> :

On a évidemment la réciproque dans le cas où E admet une inégalité de type Clarkson (espaces de Sobolev par exemple). Néanmoins, toute contraction <u>linéaire</u> est de type Γ.
Les contractions de type Γ ont des propriétés importantes, à savoir :

<u>Proposition 2</u> :

Soit C un sous-ensemble convexe borné de E. Soit δ le diamètre de C. Soit T : C → E une contraction de type Γ ayant γ pour caractéristique.
Si on note :

$$v(n_1, n_2, \dots, n_{2^k}) = \frac{1}{2^k}\left[T^{n_1} u_1 + \dots + T^{n_1 + \dots + n_{2^k}} u_{2^k}\right]$$

avec $u_1, \dots, u_{2^k} \in C$,

alors il existe une constante $I(k, N_1, \delta, \gamma)$ qui ne dépend que de k, N_1, δ, γ mais pas de $N_2, \ldots, N_{2^k}$ ni de $u_1, \ldots, u_{2^k}$ telle que :

$$\frac{1}{N_1} \cdots \frac{1}{N_{2^k}} \sum_{n_1=0 \ldots n_{2^k}=0}^{N_1-1 \ldots N_{2^k}-1} \| T\, v(n_1, \ldots, n_{2^k}) - v(n_1+1, n_2, \ldots, n_{2^k}) \|$$

$$\leq I(k, N_1, \delta, \gamma) .$$

avec

$$\lim_{N_1 \to \infty} I(k, N_1, \delta, \gamma) = 0.$$

<u>Remarques préliminaires</u> :

$\gamma \in \Gamma$ étant une fonction convexe strictement croissante telle que $\gamma(0) = 0$, alors il existe γ^{-1} qui est une fonction concave strictement croissante telle que $\gamma^{-1}(0) = 0$.

De plus on a :

(1) $$\gamma(a) - \gamma(b) \leq \gamma'_+(a)\,(a-b) \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}_+$$

γ'_+ étant la dérivée à droite de γ au point a.

<u>Démonstration de la proposition 2</u> :

La démonstration de cette proposition se fait par récurrence sur k. Pour $k = 0$, on a trivialement :

$$I(0, N_1, \delta, \gamma) = 0$$

On notera dans la suite de la démonstration $I(k, N_1)$ au lieu de $I(k, N_1, \delta, \gamma)$. On pose :

$$w(n_1) = \frac{1}{2^k}\left[T^{n_1} u_1 + \dots + T^{n_1+\dots+n_{2^k}} u_{2^k}\right]$$

$$\hat{w}(n_1) = \frac{1}{2^k}\left[T^{n_1+\dots+n_{2^k+1}} u_{2^k+1} + \dots + T^{n_1+\dots+n_{2^{k+1}}} u_{2^{k+1}}\right]$$

De ce fait, on a pour k + 1 :

$$v\left(n_1, \dots, n_{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(w(n_1) + \hat{w}(n_1)\right)$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\|T\, v(n_1, \dots, n_{2^{k+1}}) - v(n_1+1, n_2, \dots, n_{2^{k+1}})\| \leq$$

$$\left\|T\left(\frac{w(n_1) + \hat{w}(n_1)}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(w(n_1+1) + \hat{w}(n_1+1)\right)\right\| + \frac{1}{2}\|T\, w(n_1) - w(n_1+1)\| +$$

$$\frac{1}{2}\|T\, \hat{w}(n_1) - \hat{w}(n_1+1)\|$$

Soit $A = \frac{1}{N_1} \dots \frac{1}{N_{2^{k+1}}} \sum_{n_1, \dots, n_{2^{k+1}}} \|T\, v(n_1, \dots n_{2^{k+1}}) - v(n_1+1, n_2, \dots, n_{2^{k+1}})\|$.

De ce fait, on a :

$$A \leq \frac{1}{N_1} \dots \frac{1}{N_{2^{k+1}}} \sum_{n_1, \dots, n_{2^{k+1}}} \left\{ \left\| T\left(\frac{w(n_1) + \hat{w}(n_1)}{2}\right) - \frac{T\, w(n_1) + T\, \hat{w}(n_1)}{2} \right\| \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\|T\, w(n_1) - w(n_1+1)\| + \frac{1}{2}\|T\, \hat{w}(n_1) - \hat{w}(n_1+1)\| \right\} .$$

Or

$$\frac{1}{N_1}\cdots\frac{1}{N_{2^{k+1}}}\ \Sigma\ \| T\,w(n_1) - w(n_1+1)\| =$$

$$= \frac{1}{N_1}\cdots\frac{1}{N_{2^k}}\ \Sigma\ \| T\,w(n_1) - w(n_1+1)\|$$

$$\leq I\,(k,N_1)$$

et

$$\frac{1}{N_1}\cdots\frac{1}{N_{2^{k+1}}}\ \Sigma\ \| T\,\hat{w}(n_1) - \hat{w}(n_1+1)\| =$$

$$= \frac{1}{N_{2^k+1}}\cdots\frac{1}{N_{2^{k+1}}}\sum_{n_{2^k+1}\cdots n_{2^{k+1}}}\left\{\frac{1}{N_1}\cdots\frac{1}{N_{2^k}}\sum_{n_1\cdots n_{2^k}}\|T\,\hat{w}(n_1)-\hat{w}(n_1+1)\|\right\}$$

$$\leq I\,(k,N_1)$$

Comme γ^{-1} est une fonction concave, on obtient :

$$A \leq I(k,N_1) + \gamma^{-1}\left[\frac{1}{N_1}\cdots\frac{1}{N_{2^{k+1}}}\ \Sigma\ \gamma\left(\left\|T\left(\frac{w(n_1)+\hat{w}(n_1)}{2}\right) - \frac{Tw(n_1)+T\hat{w}(n_1)}{2}\right\|\right)\right] .$$

Or T est une contraction de type Γ de caractéristique γ, on a :

$$\forall\ x,y \in C,\ \gamma\left(\left\|T\,\frac{x+y}{2} - \frac{Tx+Ty}{2}\right\|\right) \leq \gamma\left(\left\|\frac{x-y}{2}\right\|\right) - \gamma\left(\left\|\frac{Tx-Ty}{2}\right\|\right) .$$

