B. Beauzamy

Sous-espaces invariants de type fonctionnel dans les espaces de Banach

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 27, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A23_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

SOUS-ESPACES INVARIANTS DE TYPE FONCTIONNEL DANS LES ESPACES DE BANACH

B. BEAUZAMY

Exposé No XXVII 11 Mai 1979

Notre but, dans cet exposé, est de présenter les résultats que nous avons obtenus quant à l'existence de sous-espaces invariants pour une certaine classe d'opérateurs. Les démonstrations ayant été complètement rédigées dans un article portant le même titre, nous ne croyons pas utile de les reproduire ici ; nous ne donnerons donc qu'un bref résumé, sauf pour le dernier paragraphe, qui sera détaillé. Aussi, la numérotation des pages, paragraphes, théorèmes, etc., est celle de l'article, ce qui explique l'aspect inhabituel de la présente numérotation, que le lecteur voudra bien excuser.

*
* *
*

Nous nous intéressons, dans les pages qui suivent, aux opérateurs T, linéaires continus, d'un espace de Banach E dans lui-même, possédant la propriété suivante, que nous notons $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} : \|T\| = 1 \quad \text{et} \quad \exists x_0 \in E, \text{ tel que } T^n x_0 \underset{n \to \infty}{\not\to} 0 .$$

La question de savoir si un tel opérateur possède nécessairement un sous-espace invariant non trivial est assez ancienne et reste ouverte (rappelons qu'un sous-espace vectoriel fermé F est dit invariant par T si $TF \subset F$; il est non trivial si $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$).

Nous allons montrer qu'avec une hypothèse supplémentaire sur T, que l'on peut juger assez faible (qui est, en tout cas, beaucoup plus faible que celles déjà connues), elle admet une réponse positive ; les sous-espaces invariants ainsi construits seront en outre d'un type très particulier; nous reviendrons sur ce point par la suite (au § 5.).

Comme c'est l'usage, les sous-espaces invariants que nous construirons seront en fait hyper-invariants, c'est-à-dire invariants par tout opérateur qui commute avec T. C'était déjà le cas pour les résultats obtenus par divers auteurs dans cette direction. Mentionnons-les :

- Si T et ${}^tT$ vérifient $\mathcal{H}$, dans E et E' respectivement, et si E est réflexif, T possède un sous-espace hyper-invariant non trivial (en abrégé S.H.N.T.) (Colojoară-Foias [2] , p.136, cor.1.10 ; voir aussi B. Beauzamy [1]).
- Si le spectre de T est contenu dans le cercle unité et si

$$\text{(1)} \qquad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\log\|T^n\|}{1+n^2} < \infty \quad ,$$

T a un S.H.N.T. (Wermer [8] avec quelques hypothèses techniques supplémentaires ; Colojoară-Foias [2] p.154 cor.3.3 , avec la restriction du spectre de T non réduit à un point ; ce dernier cas se traitant par d'autres méthodes).

La condition (1) , dite "Condition de Beurling" a le défaut de porter sur les normes $\|T^n\|$ $(n \in \mathbb{Z})$, et non sur les normes des itérés d'un point $y_o \in E$, c'est-à-dire sur les quantités $\|T^n y_o\|$ $(n \in \mathbb{Z})$. C'est premièrement à ce défaut que remédie notre condition. Elle nous permet aussi d'abandonner toute condition d'inversibilité ou de spectre. Enfin, elle ne porte pas directement sur l'opérateur T lui-même, mais sur un opérateur "asymptotiquement voisin" de T, ce qui paraît raisonnable, car le comportement asymptotique des itérés $(T^n x)_{n \to +\infty}$ devrait suffire à caractériser les sous-espaces invariants. Ces remarques étant faites, passons au résultat proprement dit. Nous l'avons divisé en deux parties, énoncées respectivement aux théorèmes 1 et 2. Le premier réclame une inversibilité locale pour $\mathcal{U}$; ce n'est pas le cas du second, mais il demande à la place que $\mathcal{U}$ soit faiblement compact (ce qui se produira, par exemple, si l'espace E est réflexif).

Remarquons enfin qu'on ne fait aucune hypothèse de commutation entre T et $\mathcal{U}$.

<u>Théorème 1</u> : Soit E un espace de Banach, et T un opérateur de E dans E, non égal à un multiple de l'identité, et vérifiant $\mathcal{H}$.

