Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

J. B. Baillon

Quelques aspects de la théorie des points fixes dans les espaces de Banach - I

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. nº 7, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU · 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 · Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

QUELQUES ASPECTS DE LA THEORIE DES POINTS FIXES DANS LES ESPACES DE BANACH - I -

J.B. BAILLON

Exposé No VII

10 Novembre 1978

§ 1. INTRODUCTION.

On traitera séparément le cas où l'espace est un espace de Hilbert et le cas où l'espace est plus général. En effet, dans le cas hilbertien, de nombreux résultats ont été obtenus qui, s'ils généralisent, ne sont pas aussi simples à démontrer.

Soient E un espace de Banach (réflexif), C un sous-ensemble convexe fermé (borné) de E et $T : C \to C$ une application lipschitzienne. On notera F(T) l'ensemble des points fixes de T et
$S_n x = \frac{1}{n} (x + Tx + \ldots + T^{n-1}x)$.
On va étudier les deux problèmes suivants :

1o) la non-vacuité de F(T)

2o) la convergence de $S_n x$ et de $T^n x$ quand T est une contraction, i.e. $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$, $\forall\ x,y \in C$.

La plupart de ces résultats se trouve dans [1].

§ 2. LA CAS HILBERTIEN.

Goebel et Kirk [5] ont montré que dans un espace de Banach uniformément convexe, il existe une constante $\lambda > 1$ telle que si $\|T^n\|_{Lipsch} \leq \lambda$ et C est borné, alors $F(T) \neq \emptyset$. On va préciser ce résultat dans le cas hilbertien.

<u>Théorème 1</u> : Soit C un convexe fermé borné d'un espace de Hilbert H. Soit $T : C \to C$ une application lipschitzienne telle que

$$\overline{\lim_n}\ \|T^n\|_{Lipsch} < \sqrt{2} \quad , \tag{1}$$

alors F(T) est non vide.

<u>Démonstration</u> : Pour tout $x \in C$, on définit la fonction $y \mapsto d_x(y)$ par

$$d_x(y) = \overline{\lim_n}\ \|y - T^n x\| \quad .$$

La fonction d_x est convexe, continue, positive et possède la propriété suivante :

(2) $$d_x^2(\alpha y_1 + \beta y_2) + \alpha\beta \|y_1 - y_2\|^2 \leq \alpha\, d_x^2(y_1) + \beta\, d_x^2(y_2)$$

pour tout $\alpha,\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$.
De ce fait, il existe un unique $u \in C$ (qui dépend de x) tel que :

$$d_x(u) = \underset{y\in C}{\mathrm{Min}}\, d_x(y) \quad .$$

On notera $u = \psi x$ et $\delta(x) = d_x(u)$.
D'après (2), si on prend $y_1 = \psi x$, et $y_2 = y \in C$, on a

$$\delta^2(x) + \alpha\beta \|\psi x - y\|^2 \leq \alpha\, \delta^2(x) + \beta\, d_x^2(y)$$

$$\delta^2(x) + \alpha \|\psi x - y\|^2 \leq d_x^2(y) \qquad \forall\, \alpha \in [0,1] \quad .$$

On obtient donc l'inégalité :

(3) $$\delta^2(x) + \|\psi x - y\|^2 \leq d_x^2(y) \quad .$$

On a de plus

$$d_x(T^p y) = \overline{\lim_n} \|T^p y - T^n x\| \leq \|T^p\|_{Lip}\, d_x(y) \quad .$$

Donc en remplaçant dans (3) y par $T^p\psi x$, on a :

(4) $$\delta^2(x) + \|\psi x - T^p\psi x\|^2 \leq \|T^p\|_{Lip}^2\, \delta^2(x) \quad .$$