Donc

$$\gamma\left(\left\|T\left(\frac{w(n_1)+\hat{w}(n_1)}{2}\right) - \frac{Tw(n_1)+T\hat{w}(n_1)}{2}\right\|\right) \leq \gamma\left(\left\|\frac{w(n_1)-\hat{w}(n_1)}{2}\right\|\right) - \gamma\left(\left\|\frac{Tw(n_1-T\hat{w}(n_1)}{2}\right\|\right) .$$

Or, d'après (1.11)

$$\gamma\left(\left\|\frac{w(n_1+1)-\hat{w}(n_1+1)}{2}\right\|\right)-\gamma\left(\left\|\frac{Tw(n_1)-T\hat{w}(n_1)}{2}\right\|\right)\leq$$

$$\leq \gamma'_+\left(\left\|\frac{w(n_1+1)-\hat{w}(n_1+1)}{2}\right\|\right)\left[\left\|\frac{1}{2}\, w(n_1+1)-\hat{w}(n_1+1)\right\|-\frac{1}{2}\left\|Tw(n_1)-T\hat{w}(n_1)\right\|\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\gamma'_+\left(\frac{\delta}{2}\right)\left[\|T\,w(n_1)-w(n_1+1)\|+\|T\,\hat{w}(n_1)-\hat{w}(n_1+1)\|\right].$$

Donc

$$\frac{1}{N_1}\cdots\frac{1}{N_{2^{k+1}}}\,\Sigma\,\gamma\left(\left\|T\left(\frac{w(n_1)+\hat{w}(n_1)}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(T\,w(n_1)+T\,\hat{w}(n_1)\right)\right\|\right)\leq$$

$$\leq \frac{1}{N_1}\cdots\frac{1}{N_{2^{k+1}}}\,\Sigma\left\{\gamma\left(\frac{1}{2}\,\|w(n_1)-\hat{w}(n_1)\|\right)-\right.$$

$$\left.-\gamma\left(\frac{1}{2}\,\|\,w(n_1+1)\;-\;\hat{w}(n_1+1)\,\|\right)+\gamma'_+\left(\frac{\delta}{2}\right)\,I\,(k,N_1)\right\}.$$

Donc

$$A\leq I\,(k,N_1)+\gamma^{-1}\left[\frac{1}{N_1}\,\gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)+\gamma'_+\left(\frac{\delta}{2}\right)\,I\,(k,N_1)\right].$$

De ce fait, si on prend :

$$I(k+1,N_1)=I(k,N_1)+\gamma^{-1}\left[\frac{1}{N_1}\,\gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)+\gamma'_+\left(\frac{\delta}{2}\right).I(k,N_1)\right]$$

on obtient la proposition.

Notation :

Soit $T : C \to C$ une application d'un sous-ensemble C d'un espace vectoriel dans C, on note pour $x \in C$:

$$S_m x = \frac{1}{m}\left[x + \dots + T^{m-1} x\right].$$

Corollaire 3 :

Sous les hypothèses de la proposition 2, si on note :

$$s(n_1) = \frac{1}{2^{k-m}}\left[S_{2^m} T^{n_1} u_1 + \dots + S_{2^m} T^{n_1+\dots+n_{2^{k-m}}} u_{2^{k-m}}\right]$$

on a :

$$\frac{1}{N_1}\cdots\frac{1}{N_{2^{k-m}}} \sum_{n_1=0\dots n_{2^{k-m}}=0}^{N_1-1\dots N_{2^{k-m}}-1} \|T s(n_1) - s(n_1+1)\| \leq I(k,N_1,\delta,\gamma)$$

où $I(k,N_1,\delta,\gamma)$ est la même constante que dans la proposition 2.

En effet

ceci se déduit facilement de la formule précédente si on remarque :

$$s(n_1) = \frac{1}{2^k}\left[T^{n_1} u_1 + T^{n_1}(T u) + \dots + T^{n_1+n_2} u_2 + T^{n_1+n_2}(T u_2) + \dots\right].$$

Notation :

Soit $T : C \to C$ une application. On notera F_T l'ensemble des points fixes de T :

$$F_T = \{ u / u \in C \text{ et } Tu = u \}.$$

Proposition 4 :

Soit $T : C \to C$ une contraction. On suppose que pour tout $m \geq 0$, T^m est une contraction de type Γ de même caractéristique γ. Soit f un point fixe de T. Soit :

$$\sigma_k(n) = \frac{T^n x - f}{2^k} + f .$$

Alors il existe une constante $\delta_k(n)$ qui ne dépend que de x, f, γ, k, n mais pas de m telle que :

$$\left| \begin{array}{l} \| T^m \sigma_k(n) - \sigma_k(n+m) \| \leq \delta_k(n) \\ \\ \text{avec } \lim_{n\to\infty} \delta_k(n) = 0 . \end{array} \right.$$

Démonstration :

La démonstration se fait par récurrence sur k. Pour $k = 0$, on a :

$$\sigma_0(n) = T^n x$$

donc $\sigma_0(n) = 0$.

Pour k, on a l'inégalité triangulaire :

$$a = \|T^m \sigma_k(n) - \sigma_k(n+m)\| \leq \|T^m \sigma_k(n) - \frac{1}{2}\left(T^m \sigma_{k-1}(n) + f\right)\|$$

$$+ \frac{1}{2} \| T^m \sigma_{k-1}(n) - \sigma_{k-1}(n+m)\| .$$

Donc :

$$a \leq \gamma^{-1}\left(\gamma\|T^m \sigma_k(n) - \frac{1}{2}\left(T^m \sigma_{k-1}(n) + T^m f\right)\|\right) + \frac{1}{2}\delta_{k-1}(n) .$$

Or T^m est une contraction de type Γ de caractéristique γ :

$$\gamma\left(\|T^m \sigma_k(n) - \frac{1}{2} T^m \sigma_{k-1}(n) + T^m f\|\right) \leq \gamma\left(\|\frac{\sigma_{k-1}(n) - f}{2}\|\right) - \gamma\left(\frac{1}{2}\|T^m \sigma_{k-1}(n) - f\|\right) .$$

