M. Gatesoupe

Problèmes de complémentation de sous-algèbres dans l'algèbre des séries de Fourier en deux variables absolument convergentes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 5, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A5_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

PROBLEMES DE COMPLEMENTATION DE SOUS-ALGEBRES DANS L'ALGEBRE DES SERIES DE FOURIER EN DEUX VARIABLES ABSOLUMENT CONVERGENTES

M. GATESOUPE

(Université de Nantes)

Exposé No V

27 Octobre 1978

A étant une algèbre de Banach commutative, B une sous-algèbre fermée dans A, on dira que B est bien complémenté dans A s'il existe une projection linéaire continue P de A sur B telle que pour tout a dans A et tout b dans B on ait

$$P(ab) = b\, P(a) \quad .$$

On dira alors que P est une espérance conditionnelle de A sur B.
En particulier considérons un espace compact Ω, la tribu borélienne $\mathcal{A}$ de Ω, et $\mathcal{B}$ une sous-tribu. Soit A une algèbre de Banach topologiquement contenue dans l'algèbre $\mathcal{C}(\Omega)$ de toutes les fonctions continues sur Ω à valeurs complexes. Soit B la sous-algèbre fermée de A constituée par les fonctions de A qui sont $\mathcal{B}$-mesurables. Soit $d\mu$ une mesure de probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$ et $\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$ l'espérance conditionnelle au sens des probabilités projection orthogonale de $L^2(\Omega;\mathcal{A};d\mu)$ sur $L^2(\Omega;\mathcal{B};d\mu)$.

On peut se demander si la restriction de $\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$ à A est un endomorphisme continu dans A. Si la réponse est positive, B est bien complémenté par l'espérance conditionnelle au sens des probabilités $\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$.

§ I -

On se place dans le cas particulier suivant : $\mathbb{T}$ désigne le tore à une dimension identifié à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. $A(\mathbb{T})$ désigne l'algèbre de Banach des séries de Fourier 2π-périodiques absolument convergentes :

$$f(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} a_p\, e^{ipx}$$

avec la norme $\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_p |a_p| < +\infty$ et le produit ponctuel.
Ω est le tore à deux dimensions $\mathbb{T}^2$ identifié à $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})\times(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $A = A(\mathbb{T}^2)$ est l'algèbre de Banach des séries de Fourier en deux variables, 2π-périodique en chacune d'elles, absolument convergentes :

$$f(x,y) = \sum_{p,q} a_{p,q}\, e^{i(px+qy)}$$

avec la norme $\|f\|_{A(\mathbb{T}^2)} = \sum_{p,q} |a_{p,q}| < +\infty$ et le produit ponctuel.

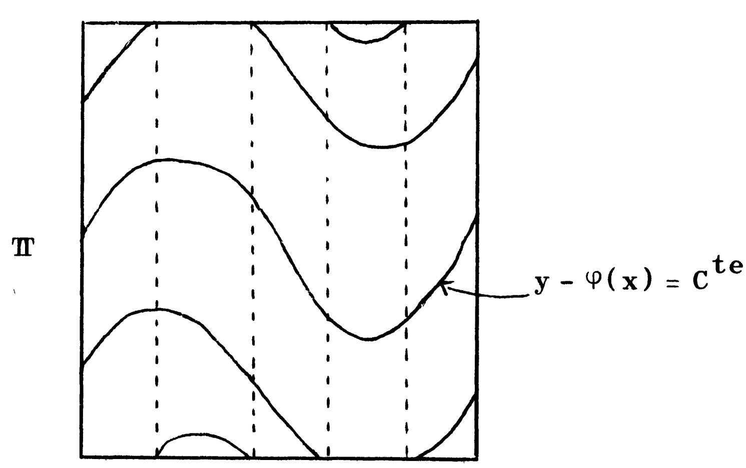
Choisissons une application continue φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $e^{i\varphi}$ appartienne à $A(\mathbb{T})$. On associe à φ l'application Φ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(x,y) = y - \varphi(x) \quad .$$

$\mathcal{B}$ est la sous-tribu des boréliens de $\mathbb{T}^2$ correspondant à l'image réciproque par Φ des boréliens de $\mathbb{R}$.
La sous-algèbre B de A $A(\mathbb{T}^2)$ est l'ensemble des fonctions de A constantes sur les lignes de niveaux de $\mathbb{T}^2$ correspondant aux lignes de niveaux de $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\Phi(x,y) = C^{te} \quad .$$

B est donc l'ensemble des fonctions de A de la forme $F \circ \Phi$, où F est une fonction continue sur $\mathbb{T}$. Désignons par $\tilde{B}$ la sous-algèbre de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ des fonctions F telles que $F \circ \Phi$ appartienne à A.