En passant à la limite supérieure selon p, on obtient :

$$d_{\psi x}^2(\psi x) \leq k\, \delta^2(x)$$

avec $k = \overline{\lim_n} \|T^n\|_{Lip}^2 - 1 < 1$ d'après (1).
En utilisant de nouveau (3), on a l'inégalité suivante :

$$\delta^2(\psi x) \leq \delta^2(\psi x) + |\psi x - \psi^2 x|^2 \leq d_{\psi x}^2(\psi x) \leq k\, \delta^2(x) \quad ,$$

ce qui donne :

$$\delta^2(\psi^n x) \leq k^n\, \delta^2(x) \quad .$$

De ce fait,

$$\|\psi^n x - \psi^{n+1}x\|^2 \le k^p \ \delta^2(x) \quad .$$

La suite $\psi^n x$ est donc fortement convergente car la série $(\psi^{n+1}x - \psi^n x)$ est normalement convergente. Soit f la limite de $\psi^n x$: $\psi^n x \rightharpoonup f$. D'après (4), on a :

$$\|\psi^n x - T\psi^n x\|^2 \le (\|T\|^2_{Lip} - 1)k^{n-1} \ \delta(x) \quad .$$

En passant à la limite, on obtient

$$\|f - Tf\| = 0 \quad .$$

Donc $$F(T) \ne \emptyset \quad . \qquad \blacksquare$$

[<u>Corollaire 2</u> : Si T est une contraction, $F(T) \ne \emptyset$.

<u>Contre-exemple</u> : Soient $H = P^2(\mathbb{N})$ et $C = \{x \ge 0, \ |x|_2 \le 1\}$. On définit $T : C \to C$ par :

$$Tx = (\cos \frac{\pi}{2} \ |x|_2)e_o + \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} \ |x|_2}{|x|_2}\right) Rx \quad ,$$

où R est l'opérateur de shift : $R[(x_o, x_1, x_2, \dots,)] = (0, x_o, x_1, \dots)$.
Alors T n'a pas de point fixe et $\|T^n\|_{Lipsch} = \frac{\pi}{2}$.

On va s'intéresser maintenant à la convergence de $S_n x$ quand T est une contraction (C est borné).

[<u>Théorème 3</u> : Soit $T : C \to C$ une contraction avec C convexe fermé borné d'un espace de Hilbert : alors pour tout $x \in C$, $S_n x$ converge faiblement vers un point fixe de T.

Pour démontrer ce théorème, on a besoin des lemmes suivants :

[<u>Lemme 4</u> : Soit $T : C \to C$ une contraction et soit x_n une suite telle que $x_n - Tx_n \to 0$ et $x_n \rightharpoonup f$. Alors $Tf = f$.

<u>Démonstration</u> : On a $(Tx_n - Ty, x_n - y) \leq |Tx_n - Ty| \,.\, |x_n - y| \leq |x_n - y|^2$. Donc $(Tx_n - x_n, x_n - y) + (y - Ty, x_n - y) \leq 0$. En passant à la limite, on a

$$(y - Ty, f - y) \leq 0 \quad \text{et ceci } \forall\, y \in C \quad .$$

En prenant $y = f + t(z - f)$ avec $0 \leq t \leq 1$, on a

$$(f + t(z - f) - T(f + t(z - f)), f - z) \leq 0 \quad .$$

Ainsi quand on fait tendre t vers 0, on obtient l'inégalité :

$$(f - Tf, f - z) \leq 0 \quad \forall\, z \in C \quad .$$

ce qui donne, si on choisit $z = Tf$.

$$|f - Tf|^2 = 0 \quad . \qquad \blacksquare$$

<u>Lemme 5</u> : Sous les hypothèses du lemme 4, on a l'inégalité :

$$|T\, S_n x - S_n X| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\, |TS_n x - x| \quad .$$

<u>Démonstration</u> : On a l'égalité :

$$|TS_n x - S_n x|^2 + \frac{1}{2n^2} \sum_{i,j=0}^{n-1} |T^i x - T^j x|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |TS_n x - T^i x|^2 \quad .$$

Comme T est une contraction, on a

$$|TS_n x - S_n x|^2 + \frac{1}{2n^2} \sum_{i,j} |T^i x - T^j x|^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-2} |S_n x - T^i x|^2 + \frac{1}{n}\, |TS_n x - x|^2 \quad .$$

Après simplification :

$$|TS_n x - S_n x|^2 \leq \frac{1}{n}\, (|TS_n x - x|^2 - |TS_n x - T^{n-1} x|^2) \quad . \qquad \blacksquare$$

<u>Définition</u> : $\omega(x) = \{u / u = \lim \text{ faible } T^{n_k} x\}$ représente l'<u>orbite faible</u> de x.