On suppose qu'il existe un opérateur $\mathcal{U}$, tel que :

$$\forall x , \quad \mathcal{U}^n x - T^n x \underset{n \to +\infty}{\to} 0 ,$$

qu'il existe une suite croissante $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$(2) \quad \begin{cases} \rho_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N} , \quad \rho_{m+n} \leq \rho_m \cdot \rho_n \quad \forall m , \forall n \in \mathbb{N} . \\ \sum_{n \geq 0} \dfrac{\log \rho_n}{1+n^2} < \infty \end{cases}$$

et une suite de points $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec :

$$(3) \quad \begin{cases} \mathcal{U} y_k = y_{k-1} \quad \forall k \geq 1 \\ \|y_o\| = 1, \quad \|y_k\| \leq \rho_k \quad \forall k \geq 1 \end{cases}$$

Alors T possède un sous-espace hyper-invariant non trivial.

<u>Théorème 2</u> : Soit E un espace de Banach et T un opérateur de E dans E, non égal à un multiple de l'identité, et vérifiant $\mathcal{K}$.

On suppose qu'il existe un opérateur faiblement compact $\mathcal{U}$, avec

$$\|\mathcal{U}^n - T^n\|_{op} \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \quad ,$$

qu'il existe une suite croissante $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant (2) , un point $y_o \in E$ avec $\|y_o\| = 1$ et que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre $C(\varepsilon) > 0$ et une suite $(y_k)_{k \geq 1}$ de points de E, avec :

$$\text{(3bis)} \quad \begin{cases} \|\mathcal{U}^k y_k - y_o\| < \varepsilon & \forall k \geq 1 \\ \|\mathcal{U}^j y_k\| \leq C(\varepsilon)\, \rho_{k-j} & \forall k \geq 1,\ \forall j \leq k \end{cases}$$

Alors T possède un sous-espace hyper-invariant non trivial.

L'hypothèse du théorème 1 signifie qu'un certain point y_o admet une chaîne d'inverses par $\mathcal{U}$ dont les normes ne croissent pas trop vite ; celle du théorème 2 a le même sens pour des inverses approchés. Il faut noter que dans ce second cas, il n'y a pas a priori de relation entre y_k et y_{k-1} .

Avant d'aborder la démonstration des théorèmes, donnons un corollaire évident du théorème 1 :

<u>Corollaire</u> : Si T vérifie $\mathcal{K}$, est inversible, et si, pour un certain point $y_o \in E$, on a $\|T^{-n} y_o\| \leq \rho_n$, pour une suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du type précédent, T a un sous-espace hyper-invariant non trivial.

Il suffit en effet de prendre $\mathcal{U} = T$ et $y_k = T^k y_o$.

Soit $f \in A(\mathbb{T})$, non identiquement nulle. On écrit sa série de Fourier :

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta} .$$

Si T est de norme 1, on définit une suite d'opérateurs en posant

$$h_n(T) = \sum_{k \geq -n} a_k T^{k+n} \qquad n \in \mathbb{N} ,$$

et on a
$$\|h_n(T)\|_{op} \leq \|f\|_{A(\mathbb{T})} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

Le sous-espace vectoriel

$$F = \{z \in E \,,\, h_n(T)z \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\}$$

est alors fermé, et, de toute évidence, il est hyper-invariant pour T.

Ce sous-espace n'est pas E tout entier s'il existe y_o tel que $h_n(T)y_o \not\to 0$ (et ceci peut toujours être réalisée si T vérifie $\mathcal{K}$, comme le montre la proposition 1); il n'est pas réduit à $\{0\}$ s'il existe $z_o \neq 0$ tel que $h_n(T)z_o \to 0$. Si ces conditions sont satisfaites, nous dirons que nous sommes en présence d'un sous-espace hyper-invariant non trivial de type fonctionnel.

Les théorèmes 1 et 2 nous ont permis d'obtenir des sous-espaces de type fonctionnel. On peut évidemment se demander si tout opérateur vérifiant $(\mathcal{K})$ ne possède pas ce type de sous-espace invariant, et si les restrictions 2 et 3 que nous avons imposées sont bien nécessaires.

Le théorème qui suit résoud ce problème : non seulement ces conditions sont nécessaires (pour obtenir ce type de sous-espace, répétons-le), mais encore elles sont les meilleures possibles (ce qui répond à une question posée par C. Foias).