Par transport de structure $\tilde{B}$ est isométriquement isomorphe à l'algèbre de Banach B, avec la norme $\|F\|_{\tilde{B}} = \|F \circ \Phi\|_{A(\mathbb{T}^2)}$. Pour $x = x_0$ fixé, la fonction $F(\Phi(x_0,y)) = F(y - \varphi(x_0))$ est une fonction de $A(\mathbb{T})$ en la variable y. La fonction F est donc elle-même une fonction de $A(\mathbb{T})$, c'est une série de Fourier

$$F(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int} \quad \text{avec} \quad \sum_n |a_n| < +\infty \quad . \tag{1}$$

$F \circ \Phi$ étant une fonction de $A(\mathbb{T}^2)$, c'est une série de Fourier

$$F(\Phi(x,y)) = \sum_{p,q\in\mathbb{Z}^2} b_{p,q} \, e^{i(px+qy)} \quad , \tag{2}$$

avec
$$\|F\circ\Phi\|_{A(\mathbb{T}^2)} = \sum_{p,q} |b_{p,q}| \quad . \tag{3}$$

D'après (1) et (2) on a

$$\sum_n a_n \, e^{in(y-\varphi(x))} = \sum_q e^{iqy} \left(\sum_p b_{p,q} \, e^{ipx}\right)$$

donc
$$a_n \, e^{-in\varphi(x)} = \sum_p b_{p,n} \, e^{ipx} \tag{4}$$

et
$$|a_n| \; \|e^{-in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_p |b_{p,n}| \quad . \tag{5}$$

Ainsi, d'après (3) et (5) :

$$\|F\circ\Phi\|_{A(\mathbb{T}^2)} = \sum_{n,p} |b_{p,n}| = \sum_n |a_n| \; \|e^{-in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \quad . \tag{6}$$

Posons $\omega(n) = \|e^{-in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$, on remarque que $\|e^{-in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = \|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \geq 1$, et que ω est un poids sous-multiplicatif sur $\mathbb{Z}$:
$\omega(n_1+n_2) \leq \omega(n_1)\,\omega(n_2)$ pour tout couple (n_1,n_2) de $\mathbb{Z}^2$.
On associe à ω l'algèbre de Banach $A(\mathbb{T};\omega)$ (dite algèbre à poids, ou algèbre de Beurling) des séries de Fourier 2π-périodiques absolument convergentes avec le poids ω :

$$F(t) = \sum_n a_n \, e^{int} \quad \text{avec} \quad \|F\|_{A(\mathbb{T};\omega)} = \sum_n |a_n| \, \omega(n) < +\infty \quad .$$

Les calculs précédents montrent que $\widetilde{B}$ est identique à $A(\mathbb{T};\omega)$:

<u>Proposition 1</u> : La sous-algèbre de $A(\mathbb{T}^2)$ des fonctions constantes sur les lignes de niveaux $y-\varphi(x) = C^{te}$, est isométriquement isomorphe à l'algèbre à poids $A(\mathbb{T};\omega)$ des séries de Fourier 2π-périodiques absolument convergentes avec le poids ω :

$$F(t) = \sum a_n \, e^{int} \quad ,$$

avec
$$\|F\|_{A(\mathbb{T};\omega)} = \|F(y-\varphi(x))\|_{A(\mathbb{T}^2)} = \sum_n |a_n| \, \omega(n)$$

où $\omega(n) = \|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$.