<u>Lemme 6</u> : Sous les hypothèses du théorème 3, $\omega(x)$ est "orthogonal" à $F(T)$ en ce sens que :
$\forall\, u_1, u_2 \in \omega(x)$, $\forall\, f_1, f_2 \in F(T)$

$$(u_1 - u_2, f_1 - f_2) = 0 \quad .$$

Démonstration : Si $f \in F(T)$, $|T^n x - f|$ est décroissante. Soit $d(f) = \lim |T^n x - f|$. De plus, on a les égalités :

$$|T^n x - f_1|^2 = |T^n x - f_2|^2 + 2(f_2 - f_1, T^n x - f_2) + |f_2 - f_1|^2$$

$$d^2(f_1) = d^2(f_2) + 2(f_2 - f_1, u_1 - f_2) + |f_2 - f_1|^2$$

$$d^2(f_1) = d^2(f_2) + 2(f_2 - f_1, u_2 - f_2) + |f_2 - f_1|^2 \quad .$$

En soustrayant, on a $(f_2 - f_1, u_2 - u_1) = 0$. ■

Conséquence : $\overline{\text{Conv}}\ \omega(x)$ est "orthogonal" à $F(T)$, ce qui implique que $\overline{\text{Conv}}\ \omega(x) \cap F(T)$ contient au plus un point.

Démonstration du théorème 3 : D'après les lemmes 3 et 4, si $S_{n_k} x \rightharpoonup f$, f est un point fixe. De ce fait $\overline{\text{Conv}}\ \omega(x) \cap F(T) = \{f\}$. D'où $S_n x \rightharpoonup f$. ■

Caractéristique du point f : $F(T)$ est un ensemble convexe fermé non vide. Soit $f = \lim\limits_{n\to\infty}$ faible $S_n x$. Alors on a

$$f = \lim_{n\to\infty} \text{forte } \mathrm{Proj}_{F(T)}\ T^n x \quad .$$

Proposition 7 [ ] : Soit $T : C \to C$ une contraction, alors on a l'équivalence :

$$T^n x \longrightarrow f \Longleftrightarrow T^{n+1} x - T^n x \rightharpoonup 0 \quad .$$

Démonstration : En reprenant le lemme 5, on a

$$|TS_n T^p x - S_n T^p x| \leq \frac{M}{\sqrt{n}} \qquad \text{où } M = \text{diam } (C) \quad .$$

qui, associée à l'inégalité suivante :

$$(TS_n T^p x - S_n T^p x, S_n T^p x - y) + (y - Ty, S_n T^p x - y) \leq 0$$

donne :

$$(y - Ty, S_n T^p x - y) \leq \frac{M^2}{\sqrt{n}} \quad .$$

Soit $f = \lim$ faible $T^{p_k} x$. Alors si $T^{n+1} x - T^n x \rightharpoonup 0$, on a $S_n T^{p_k} x \rightharpoonup f$, et de ce fait

$$(y - Ty, f - y) \leq \frac{M^2}{\sqrt{n}} \quad \forall\, n \quad .$$

Donc $(y - Ty, f - y) \leq 0$, $\forall\, y \in C$. D'où $f = Tf$. D'autre part $\omega(x) \cap F(T) = \{f\}$, d'après le lemme 5. Donc $T^n x \rightharpoonup f$. ∎

<u>Théorème 8</u> : Soient C un convexe fermé symétrique, i.e. $C = -C$ et $T : C \to C$ une contraction impaire, i.e. $T(-x) = -Tx$, alors $S_n x$ converge fortement vers un point fixe de T.

<u>Lemme 9</u> : Sous les hypothèses du théorème 8, on a

$$(T^n x, T^{n+i} x) \xrightarrow[n\to\infty]{} a(i) \quad \text{uniformément} \quad .$$

