Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

J. T. Lapresté

Sur une propriété des suites asymptotiquement inconditionnelles

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 30, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A26_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

SUR UNE PROPRIETE DES SUITES ASYMPTOTIQUEMENT INCONDITIONNELLES

J.T. LAPRESTÉ

(Université de Clermont-Ferrand)

Exposé No XXX

8 Juin 1979

On démontre dans cet exposé que de toute suite normalisée convergeant faiblement vers 0, d'un espace de Banach, on peut extraire une sous-suite "presque inconditionnelle" et on utilise ce résultat pour obtenir en termes de modèmes étalés (cf. [B]) une caractérisation des espaces de Banach dont le dual a la propriété de Banach-Saks.

On se propose de montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite semi-normalisée[♦] tendant faiblement vers 0 d'un espace de Banach E, si $\varepsilon>0$ et $d\in\mathbb{N}$ sont donnés, on peut trouver une partie infinie N_o de $\mathbb{N}$ telle que la suite $(x_n)_{n\in N_o}$ soit basique et que pour chaque partie A à d éléments de N_o la projection naturelle de $[(x_n)_{n\in N_o}]$ sur $[(x_n)_{n\in A}]$ soit de norme inférieure à $1+\varepsilon$.

La clé de la démonstration est le lemme suivant dû à Bourgain :

<u>Lemme</u> : Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite tendant faiblement vers 0 dans un espace de Banach E. Pour tout réel $\varepsilon>0$ et tout entier D, il existe un ensemble fini $S\subset\mathbb{N}$ tel que pour tout D-uple $(y_k)_{k\le D}$ d'éléments de la boule unité du dual E' de E, il existe $p\in S$ avec :

$$\sup_{1\le k\le D} |y_k(x_p)| \le \varepsilon \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $B_{E'}$ la boule unité de E' (compacte pour la topologie $\sigma(E',E)$) et sur $B_{E'}^D$ considérons la suite de fonctions :

$$f_i : B_{E'}^D \longrightarrow \mathbb{R}^+ : (y_k)_{k\le D} \longrightarrow \sum_{k=1}^{D} |x_i(y_k)| \quad .$$

Considérons $K_i = \{f_i \ge \varepsilon\} \cap B_{E'}^D$, c'est un compact et on a évidemment $\bigcap_i K_i = \emptyset$ ce qui implique le résultat.

De ce lemme, on déduit dans un premier temps la proposition suivante :

<u>Proposition 1</u> : Soient $d\in\mathbb{N}$, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant faible-

---

♦ $0<\delta<\inf_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\| \le \sup_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\| \le \gamma < +\infty$.

ment vers 0 d'un espace de Banach E et $(F_A)_{A\in[\mathbb{N}]_d}$ une famille de parties finies de la boule unité du dual E' de E[♦].
Si il existe un entier D, tel que pour tout $A\in[\mathbb{N}]_d$, card $F_A \leq D$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $N_o \in [\mathbb{N}]$, $N_o = (p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (où la suite p_i est rangée dans l'ordre croissant) tel que :
si $A \in [N_o]_d$, si $p_k \in N_o \setminus A$,
on a :

$$\forall\, y \in F_A \qquad |y(x_{p_k})| \leq \frac{\varepsilon}{2^k} .$$

<u>Démonstration</u> : La preuve se déroule par récurrence sur l'entier d. Commençons par établir le résultat pour d = 1.

1 <u>Amorce de la récurrence</u> : d = 1.

Soit donc $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$, une famille de sous-ensembles de $B_{E'}$ indexée par les entiers (en fait, les parties de $\mathbb{N}$ à un élément) telle que :

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} (\text{card } F_i) \leq D < +\infty .$$

Pour ε donné, à l'aide du lemme, on peut trouver un ensemble fini d'indices S_1 tel que $\forall\, j \in \mathbb{N}\ \exists\, p(j) \in S_1$ avec $\sup_{y\in F_j} |y(x_{p(j)})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Evidemment il existe un même indice p_1 de S_1 qui convient pour une infinité d'éléments de $\mathbb{N}$. Soit donc N_1 l'ensemble infini des entiers j strictement supérieurs à p_1 tels que :

$$\sup_{y\in F_j} |y(x_{p_1})| \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

A présent comme F_{p_1} est fini et que la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 faiblement, on peut extraire de N_1 une sous-suite $N_1' = (n_q^1)_{q\in\mathbb{N}}$, telle que :

$$\forall\, q \in \mathbb{N} \qquad \sup_{y\in F_{p_1}} |y(x_{n_q^1})| \leq \frac{\varepsilon}{2^{q+1}} .$$

♦ Dans ce qui suit $[N]_d$ désignera l'ensemble des parties de N à d éléments et $[N]$ l'ensemble des parties infinies de N.
A chaque fois que nous écrirons $M = (m_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [\mathbb{N}]$, on supposera $m_1 < m_2 < \dots$.