Or d'après (1)

$$\gamma\left(\frac{1}{2}\|\sigma_{k-1}(n+m)-f\|\right)-\gamma\left(\frac{1}{2}\|T^m\sigma_{k-1}(n)-f\|\right)\leq \gamma'_+\left(\frac{1}{2}\|\sigma_{k-1}(n+m)-f\|\right)$$

$$\left[\frac{1}{2}\|\sigma_{k-1}(n+m)-f\|-\frac{1}{2}\|T^m\sigma_{k-1}(n)-f\|\right]\leq\frac{1}{2}\gamma'_+\left(\frac{1}{2^k}\|x-f\|\right)\cdot\delta_{k-1}(n)$$

Or $\|T^n x-f\| \searrow d$ quand $n\to\infty$

Donc :

$$a\leq\gamma^{-1}\left[\gamma\left(\frac{1}{2^k}\|T^n x-f\|\right)-\gamma\left(\frac{1}{2^k}\|T^{n+m}x-f\|\right)+\frac{1}{2}\gamma'_+\left(\frac{1}{2^k}\|x-f\|\right)\delta_{k-1}(n)\right]+\frac{1}{2}\delta_{k-1}(n)\,.$$

De ce fait :

$$a\leq\gamma^{-1}\left[\gamma\left(\frac{1}{2^k}\|T^n x-f\|\right)-\gamma\left(\frac{d}{2^k}\right)+\frac{1}{2}\gamma'_+\left(\frac{1}{2^k}\|x-f\|\right)\cdot\delta_{k-1}(n)\right]+\frac{1}{2}\delta_{k-1}(n)\,\cdot$$

On a donc la récurrence si on prend :

$$\delta_k(n)=\frac{1}{2}\delta_{k-1}(n)+$$

$$+\gamma^{-1}\left[\gamma\left(\frac{1}{2^k}\|T^n x-f\|\right)-\gamma\left(\frac{d}{2^k}\right)+\frac{1}{2}\gamma'_+\left(\frac{1}{2^k}\|x-f\|\right)\cdot\delta_{k-1}(n)\right]\cdot\blacksquare$$

§ 3. QUELQUES PROPRIETES GEOMETRIQUES DES ESPACES DE BANACH.

Soit Φ l'ensemble des fonctions φ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ continue strictement croissante telle que $\varphi(0) = 0$ et $\lim_{r \to \infty} \varphi(r) = \infty$.

Soit E un espace vectoriel normé et E' le dual topologique de E.

Alors l'application de dualité J associée à φ est :

$$J : E \to 2^{E'} \quad \text{défini par :}$$

$$Ju = \{ w \in E' ; \langle u, w \rangle_{E,E'} = \|u\|_E . \|w\|_{E'} \text{ et } \|w\|_{E'} = \varphi(\|u\|_E) \} .$$

On notera $\langle x, Ju \rangle$ pour $\langle x, w \rangle$ avec $w \in Jy$ quand il n'y aura pas de confusion possible.

De plus Ju est un ensemble convexe, non vide (théorème de Hahn - Banach), $\sigma(E', E)$ compact. De plus, Ju est réduit à un élément si E' est strictement convexe.

Soit J_1 l'application de dualité associée à $\varphi(r) = r$, alors J_1 peut être considérée comme la sous-différentielle de la fonction convexe $\frac{1}{2} \|.\|^2$.

Si E a une norme différentiable en x, alors il existe $\gamma = [0, +\infty[\to [0, +\infty]$ convexe telle que $\lim_{r \downarrow 0} \frac{\gamma(r)}{r} = 0$ et pour tout $y \in X$

$$\frac{1}{2} \|y\|^2 \leq \frac{1}{2} \|x\|^2 + \langle y - x, J_1 x \rangle + \gamma(\|y-x\|) .$$

De plus on a les équivalences suivantes résumées dans le tableau suivant cf [3] :

E a une norme dérivable (Gâteaux)	E a une norme différentiable (Fréchet)	E a une norme uniformément différentiable
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
J_1 est univoque et continue de E(fort) $\to$ E' (faible $\sigma(E',E)$)	J_1 est univoque et continue de E (fort) $\to$ E' (fort)	J_1 univoque et uniformément continue sur les bornés.
		$\Updownarrow$
		E uniformément lisse
		$\Updownarrow$
		E' uniformement convexe.

<u>Remarque</u> :

Dans les espaces de Hilbert, dans les espaces l^p, dans $\mathbb{R}^n$ (muni d'une norme strictement convexe), la fonction usuelle de dualité est faiblement continue. Mais il est faux en général que J soit faiblement continue (dans L^p, $p \neq 2$, par exemple). Pour pallier à cet inconvénient, on introduit une notion plus faible qui est vraie pour une classe plus importante d'espaces de Banach.

<u>Définitions</u>

Soit E un espace de Banach. Soit J l'application de dualité associée à φ.

J sera dite <u>presque faiblement continue</u> si :

$\forall x_n \in E$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ pour la topologie $\sigma(E,E')$

$$\text{alors } \lim_{p\to\infty} \overline{\lim_{n_1\to\infty}} \dots \overline{\lim_{n_p\to\infty}} \left| \left\langle J\left(\frac{1}{p}(x_{n_1}+\dots+x_{n_p})\right) - Jx, \xi \right\rangle \right| = 0$$

J sera dite <u>ergodiquement faiblement continue si</u> :

$\forall\, x_n \in E$ tel que x_n borné et pour tout $K \subset \mathbb{N}$ vérifiant :

$$s_k(x_1) \xrightarrow[\substack{k \in K \\ k \to \infty}]{} \sigma \quad \text{pour la topologie } \sigma(E,E').$$

alors

$$\lim_{p\to\infty} \overline{\lim_{\substack{N_1\in K\\ N_1\to\infty}}} \cdots \overline{\lim_{\substack{N_p\in K\\ N_p\to\infty}}} \left| \frac{1}{N_1}\cdots\frac{1}{N_p} \sum_{n_1=0\ldots n_p=0}^{N_1-1\ldots N_p-1} < J\left(\frac{1}{p}(s_\ell x_{n_1}+\ldots+s\, x_{n_p})\right) - J\sigma,\xi > \right| = 0 .$$

J sera dite <u>uniformément presque faiblement continue</u> si :

$\forall\, x_n \in E$ tel que $x_n \longrightarrow x$ pour la topologie $\sigma(E,E')$, si on note $M = \operatorname{Sup} \|x_n - x\|$, $\forall\, \xi \in E$, il existe une constante $\varepsilon_{M,\xi,x}(p)$ qui ne dépend que de M, ξ, x et de p tel que

$$\overline{\lim_{n_1\to\infty}} \cdots \overline{\lim_{n_p\to\infty}} \left| < \xi,\ J\left(\frac{1}{p}(x_{n_1}+\ldots+x_{n_p})\right) - J(x) > \right| \leq \varepsilon_{M,\xi,x}(p)$$

avec

$$\varepsilon_{M,\xi,x}(p) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } p \to \infty.$$

On note $s_k(x_n) = \frac{1}{k}\left[x_n + \ldots + x_{n+k-1}\right]$.