La sous-algèbre B dépendant de φ sera notée B_φ. Remarquons que si la série de Fourier de la fonction $e^{i\varphi}$ choisie continue et 2π-périodique n'était pas de plus choisie absolument convergente, contrairement à l'hypothèse faite, c'est-à-dire si φ n'était pas choisie assez régulière, alors la sous-algèbre B des fonctions de $A(\mathbb{T}^2)$ constantes sur les lignes de niveaux $y-\varphi(x)=C^{te}$, serait réduite à la sous-algèbre triviale des fonctions constantes sur $\mathbb{T}^2$.

La proposition 1 permet facilement de montrer :

Proposition 2 : Pour toute application φ, B_φ est complémenté dans $A(\mathbb{T}^2)$.

Démonstration : En dehors du cas trivial où B_φ est réduit aux constantes, on utilise le résultat général suivant : dans un espace $L^1(X;\mu)$ un sous-espace fermé E qui est lui-même isométriquement isomorphe à un espace $L^1(Y;\nu)$, est complémenté dans $L^1(X;\mu)$. (Le résultat vaut encore si E est isomorphe à $L^1(Y;\nu)$ avec une distance d'isomorphisme assez proche de 1 : Théorème de L. Dor (Ann. of Math. (1975)). Ici $A(\mathbb{T}^2)$ est isométriquement isomorphe à $\ell^1(\mathbb{Z}^2)$ et B_φ, sous-espace fermé de $A(\mathbb{T}^2)$, est isométrique à $\ell^1(\mathbb{Z};\omega)$ d'après la proposition 1.

On peut, sans utiliser ce résultat général, donner une démonstration directe, suivant une idée de N. Leblanc (communication orale), de la complémentation, démonstration qui a l'avantage d'expliciter une projection : pour tout p de $\mathbb{Z}$, on développe en série de Fourier $e^{-ip\varphi}$:

$$e^{-ip\varphi(x)} = \sum_n c(n,p)e^{inx} .$$

Posons $$\alpha(n,p) = 0 \quad \text{si} \quad c(n,p) = 0$$

et sinon $$\alpha(n,p) = \frac{1}{\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}} \times \frac{\overline{c(n,p)}}{|c(n,p)|} .$$

On définit une application linéaire continue P de norme 1 de $A(\mathbb{T}^2)$ dans B_φ en posant pour tout couple (n,p) de $\mathbb{Z}^2$:

$$P(e^{i(nx+py)}) = \alpha(n,p)\, e^{ip(y-\varphi(x))} ,$$

car

$$\|e^{ip(y-\varphi(x))}\|_{A(\mathbb{T}^2)} = \|e^{ipy}\|_{A(\mathbb{T})} \times \|e^{-ip\varphi(x)}\|_{A(\mathbb{T})} = \|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \quad .$$

P est une projection sur B_φ car pour tout p de $\mathbb{Z}$:

$$P(e^{ip(y-\varphi(x)}) = P(\sum_n c(n,p)\ e^{i(nx+py)})$$

$$= \frac{1}{\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}} \sum_n c(n,p) \frac{\overline{c(n,p)}}{|c(n,p)|} e^{ip(y-\varphi(x))}$$

$$= e^{ip(y-\varphi(x)} \quad .$$

§ II -

On peut se demander si B_φ est bien complémenté. Bien que cette propriété ait un caractère algébrique, la réponse dépend de la régularité de φ : nous verrons que si φ est de classe C^2 alors B_φ est bien complémenté, mais qu'il n'en est pas de même si φ est linéaire par morceaux (et non linéaire). Pour donner une condition nécessaire et suffisante de bonne complémentation, précisons quelques notations : $PM(\mathbb{T})$ désigne l'espace dual de $A(\mathbb{T})$, le produit scalaire de dualité d'une forme linéaire S, dite pseudo-mesure sur $\mathbb{T}$, avec une fonction f de $A(\mathbb{T})$ est

$$\langle S,f\rangle = \sum_n \hat{S}(-n)\ \hat{f}(n) \quad ,$$

où $\hat{S}(n) = \langle S,e^{-int}\rangle$ et $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\ f(t)\ dt$ sont les n-ièmes coefficients de Fourier respectivement de S et f. La norme de la pseudo-mesure S est