Supposons qu'au rang k on ait construit des entiers $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ et des parties infinies de $\mathbb{N}$, $(N'_i)_{i\le k}$ ($N'_i = (n^i_q)_{q\in\mathbb{N}}$, q est le rang de n^i_q dans N'_i) décroissantes pour l'inclusion avec $p_i \in N'_{i-1}\setminus N'_i$ $i = 1,\dots,k$ ($N'_o = \mathbb{N}$) ; et tels que :

$$(\alpha) \quad \forall\, i \le k\ \forall\, j \in N'_i \qquad \sup_{y\in F_j} |y(x_{p_i})| \le \frac{\varepsilon}{2^i} ,$$

$$(\beta) \quad \forall\, i \le k\ \forall\, q \in \mathbb{N} \qquad \sup_{y\in F_{p_i}} |y(x_{n^i_q})| \le \frac{\varepsilon}{2^{q+i}} ;$$

alors en réitérant le procédé initial à l'ensemble N'_k, il est facile de trouver un entier $p_{k+1} \in N'_k$ et une partie infinie N_{k+1} de N'_k tels que :

$$\forall\, j \in N_{k+1} \qquad \sup_{y\in F_j} |y(x_{p_{k+1}})| \le \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} ,$$

et d'en extraire une nouvelle sous-suite $N'_{k+1} = (n^{k+1}_q)_{q\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall\, q \in \mathbb{N} \qquad \sup_{y\in F_{p_{k+1}}} |y(x_{n^{k+1}_q})| \le \frac{\varepsilon}{2^{q+k+1}} .$$

En définitive, on a trouvé un ensemble infini d'entiers $N_o = (p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tel que si on considère un de ses éléments p_{k_o}, on a :

$$\text{si } j < k_o : \quad \sup_{y\in F_{p_{k_o}}} |y(x_{p_j})| \le \frac{\varepsilon}{2^j} , \quad \text{car } p_{k_o} \in N'_j ;$$

$$\text{si } j > k_o : \quad \sup_{y\in F_{p_{k_o}}} |y(x_{p_j})| \le \frac{\varepsilon}{2^j} , \quad \text{car } p_j \in N'_{k_o}$$

et l'entier $j - k_o$ est certainement inférieur au rang de p_j dans N'_{k_o}.

(2) Achevons la récurrence en supposant la construction effectuée au rang d et en passant au rang d + 1.

Soit donc $(F_A)_{A\in[\mathbb{N}]_{d+1}}$ une famille de parties de $B_{E'}$, avec avec $\sup_A (\text{card } F_A) \le D < +\infty$.

A l'aide du lemme, on peut encore choisir un ensemble fini $S_1 \subset \mathbb{N}$ tel que :

$\forall\, A \in [\mathbb{N}]_{d+1}\ \exists\, p(A) \in S_1$ avec :

$$\sup_{y\in F_A} |y(x_{p(A)})| \le \frac{\varepsilon}{2} .$$

- Tout d'abord, il est facile, à l'aide du théorème de Ramsey [R], de trouver une sous-suite N_1 de $\mathbb{N}$ telle que le même indice $p_1 \in S_1$ convienne pour tous les d+1-uples d'éléments de N_1 et on peut évidemment supposer que les éléments de N_1 sont tous strictement plus grands que p_1.
- A présent, à chaque $A \in [N_1]_d$, on peut associer l'ensemble $A_{p_1} = A \cup \{p_1\} \in [N_1 \cup \{p_1\}]_{d+1}$; on peut selon l'hypothèse de récurrence trouver une partie infinie N_1' de N_1, telle que : si $N_1' = (n_q^1)_{q\in\mathbb{N}}$ et si $n_q^1 \in N_1'\backslash A$ alors :

$$\sup_{y\in F_{A_{p_1}}} |y(x_{n_q^1})| \le \frac{\varepsilon}{2^q} .$$

- Enfin une récurrence en tout point analogue à celle effectuée dans la première partie de la preuve permet d'obtenir une suite d'entiers $N_o = (p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et des parties infinies de $\mathbb{N}$: $(N_i')_{i\in\mathbb{N}}$ $(N_i' = (n_q^i)_{q\in\mathbb{N}})$ décroissantes pour l'inclusion avec :

$\forall\, i \ \ p_i \in N_{i-1}'\backslash N_i'$ et :

(α) $\forall\, i\ \forall\, A \in [N_i']_{d+1}$ $\quad \sup_{y\in F_A} |y(x_{p_i})| \le \frac{\varepsilon}{2^i}$,

(β) $\forall\, i\ \forall\, B \in [N_i']_d\ \forall\, n_q^i \in N_i'\backslash B$ $\quad \sup_{y\in F_{B_{p_i}}} |y(x_{k_q^i})| \le \frac{\varepsilon}{2^{i+q}}$.

