Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

M. Capon

Primarité de $L^P(\ell_r), 1 < p, r < \infty$

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. nº 25, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A21_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

PRIMARITE DE $L^p(\ell_r)$, $1 < p, r < \infty$

M. CAPON

(Université Paris XI-Orsay)

Exposé No XXV

27 Avril 1979

Le but de ce travail est de montrer que pour $1 < p < \infty$ et $1 < r < \infty$, l'espace $L^p(\ell_r)$ est primaire. D'après une remarque de Pisier dans [3], il est assez facile de voir que si $(h_k)_{k\geq 1}$ est la base de Haar et $(e_i)_{i\geq 1}$ la base canonique de ℓ_r, alors la suite $(h_k \otimes e_i)$ est une base inconditionnelle de $L^p(\ell_r)$. Dans la première partie nous étudierons les sous-suites de cette base et dans la seconde partie nous montrerons plus particulièrement que $L^p(\ell_r)$ est primaire.

I - ETUDE DES SOUS-SUITES DE LA BASE DE $L^p(\ell_r)$.

Dans cette partie, p et r sont fixés. Soit α_o la constante d'inconditionalité de la base $(h_k \otimes e_i)_{\substack{k\geq 1\\ i\geq 1}}$. Nous aurons besoin d'un résultat préliminaire.

Lemme I.1 : Soit (d_k^i) une suite de fonctions de L^p telle que la suite $(d_k^i \otimes e_i)$ soit basique inconditionnelle, alors

$$\| \sum_{k,i} \alpha_{k,i} \; d_k^i \otimes e_i \|^p_{L^p(\ell_r)} \approx \int (\sum_i (\sum_k \alpha_{ki}^2 \; {d_k^i}^2 (t))^{r/2})^{P/r} \, dt \quad .$$

En particulier si deux suites d_k^i de ${d'}_k^i$ vérifient les hypothèses et en outre $|d_k^i| = |{d'}_k^i|$, alors les suites $(d_k^i \otimes e_i)$ et $({d'}_k^i \otimes e_i)$ sont équivalentes.

Le signe $\approx$ signifie que le rapport des deux quantités est majoré et minoré par des constantes positives indépendantes des α_{ki}.

Démonstration : Posons $\Delta = \| \sum_{k,i} \alpha_{ki} \; d_k^i \otimes e_i \|^p_{L^p(\ell_r)}$

$$\Delta = \int \| \sum_{k,i} \alpha_{ki} \; d_k^i(t) \otimes e_i \|^p_{\ell_r} \, dt \quad .$$

Désignons par $\varepsilon_k(.)$ la suite de Rademacher. Comme la suite est inconditionnelle on a

$$\Delta \approx \iint \| \sum_{k,i} \alpha_{ki} \; \varepsilon_k(u) \; d_k^i(t) \otimes e_i \|^p_{\ell_r} \, dt \, du \quad .$$

Fixons t et intégrons par rapport à u ; on peut en utilisant les inégalités de Kahane [4], écrire

$$S(t) = \int \|\sum_{k,i} \alpha_{ki}\, \varepsilon_k(u)\, d_k^i(t) \otimes e_i\|_{\ell_r}^p \, du \approx \left(\int \|\sum_{k,i} \alpha_{ki}\, \varepsilon_k(u)\, d_k^i(t) \otimes e_i\|_{\ell_r}^r \, du\right)^{p/r}$$

$$S(t) \approx \left(\int \sum_i |\sum_k \alpha_{ki}\, \varepsilon_k(u)\, d_k^i(t)|^r \, du\right)^{p/r} \quad .$$

On applique maintenant les inégalités de Khintchine et on obtient

$$S(t) \approx \left(\sum_i \left(\sum_k \alpha_{ki}^2\, {d_k^i}^2(t)\right)^{r/2}\right)^{p/r}$$

$$\Delta \approx \int \left(\sum_i \left(\sum_k \alpha_{ki}^2\, {d_k^i}^2(t)\right)^{r/2}\right)^{p/r} dt \quad . \qquad \text{CQFD}$$