$$\|S\|_{PM(\mathbb{T})} = \sup_n |\hat{S}(n)| \quad .$$

$PM(\mathbb{T})$ est un module sur $A(\mathbb{T})$: S et g appartenant respectivement à $PM(\mathbb{T})$ et à $A(\mathbb{T})$, gS est la pseudo-mesure sur $\mathbb{T}$ définie pour tout f de $A(\mathbb{T})$ par :

$$\langle gS,f\rangle = \langle S,fg\rangle$$

et $$\|gS\|_{PM(\mathbb{T})} \leq \|g\|_{A(\mathbb{T})} \|S\|_{PM(\mathbb{T})} \quad .$$

Avec ces notations on a :

Proposition 3 : B_φ est bien complémenté si et seulement si il existe une pseudo-mesure $S \neq 0$ dans $PM(\mathbb{T})$ et une constante $C > 0$ telle que pour tout p de $\mathbb{Z}$

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \times \|e^{ip\varphi}S\|_{PM(\mathbb{T})} \leq C \quad .$$

Corollaire de la proposition 3 : A chaque fonction θ de $A(\mathbb{T})$ telle que $<S,\theta> \neq 0$, on peut associer une espérance conditionnelle P_θ qui à toute fonction f de $A(\mathbb{T})$ font correspondre la fonction de B_φ :

$$(P_\theta f)(x,y) = <\frac{\theta}{<S,\theta>} S, f(t,\varphi(t) + y - \varphi(x))>_t$$

(le produit scalaire de dualité étant pris, pour (x,y) fixés, en la variable t).

Démonstration : La condition de la proposition 3 est équivalente à l'existence d'une pseudo-mesure U sur $\mathbb{T}$ vérifiant

$$<U,1> = 1 \quad , \tag{1}$$

et d'une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout p de $\mathbb{Z}$:

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \times \|e^{ip\varphi}U\|_{PM(\mathbb{T})} \leq C_1 \quad . \tag{2}$$

En effet si S satisfait la condition de la proposition 3, en prenant θ dans $A(\mathbb{T})$ telle que $<S,\theta> \neq 0$, la pseudo-mesure $U = \frac{\theta S}{<S,\theta>}$ vérifie (1) et (2), car

$$\|e^{ip\varphi}U\|_{PM(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{|<S,\theta>|} \|\theta\|_{A(\mathbb{T})} \|e^{ip\varphi}S\|_{PM(\mathbb{T})} \quad .$$

1ère étape : Condition suffisante. Supposons qu'il existe une pseudo-mesure U sur $\mathbb{T}$ ayant les propriétés (1) et (2). Pour tout couple (n,p) de $\mathbb{Z}^2$ définissons

$$P(e^{i(nx+py)}) = <S, \exp i[nt + p(\varphi(t) + y - \varphi(x))]>_t \quad ,$$

le produit scalaire de dualité étant pris, pour (x,y) fixés, en la variable t. On a

$$P(e^{i(nx+py)}) = \langle S, e^{i(nt+p\varphi(t))}\rangle\ e^{ip(y-\varphi(x))}$$

d'où $\quad \|P(e^{i(nx+py)})\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|e^{ip\varphi}S\|_{PM(\pi)} \times \|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq C_1 \quad .$

Donc P prolongé par linéarité à $A(\mathbb{T}^2)$ est continue de norme $\|P\| \leq C_1$, et c'est une projection car

$$(Pf)(x,y) = \langle S, f(t,\varphi(t) + y - \varphi(x))\rangle_t$$

et si $f(x,y) = F(y - \varphi(x))$, on obtient $Pf = f$.
(Remarquons qu'on a nécessairement $C_1 \geq 1$.)