On va montrer qu'il existe une classe importante d'espaces de Banach (à savoir les espaces uniformément lisses) qui vérifient ces propriétés.

<u>Lemme 5</u> :

Soit E un espace de Banach uniformément lisse. Alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \longrightarrow x$ faiblement, on a

$$\lim_{p\to\infty} \overline{\lim}_{n_1\to\infty} \dots \overline{\lim}_{n_p\to\infty} \left\| \frac{1}{p} (x_{n_1} + \dots + x_{n_p}) - x \right\| = 0 .$$

<u>Démonstration</u> :

Soit J_1 l'application de dualité associée à $\varphi(r) = r$.
Pour tout x borné, il existe une fonction convexe $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\lim_{r\to 0} \frac{\gamma(r)}{r} = 0$$

vérifiant pour tout $y \in X$:

$$\frac{1}{2} \|y\|^2 \leq \frac{1}{2} \|x\|^2 + \langle y - x, J_1 x \rangle + \gamma(\|y-x\|) .$$

cf [3]

Alors comme $x_n \rightharpoonup x$, x_n est borné. Soit $M = \operatorname{Sup} \|x_n\|$.

De plus soit

$$r_p = \frac{1}{p} (x_{n_1} + \dots + x_{n_p}) - x = \frac{1}{p} (x_{n_p} - x) + \frac{p-1}{p} r_{p-1} \qquad \text{avec}$$

$$r_{p-1} = \frac{1}{p-1} (x_{n_1} + \dots + x_{n_{p-1}}) - x$$

On a donc

$$\frac{1}{2} \|r_p\|^2 \leq \frac{1}{2} \left\|\frac{p-1}{p} r_{p-1}\right\|^2 + \frac{1}{p} \langle x_{n_p} - x, J \frac{p-1}{p} r_{p-1} \rangle + \gamma_M \left(\left\|\frac{1}{p} x_{n_p}\right\| \right)$$

d'où

$$\frac{1}{2} \overline{\lim}_{n_p\to\infty} \|r_p\|^2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 \|r_{p-1}\|^2 + \gamma_M \left(\frac{M}{p} \right) .$$

En réitérant le procédé, on obtient :

$$\frac{1}{2}\,\overline{\lim_{n_1\to\infty}}\dots\overline{\lim_{n_p\to\infty}}\,\|r_p\|^2 \leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{p^2}\,\overline{\lim_{n_1\to\infty}}\,\|x_{n_1}\|^2 + \frac{1}{p^2}\left[\gamma\left(\frac{M}{1}\right)+\dots+k^2\,\gamma\left(\frac{M}{k}\right)+\dots+p^2\,\gamma\,\frac{M}{p}\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\frac{M^2}{p^2} + \frac{1}{p^2}\left[\gamma\left(\frac{M}{1}\right)+\dots+p^2\,\gamma\left(\frac{M}{p}\right)\right].$$

Donc comme $p\,\gamma\left(\frac{M}{p}\right)\to 0$ quand $p\to\infty$, on a

$$\lim_{p\to\infty}\ \overline{\lim_{n_1\to\infty}}\ \dots\ \overline{\lim_{n_p\to\infty}}\ \|r_p\| = 0.\ \blacksquare$$

<u>Lemme 6</u> :

Soit E un espace de Banach uniformément lisse. Alors pour toute $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement, il existe une constante $\varepsilon(p)$ qui ne dépend que de $\operatorname{Sup}\|x_n-x\|$ et $\|x\|$, telle que :

$$\overline{\lim_{n_1\to\infty}}\dots\overline{\lim_{n_p\to\infty}}\ \left\|\frac{1}{p}\,(x_{n_1}+\dots+x_{n_p}) - x\right\| \leq \varepsilon(p)$$

avec $\lim_{p\to\infty}\varepsilon(p) = 0$.

<u>Démonstration</u> :

En reprenant la démonstration du lemme 2., on montre que si $M = \operatorname{Sup}\|x_n-x\|$, il existe une fonction convexe γ qui ne dépend que de M et $\|x\|$ telle que :

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\gamma(r)}{r} = 0$$

et

$$\overline{\lim_{n_1\to\infty}}\dots\overline{\lim_{n_p\to\infty}}\ \left\|\frac{1}{p}\,(x_{n_1}+\dots+x_{n_p}) - x\right\| \leq \frac{M}{2p^2} + \frac{1}{p^2}\left[\gamma\left(\frac{M}{1}\right)+\dots+p^2\,\gamma\left(\frac{M}{p}\right)\right].\ \blacksquare$$

Lemme 7 :

Soit E un espace de Banach dont la norme est différentiable en x au sens Fréchet, alors il existe une fonction γ_1 convexe telle que

$$\gamma_1(r) > 0 \qquad \text{pour } r > 0 \qquad \text{et } \gamma_1(o) = 0$$

et telle que si J_1 est l'application de dualité associée à $\varphi(r) = r$, on a

$$\gamma_1(\|J_1 y - J_1 x\|) \leq \|y-x\| . (\|y\| + \|x\|) .$$

Démonstration

Comme la norme est différentiable en x, alors il existe

$\gamma : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}_+}$ convexe telle que $\lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\gamma(r)}{r} = 0$ et pour tout $y \in x$,

$$\frac{1}{2}\|y\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \langle y-x, Jx \rangle + \gamma(\|y-x\|) .$$

Par dualité, on a pour tout $v \in X'$ (puisque $\frac{1}{2}\|v\|^2 = \sup\limits_{y \in x} \langle y, v \rangle - \frac{1}{2}\|y\|^2$)

$$\frac{1}{2}\|v\|^2 \geq \frac{1}{2}\|Jx\|^2 + \langle x, v - J_1(x) \rangle + \gamma_1 \ \|v - J_1(x)\|$$

où $\gamma_1(r) = \sup\limits_{t \in [o,\infty]} \left(tr - \gamma(t) \right)$.