Corollaire I.2 : Si deux suites d_k^i et $d_k'^i$ sont dans L^∞ et telles que

(a) $\{d_k^i \otimes e_i\}$ et $\{d_k'^i \otimes e_i\}$ sont des suites inconditionnelles

(b) $|d_k'^i(t)| = \lambda_{ki} |d_k^i(t)|$ sauf sur un ensemble de mesure ε_{ki} et

$$\sum_{i,k} \varepsilon_{ki}^{1/p} (\|d_k^i\|_{L^\infty} \|d_k^{i*}\| + \|d_k'^i\|_{L^\infty} \|d_k'^i\|) + |1 - \lambda_{ki}|\ \|d_k^i\|\ \|d_k^{i*}\| < 1$$

alors les suites basiques considérées sont équivalentes dans $L^p(\ell_r)$.

Démonstration : Supposons d'abord $\lambda_{ki} = 1$ et posons

$$E_{ik} = \{t / |d_k^i(t)| = |d_k'^i(t)|\} \ .$$

On a $$\|d_k^i \otimes e_i - d_k^i\, 1\!\!1_{E_{ik}} \otimes e_i\| \le \|d_k^i\|_{L^\infty}\, \varepsilon_{ik}^{1/p} \quad .$$

D'après l'hypothèse (b) on a

$$\sum_{i,k} \|d_k^i \otimes e_i - d_k^i\, 1\!\!1_{E_{ik}} \otimes e_i\|\ \|d_e^{i*} \otimes e_i^*\| < 1 \quad .$$

Les suites $\{d_k^i \otimes e_i\}$ et $\{d_k^i\, 1\!\!1_{E_{ik}} \otimes e_i\}$ sont donc équivalentes. De même les suites $\{d_k'^i \otimes e_i\}$ et $\{d_k'^i\, 1\!\!1_{E_{ik}} \otimes e_i\}$ sont équivalentes, donc en appliquant le lemme I.1 aux suites $\{d_k^i\, 1\!\!1_{E_{ik}} \otimes e_i\}$ et $\{d_k'^i\, 1\!\!1_{E_{ik}} \otimes e_i\}$ on en déduit le corollaire dans ce cas. Si $\lambda_{ki} \neq 1$, posons $z_k^i = \lambda_{ki}\, d_k^i$, alors $z_k^{i*} = \frac{1}{\lambda_{ki}}\, d_k^{i*}$. Les suites $(z_k^i \otimes e_i)$ et $(d_k'^i \otimes e_i)$ sont équivalentes car

$$\sum_{k,i} \varepsilon_{ki}^{1/p} \|z_k^i\|_{L^\infty} \|z_k^{i*}\| = \sum_{k,i} \varepsilon_{ki}^{1/p} \|d_k^i\|_{L^\infty} \|d_k^{i*}\| .$$

On peut donc appliquer la première partie de la démonstration.
D'autre part : $\|z_k^i \otimes e_i - d_k^i \otimes e_i\| = |1-\lambda_{ki}|\ \|d_k^i\|$. Donc

$\sum_{k,i} \|z_k^i \otimes e_i - d_k^i \otimes e_i\|\ \|d_k^{i*} \otimes e_i^*\| < 1$ d'après (b). On peut conclure que les suites $\{z_k^i \otimes e_i\}$ et $\{d_k^i \otimes e_i\}$ sont équivalentes, ce qui achève la démonstration.

Nous allons maintenant étudier l'espace engendré par une sous-suite $(h_k \otimes e_i)_{\substack{i \geq 1 \\ k \in \Phi_i}}$. Etant donnée une partie Φ_i de $\mathbb{N}$ nous poserons

$\hat{\Phi}_i = \{t \in [0,1] / h_k(t) \neq 0$ pour une infinité de k dans $\Phi_i\}$.

Théorème I.3 : L'espace engendré par la suite $(h_k \otimes e_i)_{\substack{i \geq 1 \\ k \in \Phi_i}}$ est isomorphe à $L^p(\ell_r)$ si l'une des deux hypothèses suivantes est réalisée.