<u>2ème étape</u> : <u>Condition nécessaire</u>. Supposons B_φ bien complémenté par P, projection linéaire continue de $A(\mathbb{T}^2)$ sur B_φ. Soit $\mathfrak{J}$ l'isométrie de B_φ sur $\tilde{B}_\varphi = A(\mathbb{T};\omega)$ qui à toute fonction $F(y - \varphi(x))$ de B_φ fait correspondre la fonction F de $A(\mathbb{T};\omega)$ et soit $\tilde{P} = \mathfrak{J} \circ P$.
Pour tout couple (n,p) de $\mathbb{Z}^2$ notons $\theta_{n,p}$ la fonction $\tilde{P}(e^{i(nx+py)})$ appartenant à $A(\mathbb{T};\omega)$, dont le développement en série de Fourier est

$$\theta_{n,p}(t) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} a(n,p,\ell)e^{i\ell t} \tag{1}$$

avec $\|\theta_{n,p}\|_{A(\mathbb{T},\omega)} = \sum_\ell |a(n,p,\ell)|\omega(\ell) = \|P(e^{i(nx+py)})\|_{A(\mathbb{T}^2)} \leq \|P\|$

où $\omega(\ell) = \|e^{i\ell\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$.
Posons

$$e^{-ip\varphi(x)} = \sum_n c(n,p)\ e^{inx} \quad ,$$

d'où

$$e^{ip(y-\varphi(x))} = \sum_n c(n,p)\ e^{i(nx+py)} \quad ,$$

donc

$$e^{ipt} = \sum_n c(n,p)\ \theta_{n,p}(t) \quad . \tag{2}$$

D'après (1) et (2), on a

et

$$\begin{cases} \sum_n c(n,p)\ a(n,p,\ell) = 0 \quad \text{si } \ell \neq p \\ \sum_n c(n,p)\ a(n,p,p) = 1 \quad . \end{cases} \tag{3}$$

Pour tout triplet (n,p,ℓ) de $\mathbb{Z}^3$ on a :

$$|a(n,p,\ell)| \leq \|\theta_{n,p}\|_\infty \leq \|\theta_{n,p}\|_{A(\mathbb{T};\omega)} \leq \|P\| \quad ,$$

ce qui permet de définir pour tout couple (p,ℓ) de $\mathbb{Z}^2$, une pseudo-mesure $V(p,\ell)$ sur $\mathbb{T}$ par $\widehat{V}_{(p,\ell)}(-n) = a(n,p,\ell)$ pour tout n de $\mathbb{Z}$. On a ainsi

$$\sum_n c(n,p)\ a(n,p,\ell) = \sum_n \widehat{V}(p,\ell)(-n)\ c(n,p) = \langle V(p,\ell), e^{-ip\varphi}\rangle \quad ;$$

donc (3) équivaut à :

$$\text{et} \qquad \begin{cases} \langle V(p,\ell), e^{-ip\varphi}\rangle = 0 \quad \text{si } \ell \neq p \\ \\ \langle V(p,p), e^{-ip\varphi}\rangle = 1 \quad . \end{cases} \tag{3'}$$

De plus $\qquad \sum_\ell |a(n,p,\ell)|\ \omega(\ell) \leq \|P\| \quad ,$

donc $\qquad \sum_\ell |\widehat{V}(p,\ell)(-n)|\ \omega(\ell) \leq \|P\| \quad ,$

et a fortiori $\qquad |\widehat{V}(p,p)(-n)|\ \omega(p) \leq \|P\|$

d'où
$$\|V(p,p)\|_{PM(\mathbb{T})}\ \omega(p) \leq \|P\| \quad . \tag{4}$$

Puisque P est une espérance conditionnelle on a pour tout triplet (n,p,k) de $\mathbb{Z}^3$:

$$\widetilde{P}(e^{ik(y-\varphi(x))}\ e^{i(nx+py)}) = e^{ikt}\ \theta_{n,p}(t)$$

or
$$e^{ik(y-\varphi(x))}\ e^{i(nx+py)} = \sum_j c(j,k)\ e^{i(j+n)x}\ e^{i(k+p)y} \tag{5}$$

appliquons $\widetilde{P}$ en utilisant l'expression

$$\theta_{n,p}(t) = \sum_\ell \langle V(p,\ell), e^{inu}\rangle_u\ e^{i\ell t} \tag{6}$$

on a d'après (5) et (6)

$$\begin{aligned} e^{ikt} \sum_q \langle V(p,q), e^{inu}\rangle e^{iqt} &= \sum_j c(j,k) \sum_\ell \langle V(k+p,\ell), e^{i(j+n)u}\rangle\ e^{i\ell t} \\ &= \sum_\ell \langle V(k+p,\ell), e^{inu}\ e^{-ik\varphi(u)}\rangle\ e^{i\ell t} \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