D'où si $v \in J_1 y$, on a :

$$\gamma_1(\|v - J_1 x\|) \leq \langle y - x, v - J_1 x \rangle \leq \|y - x\| . (\|y\| + \|x\|) .$$

Or, cf [3, p.0 . 5], $\gamma_1(r) > 0$ si $r > 0$ et $\gamma_1(o) = 0$. ∎

Lemme 8 :

Soit E un espace de Banach dont la norme est différentiable (au sens Fréchet). Si pour toute suite $x_n \subset E$ qui converge faiblement $\sigma(E,E')$ vers x, il existe une constante $\varepsilon(p)$ qui ne dépend que de x, $M = \operatorname{Sup} \| x_n - x \|$ et de p telle que :

$$\left| \begin{array}{l} \overline{\lim_{n_1 \to \infty}} \ldots \overline{\lim_{n_p \to \infty}} \left\| \frac{1}{p} (x_{n_1} + \ldots + x_{n_p}) - x \right\| \leq \varepsilon(p) \\ \text{et} \\ \varepsilon(p) \to 0 \text{ quand } p \to \infty . \end{array} \right.$$

Alors J_1 est uniformément presque faiblement continue.

Démonstration :

D'après le lemme précédent, on a :

$$\left\| J_1 \left(\frac{1}{p} (x_{n_1} + \ldots + x_{n_p}) \right) - J_1 x \right\| \leq \gamma_1^{-1} \left[\left\| \frac{1}{p} (x_{n_1} + \ldots + x_{n_p}) - x \right\| \right] \left[\|x\| + \left\| \frac{1}{p} (x_{n_1} + \ldots + x_{n_p}) \right\| \right].$$

Donc

$$\overline{\lim_{n_1 \to \infty}} \ldots \overline{\lim_{n_p \to \infty}} \left| < \xi , J_1 \left(\frac{1}{p} (x_{n_1} + \ldots + x_{n_p}) \right) - Jx > \right| \leq$$

$$\leq \gamma_1^{-1} \left(\varepsilon(p) \right) . \|\xi\| . \left(2 \|x\| + M \right) .$$

Donc J_1 est uniformément presque faiblement continue. ∎

Lemme 9 :

Soit E une espace de Banach dont la norme est dérivable au sens de Gateaux au point x. Soit x_n une suite de E telle que :

$$\lim_{p\to\infty} \overline{\lim_{n_1\to\infty}} \cdots \overline{\lim_{n_p\to\infty}} \left\| \frac{1}{p}(x_{n_1}+\cdots+x_{n_p}) - x \right\| = 0$$

alors on a, si J est une application de dualité associée à $\varphi \in \Phi$:

$$\lim_{p\to\infty} \overline{\lim_{n_1\to\infty}} \cdots \overline{\lim_{n_p\to\infty}} \left| < \xi, J\left(\frac{1}{p}(x_{n_1}+\cdots+x_{n_p})\right) - Jx > \right| = 0 .$$

<u>Démonstration</u> :

Cette démonstration se fait par l'absurde. Supposons que :

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \overline{\lim_{n_1\to\infty}} \cdots \overline{\lim_{n_p\to\infty}} \left| < \xi, J\left(\frac{1}{p}(x_{n_1}+\cdots+x_{n_p})\right) - J(x) > \right| \geq \varepsilon > 0$$

Alors il existe une suite

$$z_k = y_{n_1,\ldots,n_p,0,0,\ldots} = \frac{1}{p}(x_{n_1}+\cdots+x_{n_p})$$

telle que

$$| < \xi, J z_k - Jx > | \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\| z_k - x \| \to 0 \quad \text{quand } k \to \infty.$$

De ce fait, comme la norme est dérivable au point x, J est demi-continu au point x, i.e. continu de X fort dans X' muni de la topologie $\sigma(X',X)$.

Donc :

$$| < \xi, J z_k - Jx > | \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

ce qui est contradictoire. ■

<u>Remarque</u> :

Dans tout espace de Banach uniformément lisse, toute application de dualité est donc presque faiblement continue.

Lemme 10 :

Soit E un espace de Banach uniformément lisse. Alors pour toute suite $x_n \in E$ telle que

$$x_n \text{ bornée et } \exists K \subset \mathbb{N} \quad s_k x_o \xrightarrow[\substack{k \in k \\ k \to \infty}]{} \sigma$$

Alors on a :

$$\lim_{p\to\infty} \overline{\lim_{\substack{N_1\to\infty \\ N_1 \in K}}} \cdots \overline{\lim_{\substack{N_p\to\infty \\ N_p \in K}}} \left\| \frac{1}{N_1} \cdots \frac{1}{N_p} \sum_{n_1=0 \ldots n_p=0}^{N_1-1 \ldots N_p-1} \frac{1}{p}(s_\ell x_{n_1} + \ldots + s_\ell x_{n_p}) - \sigma \right\| = 0$$

Démonstration :

La démonstration est identique au lemme précédent :

Soit J_1 l'application de dualité associée à $\varphi(r) = r$. Alors comme x_n est bornée, $s_\ell x_n$ est bornée.

Soit

$$r_p = \frac{1}{p}(s_\ell x_{n_1} + \ldots + s_\ell x_{n_p}) - \sigma = \frac{1}{p}(s_\ell x_{n_p} - \sigma) + \frac{p-1}{p} r_{p-1} \quad \text{avec}$$

$$r_{p-1} = \frac{1}{p-1}(s_\ell x_{n_1} + \ldots + s_\ell x_{n_{p-1}}) - \sigma .$$