<u>En effet</u>,

$$\pm 2[(T^{n+1}x, T^{n+i+1}x) - (T^n x, T^{n+i}x)] =$$

$$(|T^n x|^2 - |T^{n+1}x|^2) + (|T^{n+i}x|^2 - |T^{n+i+1}x|^2)$$

$$+ (|T^{n+i+1}x \pm T^{n+1}x|^2 - |T^{n+i}x \pm T^n x|^2) \quad .$$

Donc en remarquant que $|T^{n+i}x \pm T^n x|$ est décroissant, on a

$$2|(T^{n+1}x, T^{n+i+1}x) - (T^n x, T^{n+i}x)| \leq$$

$$(|T^n x|^2 - |T^{n+1}x|^2) + (|T^{n+i}x|^2 - |T^{n+i+1}x|^2) \quad .$$

Comme $T0 = 0$, $|T^n x|$ est décroissant. D'où $(T^n x, T^{n+i}x) \to a(i)$ et

$$|(T^n x, T^{n+i}x) - a(i)| \leq |T^n x|^2 - \lim_{p\to\infty} |T^p x|^2 = \varepsilon(n) \quad . \quad ∎$$

<u>Démonstration du théorème 8</u> : On sait d'après le théorème 3 que $S_n x \rightharpoonup f$. Pour prouver que $S_n x \to f$, il suffit de prouver que $\overline{\lim_n}\, |S_n x| \leq |f|$. On a

$$|S_n T^p x|^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} (T^{p+i}x, T^{p+j}x) \quad .$$

Donc

$$|S_n T^p x|^2 \le \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} a(|i-j|) + \varepsilon(p)$$

(1) $$|S_n T^p x|^2 \le \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\, a(i) + \varepsilon(p) \quad .$$

Or

$$\left|\frac{2}{n^2} \sum_i (n-i)a(i) - \frac{2}{n^2} \sum_i (n-i)(T^{m+i}x, T^m x)\right| \le \varepsilon(m)$$

$$\left|\frac{2}{n^2} \sum_i (n-i)a(i) - \frac{2}{n^2} \sum_i i(S_i T^m x, T^m x)\right| \le \varepsilon(m) \quad .$$

Donc $\underline{\lim}_n \frac{2}{n^2} \sum_i (n-i)a(i) \le (f, T^m x) + \varepsilon(m)$ car $S_n T^m x \rightharpoonup f$ d'après le théorème 3.

De ce fait

$$\underline{\lim}_n \frac{2}{n^2} \sum_i (n-i)a(i) \le (f, S_m x) + \frac{1}{m} \sum_i \varepsilon(i) \quad .$$

Donc

$$\underline{\lim}_n \frac{2}{n^2} \sum_i (n-i)a(i) \le |f|^2 \quad .$$

En reportant dans (1) on a :

$$\underline{\lim}_n |S_n T^p x|^2 \le |f|^2 + \varepsilon(p) \quad .$$

Comme $\underline{\lim}_n |S_n x| = \underline{\lim}_n |S_n T^p x|$, on a

$$\underline{\lim}_n |S_n x|^2 \le |f|^2 + \varepsilon(p) \quad .$$

D'où $$\underline{\lim}_n |S_n x|^2 \le |f|^2 \quad . \qquad \blacksquare$$

<u>Proposition 10</u> : Soit $T : C \to C$ une contraction impaire et C symétrique. Alors on a l'équivalence :

$$T^n x \longrightarrow f \Longleftrightarrow T^{n+1}x - T^n x \longrightarrow 0 \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Si $T^{n+1}x - T^n x \to 0$, d'après la proposition 7, $T^n x \rightharpoonup f$. Comme 0 est un point fixe de T, $|T^n x|$ est décroissant, soit d sa limite. On a l'égalité :

$$|T^{n+i}x + T^nx|^2 + |T^{n+i}x - T^nx|^2 = 2|T^nx|^2 + 2|T^{n+i}x|^2 \quad .$$

En passant à la limite selon n, on a :

$$\lim_n |T^{n+i}x + T^nx|^2 + 0 = 4d^2 \quad .$$

Donc $4d^2 \leq |T^{n+i}x + T^nx|^2 = |T^{n+i}x|^2 + |T^nx|^2 + 2(T^{n+i}x, T^nx)$. En passant à la limite selon i, on a :

$$4d^2 \leq d^2 + 2(f, T^nx) + |T^nx|^2$$

Donc $4d^2 \leq d^2 + 2|f|^2 + d^2$. D'où $\lim |T^nx| \leq |f|$ et $T^nx \to f$. ■

Remarque : On peut construire un exemple dans lequel S_nx converge faiblement mais non fortement vers un point fixe même si $T^{n+1}x - T^n_x \to 0$.