Car $$\sum_j c(j,k)\, e^{iju} = e^{-ik\varphi(u)} .$$

L'égalité (7) entraîne que pour tout 4-uple (p,n,ℓ,k) de $\mathbb{Z}^4$

$$\langle V(p,\ell-k), e^{inu}\rangle = \langle V(k+p,\ell),\ e^{-ik\varphi(u)}\, e^{inu}\rangle ,$$

c'est-à-dire pour tout triplet (p,ℓ,k) l'égalité des pseudo-mesures :

$$V(p,\ell-k) = e^{-ik\varphi}\, V(k+p,\ell) .$$

En particulier prenons $p=0$, $\ell=k$ on a

$$V(0,0) = e^{-ik\varphi}\, V(k,k) \quad \text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{Z} .$$

Notons S cette pseudo-mesure $V(0,0)$, les relations (3') et (4)

$$\langle V(p,p), e^{-ip\varphi}\rangle = 1$$

et $$\|V(p,p)\|_{PM(\mathbb{T})}\, \omega(p) \le \|P\|$$

montrent que $\langle S,1\rangle = 1$ et $\|e^{ip\varphi}S\|_{PM(\mathbb{T})} \times \|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \le \|P\|$

car $V(p,p) = e^{ip\varphi}S$ et $\omega(p) = \|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$.
S possède donc les propriétés requises, ce qui achève de démontrer la proposition 3.
Lorsque B_φ est bien complémenté, on peut se demander s'il existe une espérance conditionnelle au sens des probabilités projetant A sur B_φ. Voici une réponse partielle :

<u>Proposition 4</u> : Soit $d\nu$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}$ et $d\mu(x,y) = d\nu(x) \otimes dy$ qui est alors une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}^2$. Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Phi)$ la sous-tribu des boréliens de $\mathbb{T}^2$ associée à la fonction $\Phi(x,y) = y - \varphi(x)$. Soit $\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T}^2;\mathcal{A};d\mu)$ sur $L^2(\mathbb{T}^2;\mathcal{B};d\mu)$. $\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$ est une projection continue de $A(\mathbb{T}^2)$ sur B_φ si et seulement s'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout p de $\mathbb{Z}$:

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \times \|e^{ip\varphi}\, d\nu\|_{PM(\mathbb{T})} \le C , \tag{1}$$

et on a $$\mathcal{E}^{\mathcal{B}}(f) = \int_{\mathbb{T}} f(t,\varphi(t) + y - \varphi(x))\, d\nu(t) . \tag{2}$$

<u>Démonstration</u> : Un calcul facile pour une fonction f continue sur $\mathbb{T}^2$ donne $\mathcal{E}^{\mathcal{B}}(f)$ sous la forme (2). En particulier

$$\mathcal{E}^{\mathcal{B}}(e^{i(nx+py)}) = \left(\int_0^{2\pi} e^{int}\, e^{ip\varphi(t)} d\nu(t)\right) e^{ip(y-\varphi(x))} \quad .$$

$\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$ est continue dans $A(\mathbb{T}^2)$ si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout couple (n,p) de $\mathbb{Z}^2$

$$\left|\int_0^{2\pi} e^{i(nt+p\varphi(t))}\, d\nu(t)\right| \times \|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq C$$

c'est-à-dire pour tout p de $\mathbb{Z}$:

$$\|e^{ip\varphi}\, d\nu\|_{PM(\mathbb{T})} \times \|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq C \quad .$$

On peut alors démontrer :

<u>Proposition 5</u> : Si φ est de classe C^2, B_φ est bien complémenté par une espérance conditionnelle au sens des probabilités.