(1) Il existe une partie infinie M de $\mathbb{N}$ telle que $\bigcap_{i \in M} \hat{\Phi}_i$ soit de de mesure positive.

(2) Pour toute partie infinie M de $\mathbb{N}$, $\bigcap_{i \in M} \hat{\Phi}_i^C$ est de mesure nulle.

Démonstration : Nous allons d'abord nous placer dans l'hypothèse (1). Posons $Z = [h_k \otimes e_i]_{\substack{i \geq 1 \\ k \in \Phi_i}}$, d'après la méthode de décomposition de Pełczynski il suffit de montrer que Z contient un sous-espace complémenté isomorphe $L^p(\ell_r)$, on peut donc supposer $M = \mathbb{N}$ et choisir un compact K de mesure positive dans $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \hat{\Phi}_i$.

Nous allons énoncer plusieurs lemmes qui donnent des conditions suffisantes pour qu'une suite de $L^p(\ell_r)$ engendre un sous-espace complémenté isomorphe à $L^p(\ell_r)$ et nous construirons ensuite une suite dans Z qui vérifie ces conditions.

Lemme I.4 : Soit $(d_k)_{k \geq 1}$ une suite de fonctions de K dans $\{-1,1,0\}$. On suppose qu'il existe deux constantes positives K_1 et K_2 telles que

(a) $d_1 = \mathbb{1}_K$, $|d_2| = \mathbb{1}_K$, $K_1 \leq \mu(K) \leq K_2$.

(b) Si pour $n = 0,1,2,\ldots$, $m = 1,2,\ldots 2^n$ on pose

$$D_{n,2m-1} = S(d^+_{2^n+m}) \quad \text{et} \quad D_{n,2m} = S(d^-_{2^n+m})$$

alors $\quad D_{n,2m-1} \cup D_{n,2m} = D_{n-1,m}$ et $K_1 \leq 2^{n+1}\,\mu(D_{n,j}) \leq K_2$.

Alors la suite $\{d_k \otimes e_i\}$ est équivalente à $\{h_k \otimes e_i\}$ et l'espace U_o qu'elle engendre est identique à $L^p(K,\mathcal{a},\ell_r)$ où $\mathcal{a}$ est la σ-algèbre engendrée par les $D_{n,j}$.

En effet $L^p(K,\mathcal{a},\ell_r)$ est engendré par les fonctions $(d_k^+ \otimes e_i)$ et $(d_k^- \otimes e_i)$. En utilisant l'hypothèse (b) on voit facilement que l'opérateur T de $L^p(\ell_r)$ dans U_o, défini par $T(h_k \otimes e_i) = d_k \otimes e_i$ est un isomorphisme d'espace réticulé de $L^p(\ell_r)$ sur U_o. L'espace U_o, contenu dans $L^p(K,\mathcal{a},\ell_r)$, réticulé et contenant toutes les fonctions $(d_k \otimes e_i)$ est donc identique à $L^p(K,\mathcal{a},\ell_r)$.

CQFD

<u>Remarque</u> : U_o^* s'identifie à $L^q(K,\mathcal{a},\ell_s)$ et l'injection de U_o^* dans $L^q(\ell_s)$ est donc une isométrie.

Soit maintenant U_1 l'espace engendré par $[d_k \otimes e_i]_{\substack{k\geq 2\\ i\geq 1}}$. En utilisant l'isomorphisme T on voit facilement que U_1 est isomorphe au sous-espace de $L^p(\ell_r)$ formé des fonctions d'intégrales nulles. Il assez facile de démontrer que ce dernier est isomorphe à $L^p(\ell_r)$. Si (d_k^*) désigne la suite biorthogonale de (d_k), il est clair que la restriction à U_1 de $(d_k^* \otimes e_i^*)_{i\geq 1}$ est la suite biorthogonale de $(d_k \otimes e_i)_{\substack{i\geq 1\\ k\geq 2}}$ et engendre donc U_1^*. On a donc une injection canonique de U_1^* dans U_o^* définie par