Pour terminer, soit $A \in [N_o]_{d+1}$ et $y \in F_A$.
Soit p_{k_o} le premier élément de A et $B = A\backslash\{p_{k_o}\}$:
- si $j < k_o$ $\quad |y(x_{p_j})| \le \frac{\varepsilon}{2^j}$, puisque $A \in [N_j']_{d+1}$,

- si $j > k_o$ et $p_j \in N_o\backslash A$, alors $p_j \in N_{k_o}'\backslash B$ et donc : $\quad |y(x_{p_j})| \le \frac{\varepsilon}{2^j}$, puisque $j-k_o$ est certainement inférieur au rang de p_j dans N_{k_o}' . □

On en déduit immédiatement :

<u>Proposition 2</u> : Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite basique, semi-normalisée, convergeant faiblement vers 0, d'un espace de Banach E. Pour tout entier d et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite N_o des entiers,

telle que si $A \in [N_o]_d$ et si P_A désigne l'application linéaire :

$$P_A : [(x_i)_{i\in N_o}] \longrightarrow [(x_i)_{i\in A}] \quad ,$$

$$\sum_{i\in N_o} a_i\ x_i \longrightarrow \sum_{i\in A} a_i\ x_i \quad ,$$

on ait :

$$\forall\ A \in [N_o]_d \qquad \|P_A\| \le 1+\varepsilon \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Soit δ tel que $0<\delta<\inf_i \|x_i\|$, et k la constante de basicité de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Donnons-nous ε tel que :

$$(1+\varepsilon')(1+\frac{2k\varepsilon'}{\delta}) \le 1+\varepsilon \quad .$$

Il existe alors un entier D et une famille $(F_A)_{A\in[\mathbb{N}]_d}$ de parties finies de $B_{E'}$ avec :

① $\forall\ A \in [\mathbb{N}]_d \qquad \text{card } F_A \le D$.

② La partie F_A de $B_{E'}$ norme à ε'-près l'espace $[(x_i)_{i\in A}]$, ou en d'autres termes :

$$\forall\ x \in [(x_i)_{i\in A}]\ \exists\ y \in F_A \qquad \|x\| \le (1+\varepsilon')|y(x)| \quad .$$

Par la proposition 1, on peut trouver $N_o \in [\mathbb{N}]$, $N_o = (p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que si $A \in [N_o]_d$ et $p_k \in N_o/A$ alors :

$$\forall\ y \in F_A \qquad |y(x_{p_k})| \le \frac{\varepsilon'}{2^k} \quad .$$

On a successivement, si $(a_i) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$:

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i\in A} a_i\ x_i\| &\le (1+\varepsilon')|y(\sum_{i\in A} a_i\ x_i)| \quad , \quad \text{pour un } y \in F_A \quad , \\
&\le (1+\varepsilon')(\|\sum_{i\in N_o} a_i\ x_i\| + |y(\sum_{i\in N_o\setminus A} a_i\ x_i)|) \quad , \\
&\le (1+\varepsilon')(\|\sum_{i\in N_o} a_i\ x_i\| + \sum_{i\in N_o\setminus A} \frac{|a_i|\varepsilon'}{2^i}) \quad , \\
&\le (1+\varepsilon')(1+\frac{2k\varepsilon'}{\delta})\ \|\sum_{i\in N_o} a_i\ x_i\| \quad ,
\end{aligned}$$

car la basicité de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ implique :

$$\forall\ i \in N_o \qquad |a_i| \leq \frac{2k}{\delta} \left\| \sum_{i\in N_o} a_i\ x_i \right\| .$$

En définitive, on a :

$$\left\| \sum_{i\in A} a_i\ x_i \right\| \leq (1+\varepsilon) \left\| \sum_{i\in N_o} a_i\ x_i \right\| . \qquad \square$$

<u>Corollaire 1</u> : Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Si (x_n) est une suite basique, semi-normalisée, convergeant faiblement vers 0 d'un espace de Banach E, alors la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(x_i')_{i\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall\ k$, $\forall\ n_1 \dots n_k$, si $k < n_1 < \dots < n_k$ alors l'espace $[(x'_{n_i})_{i\leq k}]$ est $1+\varepsilon_k$-complémenté dans $[(x_i')_{i\in\mathbb{N}}]$ et cela par la projection naturelle.