<u>Démonstration</u> : Si φ est linéaire la proposition 4 s'applique avec

$$d\nu(x) = \frac{dx}{2\pi} \quad \text{car} \quad \|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = 1$$

et
$$\|e^{ip\varphi}\, d\nu\|_{PM(\mathbb{T})} = \|d\nu\|_{PM(\mathbb{T})} = 1 \quad .$$

Si φ est non linéaire de classe C^2, il existe un intervalle I de $\mathbb{T}$ et un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout t dans I on ait $|\varphi''(t)| \geq 0$.
On utilise alors le lemme suivant dû à Van der Corput (voir A. Zygmund, Trigonometric series, vol. 1, Cambridge reed. 1959 p. 197).

<u>Lemme</u> : Soit f une fonction de classe C^2 à valeurs réelles définie sur un intervalle $[a,b]$ et telle qu'il existe $\rho > 0$ avec $|f''(t)| \geq \rho$ pour tout t dans $[a,b]$. On a

$$\left|\int_a^b e^{if(t)}\, dt\right| \leq \frac{4\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\rho}} \quad .$$

On applique ce lemme avec $I = [a,b]$, $f(t) = nt + p\varphi(t)$ de sorte que $f''(t) = p\varphi''(t)$, ainsi

$$\left|\int_I e^{i(nt+p\varphi(t))} dt\right| \leq \frac{C}{\sqrt{|p|}} \quad \text{avec} \quad C = \frac{4\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\alpha}} \quad .$$

On prend $d\nu(t) = \frac{1}{|I|} \chi_I(t)\, dt$, χ_I fonction indicatrice de I et dt mesure de Lebesgue de $[0,2\pi]$. On a donc

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{i(nt+p\varphi(t))} d\nu(t) \right| \leq \frac{C_1}{\sqrt{|p|}} \quad ,$$

où C_1 ne dépend pas de n et de p, donc

$$\| e^{ip\varphi}\, d\nu \|_{PM(\mathbb{T})} \leq \frac{C_1}{\sqrt{|p|}} \quad . \tag{1}$$

Par ailleurs, si f et f' appartiennent à $L^2(\mathbb{T})$, on a une inégalité classique (dite de Carlson) -voir par exemple J.P. Kahane, Séries de Fourier absolument convergentes, Springer 1970 p. 76)-

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} \leq \sqrt{2}\, \|f\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{T})} \times \|f'\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{T})} + (1+\sqrt{2})\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \quad ,$$

on applique ceci avec $f(t) = e^{ip\varphi(t)}$ d'où une constante $C_2 > 0$ telle que pour tout p de $\mathbb{Z}$

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq 1 + C_2 \sqrt{|p|} \quad . \tag{2}$$

D'après (1) et (2) la proposition 4 s'applique et B_φ est <u>bien complémenté</u> par l'espérance conditionnelle au sens des probabilités :

$$f \rightsquigarrow \int_0^{2\pi} f(t, \varphi(t) + y - \varphi(x))\, d\nu(t) \quad .$$

<u>Proposition 6</u> : Si φ est linéaire par morceaux et non linéaire B_φ <u>n'est pas</u> bien complémenté.

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition 3, supposons qu'il existe une pseudo-mesure $S \neq 0$ sur $\mathbb{T}$ et une constante $C > 0$ telle que pour tout p de $\mathbb{Z}$

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \times \|e^{ip\varphi} S\|_{PM(\mathbb{T})} \leq C \quad . \tag{1}$$

Considérons le graphe de l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Choisissons un intervalle $[a, a+2\pi[$ tel que a soit l'abscisse d'un point anguleux du graphe (il en est de même pour $a + 2\pi$), et soit E l'ensemble

$$x_1 = a < x_2 < \dots < x_N$$

des abscisses croissantes des N points anguleux du graphe correspondant à l'intervalle $[a,a+2\pi[$. $\mathbb{T}$ s'identifie à la réunion de E et des intervalles disjoints I_j, $j=1,2,\dots,N$ avec

$$I_j =]x_j, x_{j+1}[\quad \text{pour} \quad j=1,2,\dots,N-1$$

et
$$I_N =]x_N, a+2\pi[\quad .$$

Supposons le support de S non contenu dans E ; il existe alors une fonction f de $A(\mathbb{T})$ dont le support est disjoint de E, c'est-à-dire $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{j=1,2,\dots,N} I_j$ et telle que $\langle S,f\rangle \neq 0$.