$$j[(d_k^* \otimes e_i^*)_{|U_1}] = d_k^* \otimes e_i^* \quad .$$

Soit π la projection naturelle de U_o sur U_1, qui est continue car la base de U_o est inconditionnelle. Comme pour tout fonction f de U_o , $f - \pi(f)$ est orthogonale à $(d_k^* \otimes e_i^*)_{\substack{k\geq 2\\ i\geq 1}}$. On a

$$\langle \pi^*\varphi \; ; \; f\rangle = \langle \varphi, \pi f\rangle$$

$$= \langle j\varphi, \pi f\rangle = \langle j\varphi, f\rangle \quad .$$

Donc $$\pi^* = j \quad .$$

Ce qui montre que j est continue car π l'est.

Ces deux remarques nous montrent que si $\psi = \sum_{i\geq 1} \sum_{k\geq 2} \alpha_{ki}(d_k^* \otimes e_i^*)$ alors $\|\psi\|_{U_1^*} \approx \|\psi\|_{L^q(\ell_s)}$.

Notation : Pour faciliter l'écriture nous appellerons suite bloc (b_k) une suite bloc de la base de Haar de la forme suivante

$$b_k = \sum_{j\in\sigma_k} h_j \quad , \text{ avec } \quad \sigma_k \cap \sigma_\ell = \emptyset \quad \text{et} \quad h_j\, h_i = 0$$

si i et j sont dans σ_k et $i \neq j$.

Si on pose $b_k^* = \dfrac{b_k}{\mu(S(b_k))}$, cela définit une suite de fonctions dans $L^q = (L^p)^*$ et la restriction de ces formes linéaires à l'espace engendré par les (b_k) est exactement la suite biorthogonale à (b_k).

Lemme I.5 : K_1 et K_2 étant donnés, il existe des nombres $(\varepsilon_k)_{k\geq 2}$ positifs tels que si $(b_k)_{k\geq 2}$ est une suite bloc de la base de Haar qui vérifie

(a) la suite $(d_k)_{k\geq 1}$ définie par $d_1 = 1\!\!1_K$ et $d_2 = b_k 1\!\!1_K$ pour $k \geq 2$, vérifie les hypothèses du lemme 1.4 avec les constantes K_1 et K_2 ;

(b) $b_k(t) = d_k(t)$ sauf sur un ensemble de mesure ε_k .

Alors les suites $(d_k^* \otimes e_i^*)_{\substack{i\geq 1\\ k\geq 2}}$ et $\left(\dfrac{d_k}{\mu(Sd_k)} \otimes e_i^*\right)_{\substack{i\geq 1\\ k\geq 2}}$ sont équivalentes dans dans $L^q(\ell_s)$.

Démonstration : Posons $\zeta_k = \dfrac{d_k}{\mu(S(d_k))}$. On sait que la suite $(d_k^* \otimes e_i^*)$ est inconditionnelle dans U_o^* , donc aussi dans $L^q(\ell_s)$ car U_o^* se plonge isométriquement dans $L^q(\ell_s)$. Soit α la constante d'inconditionnalité. d_k est un élément de $L^q(K,\mathcal{A})$ donc

$$\zeta_k = \sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda_{k\ell}\, d_\ell^*$$

avec
$$\lambda_{k\ell} = \int \frac{d_\ell(t)\ d_k(t)}{\mu(Sd_k)}\, dt \quad .$$

On a
$$\lambda_{\ell\ell} = 1 \quad .$$

Pour $k \neq \ell$, on a

$$\lambda_{k\ell} = \frac{1}{\mu(S(d_k))} [\langle d_\ell - b_\ell, d_k - b_k\rangle + \langle b_\ell, d_k - b_k\rangle + \langle b_k, d_\ell - b_\ell\rangle] \quad .$$