On a donc :

$$\frac{1}{2}\|r_p\|^2 \leq \frac{1}{2}\left\|\left(\frac{p-1}{p}\right) r_{p-1}\right\|^2 + \frac{1}{p} < s_\ell x_{n_p} - \sigma, J_1\left(\frac{p-1}{P} r_{p-1}\right) > + \gamma\left(\left\|\frac{s_\ell x_{n_p}}{p}\right\|\right).$$

$$\text{Or} \left\| \frac{1}{N_p} \sum_{n_p=0}^{N_p-1} s_\ell x_{n_p} - s_{N_p} x_1 \right\| \leq \frac{\ell-1}{N_p} M \quad \text{où } M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$$

d'où

$$\overline{\lim_{\substack{N_1\to\infty \\ N_1 \in K}}} \quad \frac{1}{2} \frac{1}{N_p} \sum_{n_p=0}^{N_p-1} \|r_p\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{p-1}{p}\right)^2 \|r_{p-1}\|^2 + \gamma\left(\frac{M}{p}\right) ;$$

d'où par récurrence, on a :

$$\lim_{p\to\infty} \overline{\lim_{\substack{N_1\to\infty\\ N_1\in K}}} \cdots \overline{\lim_{\substack{N_p\to\infty\\ N_p\in K}}} \frac{1}{N_1}\cdots\frac{1}{N_p} \sum_{n_1=0\ldots n_p=0}^{N_1-1\ldots N_p-1} \|r_p\|^2 = 0 .$$

Or $\gamma(r) = r^2$ est une fonction convexe, d'où le lemme. ■

De même, on a

<u>Lemme 11</u> :

Soit E un espace de Banach dont la norme est dérivable en σ. au sens de Gateaux. Soit x_n une suite de E telle que

x_n bornée et $\exists\ K \subset \mathbb{N}$ tel que $s_k x_o \xrightarrow[\substack{k\in K\\ k\to\infty}]{} \sigma$

et tel que $\lim\limits_{p\to\infty} \overline{\lim\limits_{\substack{N_1\in K\\ N_1\to\infty}}} \cdots \overline{\lim\limits_{\substack{N_p\in K\\ N_p\to\infty}}} \left\| \frac{1}{N_1}\cdots\frac{1}{N_p} \sum\limits_{n_1,\ldots,n_p} \frac{1}{p}(s_\ell x_{n_1}+\cdots+ s_\ell x_{n_p})-\sigma \right\|=0$

alors si on note J l'application de dualité associée à φ, $\varphi \in \Phi$:

$$\lim_{p\to\infty} \overline{\lim_{\substack{N_1\in K\\ N_1\to\infty}}} \cdots \overline{\lim_{\substack{N_p\in K\\ N_p\to\infty}}} \left| \left\langle \xi, \frac{1}{N_1}\cdots\frac{1}{N_p} \sum_{n_1,\ldots,n_p} \left[J\left(\frac{1}{p}(s_\ell x_{n_1}+\cdots+s_\ell x_{n_p})\right) - J\sigma \right] \right\rangle \right| = 0 .$$

<u>Remarque</u> :

Dans tout espace de Banach uniformément lisse, l'application de dualité J_1 est donc presque faiblement continue, ergodiquement faiblement continue, ainsi que uniformément presque faiblement continue.

§ 1. STRUCTURE DE L'ADHERENCE FAIBLE DE $\{T^n x\}$.

On va montrer sous des hypothèses assez générales l'orthogonalité de l'adhérence faible de $\{T^n x\}$ par rapport à l'ensemble des points fixes de T.

Définition.

Soit $T : C \to C$ une contraction d'un sous-ensemble convexe fermé d'un espace de Banach.

On notera $\omega_w(x)$ l'adhérence faible de $\{T^n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ c'est-à-dire l'ensemble dans E" de toutes les limites faibles $\sigma(E'', E')$ des sous-suites de $\{T^n x\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Si E est réflexif, on a $\omega_w(x) \subset E$.

Lemme 12 :

Soit E un espace de Banach. Soit C un ensemble convexe de E. Soit $T : C \to C$ une contraction. On suppose que F_T, l'ensemble des points fixes de T, est non vide. Soit $f \in F_T$. On note :

$$\sigma_k(n) = \frac{1}{2^k} (T^n x - f) + f .$$

Si T^m est une contraction de type Γ de même caractéristique γ, pour tout $m \geq 0$, alors

$$\forall f_1 \in F_T , \quad \|\sigma_k(n) - f_1\| \quad \text{converge quand } n \to + \infty .$$

Démonstration :

D'après la proposition 4 , il existe une constante $\delta_k(n)$ telle que

$$\| T^m \sigma_k(n) - \sigma_k(n+m) \| \leq \delta_k(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \to \infty} \delta_k(n) = 0 .$$

Donc on a

$$\| \sigma_k(n+m) - f_1 \| \leq \| T^m \sigma_k(n) - \sigma_k(n+m) \| + \| T^m \sigma_k(n) - f_1 \| .$$

D'où

$$\| \sigma_k(n+m) - f_1 \| \leq \delta_k(n) + \| \sigma_k(n) - f_1 \| .$$

De ce fait,

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \| \sigma_k(n+m) - f_1 \| \leq \delta_k(n) + \| \sigma_k(n) - f_1 \|$$

D'où : $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \| \sigma_k(n) - f_1 \| \leq \lim\limits_{n \to \infty} \| \sigma_k(n) - f_1 \|$.

On a ainsi le lemme.

Proposition 13 :

Sous les hypothèses du lemme précédent, si E a une norme différentiable (au sens de Fréchet), alors pour toute application J de dualité associée à φ, on a

$$\forall\, u_1, u_2 \in \omega_w(x) \quad \text{et} \quad \forall\, f, f_1 \in F_T .$$

$$< u_1 - u_2, J(f - f_1) > = 0 .$$

Démonstration :

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que l'application J de dualité est associée à $\varphi(r) = r$. Comme E a une norme différentiable en $x \neq 0$, il existe une fonction $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ convexe telle que $\lim_{r \to 0} \frac{\gamma(r)}{r} = 0$ et pour tout $y \in E$.

$$0 \leq \frac{1}{2} \|y\|^2 - \frac{1}{2} \|x\|^2 - < y-x, Jx > \leq \gamma(\|y - x\|) .$$

Si $f = f_1$ alors la proposition 13 est démontrée, sinon on prend pour $x = f - f_1$ et pour $y = \sigma_k(n) - f_1$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{2} \|\sigma_k(n) - f_1 \|^2 - \frac{1}{2} \|f - f_1\|^2 - < \frac{T^n x - f}{2^k}, J(f - f_1) > \leq \gamma \|\frac{T^n x - f}{2^k}\|.$$

de ce fait si $u_1 \in \omega_w(x)$, on a d'après le lemme 12 :

$$0 \leq \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \|\sigma_k(n) - f_1\|^2 - \frac{1}{2} \|f - f_1\|^2 - < \frac{u_1 - f}{2^k}, J(f-f_1) > \leq \gamma \left(\|\frac{x - f}{2^k}\| \right).$$

Donc

$$\frac{1}{2^k} | < u_1 - u_2, J(f - f_1) > | \leq 2 \gamma \left(\frac{\|x - f\|}{2^k} \right) \text{ et ceci } \forall k.$$

D'où $< u_1 - u_2, J(f - f_1) = 0$.