Alors $\operatorname{supp} f \cap I_j = K_j$ est un compact contenu dans I_j. Il est possible de choisir une fonction g_j, C^∞, égale à 1 sur K_j, à support compact $\tilde{K}_j \subset I_j$. Alors $fg_j = f_j$ appartient à $A(\mathbb{T})$ et $f = f_1 + \dots + f_N$.
Il existe au moins un indice j_o tel que $\langle S,f_{j_o}\rangle \neq 0$. Ecrivons de deux façons le produit scalaire

$$\langle S,f_{j_o}\rangle = \langle e^{ip\varphi}S, e^{-ip\varphi}f_{j_o}\rangle \quad ,$$

d'où
$$|\langle S,f_{j_o}\rangle| \le \|e^{ip\varphi}S\|_{PM(\mathbb{T})} \times \|e^{-ip\varphi}f_{j_o}\|_{A(\mathbb{T})} \quad . \tag{2}$$

Sur I_{j_o} on a $\varphi(x) = y_o + \lambda_o x$, y_o et λ_o constantes réelles donc

$$e^{-ip\varphi}f_{j_o} = e^{-ipy_o}\, e^{-ip\lambda_o x}\, f_{j_o} \quad .$$

Or $A(\mathbb{T})$ est localement isomorphe à $A(\mathbb{R}) = \mathfrak{F}(L^1(\mathbb{R}))$, donc il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\|e^{-ip\lambda_o x} f_{j_o}\|_{A(\mathbb{T})} \le C_1 \|e^{-ip\lambda_o x} f_{j_o}\|_{A(\mathbb{R})} = C_1 \|f_{j_o}\|_{A(\mathbb{R})} \quad ,$$

donc d'après (2)

$$|\langle S,f_{j_o}\rangle| \le C_1 \|e^{ip\varphi}S\|_{PM(\mathbb{T})} \|f_{j_o}\|_{A(\mathbb{R})} \quad ,$$

ce qui avec l'hypothèse (1) entraîne

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \ge \frac{CC_1}{|\langle S,f_{j_o}\rangle|} \|f_{j_o}\|_{A(\mathbb{R})} \quad .$$

D'après le théorème de Beurling et Helson, Math. Scand. 1, 120-126 (1953), ceci est impossible si φ n'est pas linéaire. C'est donc que le support de S est contenu dans E. C'est dire que $S = \alpha_1 \delta_{x_1} + \dots + \alpha_N \delta_{x_n}$ est une somme de mesures de Dirac aux points $x_1, \dots, x_N$ (il ne peut y avoir de dérivées de mesure de Dirac car ce ne sont pas des pseudo-mesures). Pour tout $j = 1, \dots, N$, choisissons une fonction g_j appartenant à $A(\mathbb{T})$ dont le support rencontre E au seul point x_j et telle que $g_j(x_j) \neq 0$. On a

$$<e^{ip\varphi}S, g_j> = \alpha_j \, e^{ip\varphi(x_j)} g_j(x_j)$$

donc $$|\alpha_j| \, |g_j(x_j)| = |<e^{ip\varphi}S, g_j>| \leq \|e^{ip\varphi}S\|_{PM(\mathbb{T})} \times \|g_j\|_{A(\mathbb{T})} \; ,$$

l'hypothèse (1) entraîne si $\alpha_j \neq 0$

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq \frac{C}{|\alpha_j| \, |g_j(x_j)|} \|g_j\|_{A(\mathbb{T})} \; ,$$

ce qui à nouveau est impossible d'après le théorème de Beurling et Helson. Donc $\alpha_j = 0$ pour $j = 1, \dots, N$ et ainsi $S = 0$, ce qui achève la démonstration.

REFERENCES

A. Beurling et Helson : Fourier Stieltjes transforms with bounded powers, Math. Scand. 1 (1953) 120-126.

J.P. Kahane : Séries de Fourier absolument convergentes, Springer 1970, p. 76.

A. Zygmund : Trigonometric series, vol. 1, Cambridge 1959, p. 197.

L. Dor : On projections in L_1, Annals of Math. 102, 3 (1975) p. 463.