Théorème 3 : Pour toute suite croissante $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$, satisfaisant

$$\rho_{m+n} \le \rho_m \cdot \rho_n \quad \forall\, m,n \in \mathbb{N} \quad , \quad \rho_n \ge 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad ,$$

et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log \rho_n}{1+n^2} = +\infty \quad ,$$

on peut trouver un opérateur T, vérifiant $\mathcal{H}$, inversible, tel que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\|T^{-k}\| = \rho_k$; $\forall\, x$, $\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{\|T^{-k}x\|}{\rho_k} > 0$, et qui ne possède aucun sous-espace invariant non trivial de type fonctionnel.

Démonstration du théorème 3 : Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant les conditions précédentes. Convenons, pour simplifier les notations, que $\rho_0 = 1$. Posons $v_1 = \frac{1}{\rho_1}, \ldots, v_k = \frac{\rho_{k-1}}{\rho_k}, \ldots,$ (on a $0 < v_k \le 1 \;\; \forall\, k$). L'opérateur annoncé sera un "shift à poids" sur $\ell^2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire un opérateur défini par :

$$Te_k = w_k\, e_{k+1} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

($(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z})$).
Pour notre exemple, les coefficients w_k valent :

$$\begin{cases} w_k = 1 & \text{si} \quad k \ge 0 \\ w_k = v_{-k} & \text{si} \quad k < 0 \quad . \end{cases}$$

Il est évident que T est de norme 1 et qu'il vérifie $\mathcal{H}$ (les poids valant 1 du côté positif).

Lemme 8 : On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|T^{-k}\| = \rho_k$, et, $\forall\, x \ne 0 \;\exists\; C(x) > 0$ tel que

$$\forall\, k \qquad \|T^{-k}x\| \ge C(x)\rho_k \quad .$$

Démonstration : Soit $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n$. On vérifie immédiatement que

$$T^{-k}x = \sum_n \alpha_n \frac{1}{w_{n-1}\cdots w_{n-k}}\, e_{n-k} \quad ,$$

et donc que

$$\|T^{-k}x\|^2 = \sum_{n\leq 0} |\alpha_n|^2 \left(\frac{\rho_{k-n}}{\rho_{-n}}\right)^2 + |\alpha_1|^2 \rho_{k-1}^2 + \dots + |\alpha_{k-1}|^2 \rho_1^2 + \sum_{n\geq k} |\alpha_n|^2 .$$

Les assertions du lemme en résultent immédiatement, en utilisant la croissance de la suite $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et la propriété $\rho_{m+n} \leq \rho_m \cdot \rho_n$.
Il nous reste à montrer que T, ainsi défini, ne possède aucun sous-espace invariant non trivial de type fonctionnel.

Soit $f \in A(\mathbb{T})$, non identiquement nulle ; et $h_n(T) = \sum_{k\geq -n} a_k T^{k+n}$.
Supposons qu'il existe $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tel que $h_n(T)z \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; nous allons voir que $z = 0$, ce qui démontre bien le théorème.

Pour tout $p \in \ell^2(\mathbb{Z})$, nous notons $(p_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ses coordonnées, et nous désignons par p' l'élément de $\ell^2(\mathbb{Z})$ défini par :

$$\begin{aligned} p'_k &= p_k && \text{si} \quad k \geq 0 \\ &= w_{-1} \cdots w_k \, p_k && \text{si} \quad k < 0 . \end{aligned}$$

Notons T_o le shift usuel sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ $(T_o e_n = e_{n+1} \ \forall\, n)$.

<u>Lemme 9</u> : Pour tout $p \in \ell^2(\mathbb{Z})$, on a :

$$h_n(T)p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff h_n(T_o)p' \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

<u>Démonstration du lemme</u> : La j-ème coordonnée de $T^k p$,notée $(T^k p)(j)$, vaut :

$$p_{j-k}\, w_{j-k}\, w_{j-k+1} \cdots w_{j-1} .$$

La j-ème coordonnée de $h_n(T)p$ vaut donc :

$$(h_n(T)p)(j) = a_{-n}p_j + \dots + a_{-n+k}p_{j-k}w_{j-k} \cdots w_{j-1} + \cdots$$

et, si $j \geq 0$, ceci s'écrit :

$$\begin{aligned} (h_n(T)p)(j) = a_{-n}p_j + \dots + a_{-n+j}p_o + a_{-n+j+1}p_{-1}w_{-1} + \dots + \\ \dots + a_{-n+j+\ell}\, p_{-\ell} w_\ell \cdots w_{-1} + \cdots . \end{aligned}$$

Il est immédiat de vérifier que, pour $j \geq 0$, la j-ème coordonnée de $h_n(T_o)p'$ est donnée par la même formule. Mais comme par ailleurs

$$\begin{cases} \sum\limits_{j<0} |(h_n(T)p)(j)|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 , \\ \sum\limits_{j<0} |(h_n(T_o)p')(j)|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 ; \end{cases}$$

le lemme en résulte aussitôt.