§ 3. PROPRIETES DES POINTS FIXES DANS LES ESPACES DE BANACH.

Soit C un convexe fermé borné d'un espace de Banach E et soit $T : C \to C$ une contraction. On dira que E possède la propriété des points fixes si l'ensemble F(T) des points fixes de T est non vide. On a vu au § 2 qu'un espace de Hilbert possède la propriété des points fixes. Néanmoins il existe des espaces de Banach qui ne possèdent pas la propriété des points fixes : ℓ_1, c_0, L^1, $\mathcal{C}$. On va donner un exemple typique :

Dans $\mathcal{C}[0,1]$, ensemble des fonctions continues muni de la norme max, on considère $C = \{f \mid 0 \leq f \leq 1,\ f_1(0) = 0,\ f(1) = 1\}$. Alors la contraction $T : C \to C$ définie par $(Tf)(x) = xf(x)$ n'admet pas de point fixe.

Néanmoins pour les espaces de Banach réflexifs, un certain nombre de résultats dus à Browder [3], Göhde [4] et Kirk [6] montrent que les espaces de Banach réflexif à structure normale possèdent la propriété des points fixes. On va généraliser ici un peu ces résultats.

On dira que l'ensemble convexe fermé K est T-invariant si $T(K) \subset K$. On dira que K est minimal sous T si K ne contient aucun sous-ensemble convexe fermé propre T-invariant. On va maintenant supposer que E est un espace de Banach réflexif et C minimal sous T, ce qui est toujours possible par le lemme de Zorn car E est réflexif. Comme C est minimal sous T, on a évidemment:

$$\overline{\text{Conv}}\ T(C) = C \quad .$$

Une propriété importante est donnée par le lemme suivant :

Lemme 11 : Soit $\varphi : C \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, s.c.i. positive telle que $\varphi(Tx) \le \varphi(x)$, alors $\varphi \equiv$ Constante.

En effet, l'ensemble $C_o = \{x \in C/\varphi(x) = \operatorname{Inf}_y \varphi(y)\}$ est un ensemble convexe fermé non vide T-invariant contenu dans C. Donc $C_o = C$ et de ce fait $\varphi \equiv$ const. ■

Soit D le diamètre de C, i.e. $D = \sup_{x,y\in C} |x - y|$. On notera $r_x(C) = \sup_{y\in C} |x - y|$. On a le lemme suivant :

Lemme 12 : On a l'égalité suivante :

$$r_x(C) = D \quad \text{pour tout } x \in C \quad .$$

En effet, la fonction $x \mapsto r_x(C)$ est une fonction convexe, s c.i., positive de C dans R, telle que $r_{Tx}(C) \le r_x(C)$ car : $r_{Tx}(C) = \sup_{y\in C} |Tx - y|$. Comme $\overline{\text{Conv}}\ T(C) = C$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $y \in C$, une combinaison convexe telle que $|\Sigma\, \alpha_i\, Tz_i - y| \le \varepsilon$. Donc

$$|Tx - y| \le |Tx - \sum_i \alpha_i\, Tz_i| + \varepsilon \le \Sigma\, \alpha_i\, |Tx - Tz_i| + \varepsilon$$

$$\le \Sigma\, \alpha_i\, |x - z_i| + \varepsilon \le r_X(C) + \varepsilon \quad .$$

On obtient $r_{Tx}(C) \le r_x(C) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. En utilisant le lemme 11, on a

$$r_x(C) = D \quad \text{pour tout } x \in C \quad . \qquad ■$$

On a le résultat classique [7] suivant :

Théorème 13 : Les espaces de Banach réflexifs à structure normale, i.e. pour tout convexe C borné non réduit à 1 point $\operatorname{Inf}_{x\in C} r_x(C) < \operatorname{diam}(C)$, possèdent la propriété des points fixes.