Le programme annoncé est donc rempli, cependant on peut se demander si les résultats précédents subsistent sous d'autres hypothèses sur la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, que la convergence faible vers 0.

Considérons par exemple l'énoncé suivant qui est sensiblement plus faible que la conclusion du corollaire précédent :

(*) $\exists\ M < +\infty\ \exists\ (x_i') \subset (x_i)$ tels que : $\forall\ k\ \forall\ n_1 \dots n_k$, si $k < n_1 \dots < n_k$ alors l'espace $[(x'_{n_i})_{i\leq k}]$ est M-complémenté dans $[(x_i')_{i\in\mathbb{N}}]$ et cela par la projection naturelle.

Il est clair que si la condition (*) est vérifiée, tout modèle étalé♦ sur $(x_i')_{i\in\mathbb{N}}$ aura une suite fondamentale inconditionnelle de constante inférieure ou égale à M. On conjecture le résultat suivant :

<u>Conjecture</u> : Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée d'un espace de Banach admettant un modèle étalé non trivial ayant une suite fondamentale K-inconditionnelle, alors $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifie (*) pour $\forall\ M > K$.

De ce qui précède il est facile de déduire le résultat suivant qui avait été conjecturé dans [GL].

<u>Proposition 3</u> : Si E est réflexif ou séparable, alors E' a ℓ_1 pour modèle étalé si et seulement si un quotient de E a c_o pour modèle étalé.

♦ On renvoie à [B] ou [GL] pour la définition d'un modèle étalé.

Rappelons (cf. [B] et [GL]) sans entrer dans les détails qu'avoir c_o (resp. ℓ_1) pour modèle étalé de E signifie qu'il existe une suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E et une constante $M>0$ telles que pour tout entier k, tout système de k vecteurs choisis parmi les $(x_n)_{n\geq k}$ soit M-équivalent à la base canonique de ℓ_∞^k (resp. ℓ_1^k).

Démonstration de la proposition 3 : Nous nous contenterons de démontrer la partie nécessaire, et renvoyons à [GL] pour la réciproque.

Soit donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite étalant ℓ_1 dans E'. Si (y_n) possède une sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ_1, par hypothèse E est séparable, un résultat classique ([LT] p. 104) affirme alors que E a un quotient isomorphe à c_o ...
Sinon (y_n) admet une sous-suite de Cauchy faible (y'_n) ; la suite $z_n = y'_{2n} - y'_{2n+1}$ est alors faiblement convergente vers 0 ; on peut donc en extraire une sous-suite (z'_n) vérifiant les conclusions du Corollaire 1 et qui soit également ω^*-basique (cf. [LT] p. 10), c'est-à-dire qu'il existe un quotient de E muni d'une base $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall\ (m,n)\in\mathbb{N}^2 \qquad z'_n(x_m) = \delta_{mn} \quad \text{et} \quad [(x_n)]' = [(z'_n)] \ .$$

Donc à présent, on sait qu'il existe deux constantes M_1 et M_2 telles que si $k<n_1<\ldots<n_k$ la famille $(z'_{n_i})_{i\leq k}$ est M_1-équivalente à la base canonique de ℓ_1^k et l'espace $[(z'_{n_i})_{i\leq k}]$ est M_2 complémenté dans $[(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ par la projection naturelle. Cela implique que $(x_{n_i})_{i\leq k}$ est $M_1 . M_2$-équivalente à la base canonique de ℓ_∞^k, ce qui achève la preuve[♦]. □

Corollaire 2 : Un espace de Banach E a la propriété de Banach-Saks si et seulement si E est réflexif et aucun quotient de E' n'a c_o pour modèle étalé.

Démonstration : En effet (cf. [B]) E a la propriété de Banach-Saks si et seulement s'il est réflexif et n'a pas ℓ_1 pour modèle étalé.

♦ Une considération plus attentive des modèles étalés permettrait de remplacer M_1 et M_2 par $1+\varepsilon_k$ où ε_k décroît vers 0 avec k.

BIBLIOGRAPHIE

[B] B. Beauzamy : Banach-Saks property and spreading models, à paraître dans Maths. Scand.

[GL] S. Guerre et J.T. Lapresté : Quelques propriétés des modèles étalés sur les espaces de Banach, preprint.

[LT] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri : Classical Banach spaces I, Springer Verlag.

[R] F.P. Ramsey : On a problem of formal logic, Proc. London Math. Soc. (2) 30 (1929), 264-286.