Il résulte du lemme que $h_n(T_o)z' \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

<u>Lemme 10</u> : On a, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} a_{m-j}\, z'_j = 0$.

<u>Démonstration du lemme 10</u> : Pour $m \in \mathbb{Z}$, la $n+m$-ème coordonnée de $h_n(T_o)z'$ s'écrit :

$$(h_n(T_o)z')(n+m) = \sum_{j\leq m+n} a_{m-j}\, z'_j$$

et, comme $|(h_n(T_o)z')(n+m)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, le lemme en résulte aussitôt.

Posons $\varphi(\theta) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} z'_k\, e^{ik\theta}$. On obtient une fonction de $L^2(\mathbb{T})$, et le lemme 3 signifie que cette fonction est orthogonale, dans $L^2(\mathbb{T})$, aux fonctions $e^{im\theta}\bar{f}$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}$. Comme $f \in A(\mathbb{T})$, f est continue, et $\varphi \cdot \bar{f} \in L^2$. On doit donc avoir $\varphi \cdot \bar{f} = 0$ p.p. Mais on a supposé f non identiquement nulle : il y a donc un intervalle ouvert sur lequel f ne s'annule pas ; φ est donc nulle p.p. sur cet intervalle. Il nous reste à voir que ceci implique que φ est identiquement nulle.

On a, si $k < 0$,

$$z'_k = w_{-1} \cdots w_k\, z_k \quad , \quad \text{et} \quad (z_k) \in \ell^2$$

$$= \frac{1}{\rho_{-k}}\, z_k \quad .$$

Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\alpha(t) = \operatorname{Log} \rho_n \quad \text{si} \quad n \leq t < n+1 \quad (n = 0, 1, \ldots) \quad ,$$

on obtient une fonction positive croissante, vérifiant

$$\int_1^\infty \frac{\alpha(t)}{t^2}\, dt = +\infty$$

et on a $|z'_{-k}| \leq C\, e^{-\alpha(k)}$, pour $k \geq 0$.

Il résulte alors d'un théorème de N. Levinson ([4]) p. 74, ou [5]) que

φ est identiquement nulle.

Nous voyons ainsi que, pour obtenir des sous-espaces de type fonctionnel, les hypothèses à imposer sont bien des restrictions sur la croissance d'une suite de points qui sont, en gros, les itérés par T^{-1} (lorsque celui-ci existe) d'un point donné. Il faut noter, à cet égard, que le résultat de Colojoară-Foias, dans le cas où T et ${}^tT$ vérifient $\mathcal{K}$, n'est qu'un cas particulier du théorème 2 : il est en effet facile de démontrer (comme nous l'avons fait dans [2]), que dans ce cas, il existe un point y_o de norme 1 et une suite de points y_n, de norme bornée, tels que $T^n y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_o$.

Je tiens finalement à remercier pour leurs observations et commentaires MM. C. Foias, P. Enflo, J.L. Krivine, M. Zeller-Meier, B. Maurey et, tout particulièrement, J.P. Kahane, pour ses nombreuses remarques, critiques et suggestions, et tous, bien sûr, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu montrer pour les pages précédentes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Beauzamy : Sous-espaces invariants dans les espaces de Banach : quelques résultats positifs. Séminaire d'Analyse fonctionnelle de l'Ecole Polytechnique, 1978-79, exposé 13.

[2] I. Colojoară et C. Foias : General spectral theory, Gordon and Breach, 1968.

[3] Y. Domar : Harmonic analysis based on certain commutative algebras. Acta Math. vol.96, 1956, pp.1-66.

[4] N. Levinson : Gap and density theorems, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 25, New York (1940).

[5] N. Levinson : Vanishing functions, Proceedings of the London Math. Soc. Ser. 2 vol. 41 (1936) 393-407.

[6] J. P. Kahane : Séries de Fourier absolument convergentes. Springer-Verlag, 1970.

[7] R. Paley, N. Wiener : Fourier transforms in the complex domain. New York 1934.

[8] J. Wermer : The existence of Invariant subspaces. Duke Math. J. 19 (1952), pp.615-622.