Corollaire 14 :

Sous les hypothèses de la proposition 13 , on a :

$$\left| \begin{array}{l} \forall u_1, u_2 \in \overline{\mathrm{Conv}}\, \omega_w(x), \quad \forall f, f_1 \in F_T \\ < u_1 - u_2, J(f - f_1) > = 0 . \end{array} \right.$$

Remarques :

$\overline{\text{Conv}}\ \omega_w(x)$ est un sous-ensemble convexe fermé de E".

$\overline{\text{Conv}}\ \omega_w(x)$ est inclus dans E si E est réflexif.

On a que

$\overline{\text{Conv}}\ \omega_w(x) \cap F_T$ est soit vide, soit un singleton.

§ 5. CONVERGENCE FAIBLE DE $S_n x$.

Théorème 15 :

Soit E un espace de Banach réflexif. Soit C un sous-ensemble convexe fermé borné de E. Soit $T : C \rightarrow C$ une contraction. Alors si on a les conditions suivantes :

(A 1) $\forall\, m \geq 0$, T^m est une contraction de type Γ de même caractéristique γ.

(A 2) E a une application de dualité J ergodiquement faiblement continue .

(A 3) E a une norme différentiable (au sens de Fréchet) .

Alors $F_T \neq \emptyset$ et pour tout $x \in C$, $S_n x = \frac{1}{n}(x + \dots + T^{n-1}x)$ converge faiblement vers un point fixe f de T.

Remarques :

Dans le théorème 15 on ne suppose pas a priori qu'il existe un point fixe de T.

Pour les espaces $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, les conditions A 1, A 2 et A 3 sont remplies.

Pour démontrer ce théorème, on utilise les lemmes suivants.

Lemme 16 :

Soit E un espace de Banach. Soit C un sous-ensemble convexe fermé borné de E. Soit $T : C \to C$ une contraction de type Γ. On suppose que E vérifie A 2. Si $S_{n_k} x \longrightarrow f$ pour la topologie $\sigma(E,E')$, alors f est un point fixe de T.

Remarque :

Sous les hypothèses du lemme 16., si on suppose de plus que E est réflexif, alors $F_T \neq \emptyset$.

Lemme 17 :

Soit E un espace vectoriel normé. Soit J une application de dualité de E. Soit C un sous-ensemble convexe de E. Soit $T : C \to C$ une application hémi-continue*.

S'il existe $f \in C$ tel que :

$$\forall y \in C \quad < y - Ty, J(f - y) > \leq 0 .$$

Alors f est un point fixe de T : $Tf = f$.

En effet :

$$\forall z \in C, \quad \forall t \in [0, 1], \quad f + t(z - f) \in C .$$

De ce fait on a

$$< f + t(z - f) - T(f + t(z - f)) , J(t(f - z)) > \leq 0 .$$

Donc $< f + t(z - f) - T(f + t(z - f)) , J(f - z) > \leq 0.$

En faisant tendre $t \to$, on obtient :

$$< f - Tf, J(f - z) > \leq 0 \text{ et ceci } \forall z \in C .$$

En prenant $z = Tf$, on a $< f - Tf, J(f - Tf) > \leq 0$.

Donc $f = Tf$. ■

---

* Une application est dite hémicontinue si T est continue de $D(T) \cap F \to E$ muni de la topologie $\sigma(E,E')$ pour tout F sous-espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration du lemme 16 :

Soit J l'application de dualité de E ergodiquement faiblement continue. Soit φ la fonction associée à J.

On a pour tout $x,y \in C$:

$$< Tx - Ty, J(x-y) > \leq \|Tx-Ty\| . \|J(x-y)\| \leq \|x-y\| . \varphi(\|x-y\|) .$$

En reprenant les notations du corollaire 3, on considère

$$s(n_1) = \frac{1}{2^{k-m}} \left[S_{2^m} T^{n_1} x + \dots + S_{2^m} T^{n_1 + \dots + n_{2^{k-m}}} x \right] .$$

On a donc

$$\frac{1}{N_1} \cdots \frac{1}{N_{2^{k-m}}} \Sigma \|T s(n_1) - s(n_1+1)\| \leq I(k, N_1) .$$

Or $T s(n_1) - T y$ se décompose en :

$$T s(n_1) - T y = T s(n_1) - s(n_1+1) + s(n_1+1) - s(n_1) + s(n_1) - y + y - T y$$

De ce fait, on a :

$$< y - T y, J(s(n_1) - y) > \leq$$
$$\leq \left[\|T s(n_1) - s(n_1+1)\| + \|s(n_1+1) - s(n_1)\| \right] \|J(s(n_1) - y)\| .$$

Soit $\delta = \operatorname{diam} C$. On a

$$\| J\left(s(n_1) - y\right) \| = \varphi\left(\| s(n_1) - y \|\right) \leq \varphi(\delta) .$$

$$\| s(n_1+1) - s(n_1) \| \leq \frac{\delta}{2^m} .$$

Donc on a :

$$\frac{1}{N_1}\cdots\frac{1}{N_{2^{k-m}}}\Sigma < y - Ty,\ J\left(s(n_1) - y >\right) \le$$

$$\le \frac{1}{N_1}\cdots\frac{1}{N_{2^{k-m}}}\ \Sigma\ \| T\, s(n_1) - s(n_1+1) \|\ \varphi(\delta)$$

$$+ \frac{\delta\ \varphi(\delta)}{2^m}$$

$$\le I\,(k,\, N_1) + \frac{\delta\ \varphi(\delta)}{2^m}$$

Comme J est érgodiquement faiblement continue et que $S_{n_k}x \longrightarrow f$ pour la topologie $\sigma(E,E')$, on considère

$K = \{ n_k \}_{k\in\mathbb{N}}$ et on a

$$\lim_{k\to\infty}\ \overline{\lim_{\substack{N_1\to\infty \\ N_1\in K}}} \cdots \overline{\lim_{\substack{N_{2^{k-m}}\to\infty \\ N_{2^{k-m}}\in K}}} \left| \frac{1}{N_1}\cdots\frac{1}{N_{2^{k-m}}}\ \Sigma < y - Ty,\ J(s(n_1) - y) - J(f-y) > \right| = 0.$$

Donc on obtient

$$< y - Ty,\ J(f - y) > \ \le \frac{\delta\,\varphi(\delta)}{2^m} \qquad \text{et ceci } \forall\, m .$$

D'où

$$< y - Ty,\ J(f - y) > \ \le 0 \qquad \forall\, y \in C .$$

D'après le lemme 17 , f est un point fixe de T. ∎

<u>Démonstration du théorème 15</u> :

Comme E est réflexif et que C est borné, il existe une sous-suite de $S_n x$ qui converge faiblement :

Soit

$$S_{n_k} x \longrightarrow f$$

Or d'après le lemme 16 , on a que f est un point fixe de T.