Démonstration : D'après le lemme 12, on a $r_x(C) = D$ pour tout $x \in C$. Comme l'espace est à structure normale, C est réduit à un point. Soit $C = \{f\}$. Comme C est T-invariant, $Tf = f$. ■

Remarques :

- Les espaces de Banach uniformément convexes sont à structure normale, donc possèdent la propriété des points fixes.
- Soit $\ell_2(\mathbb{N})$ muni de la norme $|\cdot|_\lambda = \mathrm{Max}(|\cdot|_{\ell^2}, \lambda|\cdot|_{\ell^\infty})$. Alors pour $\lambda < \sqrt{2}$ $(\ell_2, |\cdot|_\lambda)$ est un espace à structure normale. Mais pour $\lambda \geq \sqrt{2}$ $(\ell_2, |\cdot|_\lambda)$ n'est plus un espace à structure normale bien que pour $\lambda \leq 2$, $(\ell_2, |\cdot|_\lambda)$ possède la propriété des points fixes.

On rappelle que le module de lissité d'un espace de Banach E est défini par :

$$\rho(\tau) = \mathrm{Sup}\{\frac{1}{2}\ |x+y| + \frac{1}{2}\ |x-y| - 1\ ;\ |x| = 1 \text{ et } |y| \leq \tau\} \quad .$$

On remarquera que E est un espace de Banach uniformément lisse si et seulement si $\frac{\rho(\tau)}{\tau} \xrightarrow[\tau \downarrow 0]{} 0$.

De plus on a le lemme suivant analogue au lemme 12 dont la démonstration est laissée au lecteur.

Lemme 14 : Si C est minimal sous T, on considère une suite $x_n \in C$ telle que $x_n - Tx_n \to 0$, alors

$$\overline{\lim_n}\ |x_n - y| = \lim_n\ |x_n - y| = D \quad \text{pour tout } y \in C \quad .$$

Si de plus on a $\overline{\lim_m}\ \overline{\lim_n}\ |T\frac{x_n + x_m}{2} - \frac{1}{2}(x_n + x_m)| = 0$, alors

$$\overline{\lim_n}\ \overline{\lim_m}\ |\frac{1}{2}(x_n + x_m) - y| = D \quad \text{pour tout } y \in C \quad .$$

On a la proposition suivante :

Proposition 15 : Les espaces de Banach réflexifs tels que $\lim_{\tau \downarrow 0} \frac{\rho(\tau)}{\tau} < \frac{1}{2}$, en particulier les espaces de Banach uniformément lisses, possèdent la propriété des points fixes.

Démonstration : Soit $y \in C$ et pour $0 < r < 1$, $\exists\ !\ x_r$ tel que

$x_r = ry + (1-r)Tx_r$ car la fonction $z \mapsto ry + (1-r)Tz$ est une contraction stricte de rapport $(1-r)$. Comme

$$|x_r - Tx_r| = r|y - Tx_r| \leq rD \quad ,$$

on a $x_r - Tx_r \to 0$ quand $r \to 0$. De ce fait, il existe une suite $x_n \in C$ telle que :

$$x_n \rightharpoonup \bar{x} \quad \text{et} \quad x_n - Tx_n \longrightarrow 0 \quad .$$

On a de ce fait pour $0 < \tau < 1$

$$\frac{1}{2}\,|x_n - x_m + \tau(\bar{x} - x_m)| + \frac{1}{2}\,|x_n - x_m - \tau(\bar{x} - x_m)| \leq$$
$$\leq |x_n - x_m|\,\left[1 + \rho\left(\frac{\tau|\bar{x} - x_m|}{|x_n - x_m|}\right)\right] \quad .$$

En passant à la limite en n et en utilisant le lemme 14, on a

$$\frac{1}{2}\,\overline{\lim_n}\,|x_n - x_m + \tau(\bar{x} - x_m)| + \frac{D}{2}\left[1 + \rho\left(\frac{\tau|\bar{x}-x_m|}{D} + \right)\right]$$
$$\frac{1}{2}\,(1+\tau)|\bar{x} - x_m| \leq \frac{D}{2}\left[1 + 2\rho\left(\frac{\tau|\bar{x} - x_m|}{D} + \right)\right] \quad .$$

Donc en passant à la limite en m, on a :

$$\frac{1}{2}\,(1+\tau)D \leq \frac{D}{2} + D\,\rho(\tau_+)$$

car ρ est croissante. Donc, si $D \neq 0$, on a

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \frac{\rho(\tau)}{\tau} \geq \frac{1}{2}$$

car $\frac{\rho(\tau)}{\tau}$ est décroissante. ■

<u>Proposition 16</u> : Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\| = \mathrm{Max}(\sqrt{2}\,|\cdot|_1 \,,\, |\cdot|_2)$ où $|\cdot|_2$ est une norme hilbertienne de E et $|\cdot|_1$ une norme telle que $|\cdot|_1 \leq |\cdot|_2$, alors E possède la propriété des points fixes.

<u>Démonstration</u> : On a vu qu'il existait une suite x_n telle que $x_n - Tx_n \to 0$ (cf. proposition 15). On peut supposer de plus que $x_n \rightharpoonup \bar{x}$ et que $|x_n - \bar{x}|_2 \to d$. On considère l'égalité :

$$|T(\frac{x_n+x_m}{2}) - \frac{1}{2}(Tx_n+Tx_m)|_2^2 + \frac{1}{4}|Tx_n - Tx_m|_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2}|T(\frac{x_n+x_m}{2}) - Tx_n|_2^2 + \frac{1}{2}|T(\frac{x_n+x_m}{2}) - Tx_m|_2^2 \quad .$$

En prenant les limites supérieures en n et en m, on obtient :

$$\overline{\lim_n}\ \overline{\lim_m}\ |T(\frac{x_n+x_m}{2}) - \frac{1}{2}(x_n+x_m)|_2^2 + \frac{d^2}{2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\ \overline{\lim_n}\ \overline{\lim_m}\ \|x_n - x_m\|^2 = \frac{D^2}{4} \quad .$$

Comme $|.|_2 \leq \|.\| \leq \sqrt{2}\ |.|_2$, on a $d \leq D \leq \sqrt{2}\ d$. D'après l'inégalité précédente, on a :

$$d = \sqrt{2}\,D \quad \text{et} \quad \overline{\lim_n}\ \overline{\lim_m}\ |T(\frac{x_n+x_m}{2}) - \frac{1}{2}(x_n+x_m)| = 0 \quad .$$

En utilisant le lemme 14, on a :

$$\overline{\lim_n}\ \overline{\lim_m}\ \|\frac{1}{2}(x_n+x_m) - \bar{x}\| = D \quad .$$

Or

$$|\frac{1}{2}(x_n+x_m) - \bar{x}|_2 \leq \|\frac{1}{2}(x_m+x_m) - \bar{x}\| \leq \sqrt{2}\ |\frac{1}{2}(x_n+x_m) - \bar{x}|_2 \quad .$$

Donc $$\frac{d}{\sqrt{2}} \leq D \leq d \quad .$$

D'où $$D = 0 \quad . \qquad \blacksquare$$

Deux exemples typiques de tels espaces sont :

$L^2([0,1])$ muni de la norme $\|.\| = \mathrm{Max}(|.|_{L^2}, \sqrt{2}\ |.|_{L^1})$

et

$\ell^2(\mathbb{N})$ avec la norme $|.|_{\sqrt{2}} = \mathrm{Max}(|.|_{\ell^2}, \sqrt{2}\ |.|_{\ell^\infty})$.

<u>Proposition 17</u> : L'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ muni de la norme $|.|_\lambda = \mathrm{Max}(|.|_{\ell^2}, \lambda|.|_{\ell^\infty})$ possède la propriété des points fixes si $\lambda \leq 2$.

La démonstration de ce résultat se trouve dans [2].

Au problème de savoir si les espaces réflexifs ont la propriété des points fixes, je serai tenté de dire non ; quand aux espaces super-réflexifs il me semble que la propriété doit être vraie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.B. Baillon : Thèse, Paris 1978.

[2] J.B. Baillon et R. Schöneberg : Preprint.

[3] F. Browder : Non-expansive non linear operators in a Banach space, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 54 (1965) p. 1041-1044.

[4] D. Göhde : Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung, Math. Nachr. 30 (1965) p. 251-258.

[5] K. Goebel et W.A. Kirk : A fixed point theorem for transformations whose iterates have uniform Lipschitz constant, Studia Math., 47 (1973) p. 135-140.

[6] W.A. Kirk : A fixed point theorem for mappings which do not increase distance, Amer. Math. Monthly 72 (1965), p. 1000-1006.

[7] W.A. Kirk : Fixed point theorems for non expansive mappings, Proc. of Symposia in Pure Math., A.M.S. 18(1), 1970, p. 162-168.