Donc on a $F_T \neq \emptyset$ et toute sous-suite de $S_n x$ qui converge faiblement, converge faiblement vers un point fixe de T.

Comme $S_n x \in \overline{\text{Conv}\ \omega_w(x)}$, on a si

$$f = \text{lim faible } S_{n_k} x \quad \text{et} \quad f_1 = \text{lim faible } S_{n_l} x$$

f et $f_1 \in \overline{\text{Conv}\ \omega_w(x)}$

Or f et $f_1 \in F_T$.

Donc, d'après les remarques du corollaire 14 , $f = f_1$.

De ce fait, $S_n x \longrightarrow f$ faiblement. ■

__Remarque__ :

Il est faux en général, même dans les espaces de Hilbert, que $S_n x \longrightarrow f$. cf[2]. Dans les espaces de Hilbert, si on ajoute des conditions sur T, par exemple l'imparité, alors $S_n x$ converge fortement vers un point fixe.

§ 6. CONVERGENCE FAIBLE DE $T^n x$.

On a le théorème suivant :

__Théorème 18__ :

Soit E un espace de Banach uniformément lisse. Soit C un sous-ensemble convexe fermé borné de E. Soit T : C → C une contraction de type Γ. Alors on a l'équivalence :

i/ $T^{n+1} x - T^n x \longrightarrow 0$ faiblement

ii/ $T^n x$ converge faiblement vers un point fixe de T.

Démonstration :

D'après le corollaire 3 , on considère :

$$s(n_1) = \frac{1}{2^{k-m}}\left[S_{2^m} T^{n_1} x + \dots + S_{2^m} T^{n_1+\dots+n_{2^{k-m}}} x\right] .$$

On a donc

$$\frac{1}{N_1}\sum_{n_1=0}^{n_1-1} \|T s(n_1) - s(n_1+1)\| \leq I(k,N_1) .$$

Soit J l'application de dualité associée à $\varphi(r) = r$. Alors J est uniformément presque faiblement continue d'après les lemmes 10 et 11.

Or

$$T s(n_1) - Ty = T s(n_1) - s(n_1+1) + s(n_1+1) - s(n_1) + s(n_1) - y + y - Ty .$$

Comme

$$< T s(n_1) - Ty,\ J\left(s(n_1) - y\right) > \ \leq \ \| s(n_1) - y\|^2$$

alors

$$\frac{1}{N_1}\sum_{n_1} < y - Ty,\ J\left(s(n_1) - y\right) > \ \leq I(k,N_1)\,\delta + \frac{\delta^2}{2^m}$$

avec δ = diam C.

Or soit $T^{n_k} x \longrightarrow f$, alors :

$$< y - Ty,\ J(f-y) > \ \leq \frac{1}{N_1}\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \left|< y - Ty,\ J\,s(n_1) - y - J(f-y) >\right|$$

$$+ I(k, N_1)\delta + \frac{\delta^2}{2^m} .$$

Comme $T^{n+1}x - T^n x \rightharpoonup 0$, on a :

$$T^{n+n_k}x \rightharpoonup f .$$

Soit $K = \{n_k\}$. Comme J est uniformément presque faiblement continue, il existe une constante $\varepsilon_{M,\, y-Ty,\, f-y}(p)$ qui ne dépend que de M, y-Ty, f-y et p telle que :

$$\overline{\lim_{\substack{N_2 \in K \\ n_2 \to \infty}}} \cdots \overline{\lim_{\substack{n_{2^{k-m}} \in K \\ n_{2^{k-m}} \to \infty}}} \left| < y - Ty,\ J\left(s(n_1) - y\right) - J(f-y) > \right| \leq \varepsilon_{M,\, y-Ty,\, f-y}(2^{k-m})$$

avec $\varepsilon_{M,\, y-Ty,\, f-y}(p) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$.

Donc on a :

$$< y - Ty,\ J(f-y) > \leq \varepsilon_{M,\, y-Ty,\, f-y}(2^{k-m}) + I(k,N_1)\,\delta + \frac{\delta^2}{2^m} .$$

En faisant tendre successivement N_1, k et m vers l'infini, on a

$$< y - Ty,\ J(f-y) > \leq 0 \qquad \forall\, y \in C.$$

D'où, d'après le lemme 17, f est un point fixe de T.

De plus, si $T^{n_k}x \rightharpoonup f$ et $T^{n_1}x \rightharpoonup f_1$, d'après la proposition 13, $f = f_1$.

Donc on a : $T^n x$ converge faiblement vers un point fixe. ∎

De nombreux problèmes restent encore ouverts. En particulier celui de savoir si dans un espace de Banach uniformément convexe, $S_n x$ converge faiblement vers un point fixe, voir les résultats de R. Bruck [4]. De plus, il serait intéressant de savoir si pour les contractions impaires, $S_n x$ converge toujours fortement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.B. Baillon : Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris t. 280 (1975) 1511-1514.

[2] J.B. Baillon : Un exemple concernant le comportement asymptotique de la solution du problème $\frac{du}{dt} + \partial\varphi(u) \ni 0$, J. of Funct. Analysis 28 (1978) 369-376.

[3] P. Benilan : Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications, Thèse, Orsay 1972.

[4] R. Bruck : A simple proof of the mean ergodic theorem for non-linear contractions in Banach spaces, Preprint.

[5] E. Hewitt, K. Stromberg : Real and abstract analysis, Springer 1965.