On voit facilement que $|\lambda_{k\ell}| \leq \frac{3 \inf(\varepsilon_k, \varepsilon_\ell)}{\mu(S(d_k))}$ donc

$$\|\zeta_k - d_k^*\| = \|\sum_{\ell=1}^{\infty} (\lambda_{k\ell} - \delta_{k\ell}) d_\ell^*\|$$

$$\leq \frac{3}{\mu(S(d_k))} \sum_{\ell=1}^{\infty} \inf(\varepsilon_k, \varepsilon_\ell) \|d_\ell^*\| \quad .$$

On peut choisir par récurrence des nombres $\varepsilon_1 = 1 > \varepsilon_2 > \dots$ tels que

$$\|\zeta_k - d_k^*\|_{L^q} \leq \frac{\|d_k^*\|}{2^k \alpha} \quad .$$

Ce choix est possible et ne dépend que de K_1 et K_2 car $\|d_\ell^*\|$ et $\mu(S(d_k))$ sont évalués en fonction de K_1 et K_2. Si $(x_k^*)_{k\geq 2}$ est une suite de ℓ_s on pose

$$\varphi = \sum_{k\geq 2} d_k^* \otimes x_k^* \quad \text{et} \quad \psi = \sum_{k\geq 2} \zeta_k \otimes x_k^*$$

alors $$\|x_k^*\| \leq \frac{\alpha\|\varphi\|}{\|d_k^*\|}$$

et par conséquent $$\|\varphi - \psi\|_{L^q(\ell s)} \leq \sum_{k\geq 2} \frac{\|\varphi\|}{2^k} \leq \frac{1}{2} \|\varphi\| \quad .$$

On a donc $$\|\varphi\| \approx \|\psi\| \quad .$$

Ceci démontre l'équivalence des deux suites.

CQFD.

<u>Remarque</u> : Ce lemme exprime en fait que les (d_k) sont presque orthogonales.

<u>Lemme I.6</u> : Soient K_1 et K_2 fixés et $(b_k)_{k\geq 2}$ une suite comme au lemme I.5. Il existe des nombres positifs $(\varepsilon_{k,i})_{\substack{i\geq 1\\ k\geq 2}}$ tels que si $(b_k^i)_{\substack{i\geq 1\\ k\geq 2}}$ est une famille de suites bloc de la base de Haar telles que $|b_k^i(t)| = |d_k(t)|$ sauf sur un ensemble de mesure $\varepsilon_{k,i}$, alors l'espace $Z_1 = [b_k^i \otimes e_i]_{\substack{i\geq 1\\ k\geq 2}}$ est isomorphe à $L^p(\ell_r)$ et complémenté.

<u>Démonstration</u> : On va d'abord montrer que les suites $(b_k^i \otimes e_i)$ et

$(d_k \otimes e_i)$ sont équivalentes. On impose d'abord ε_{ki} assez petit pour que

$$\frac{1}{2}\,\mu(S(d_k)) \leq \mu(S(b_k^i)) \leq 2\,\mu(Sd_k) \quad .$$

On montre facilement que, si $k = 2^n + m$:

$$\|b_k^{i*}\|_{L^q} \leq \frac{2^{\frac{n+1}{p}}}{K_1^{1/p}} \quad \text{et} \quad \|d_k^*\|_{L^q} \leq \frac{2^{n/p}}{K_1^{1/p}} \quad .$$

Comme $\|d_k\|_\infty = \|b_k^i\|_\infty = 1$, on peut appliquer le corollaire I.2 et si on a

$$\sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq 2} \varepsilon_{ki}^{1/p}\,(\|b_k^{i*}\|_{L^q} + \|d_k^*\|_{L^q}) < 1 \quad ,$$

alors les espaces Z_1 et U_1 ont des bases équivalentes et sont donc isomorphes. La remarque qui suit le lemme I.4 nous montre que Z_1 est isomorphe à $L^p(\ell_r)$.

L'espace Z_1^* est engendré par les restrictions à Z_1 des formes linéaires définies par $(b_k^{i*} \otimes e_i^*)_{\substack{i\geq 1\\ k\geq 2}}$. Nous allons montrer que l'injection canonique de Z_1^* dans $L^q(\ell_s)$ est continue. La transposée de cette injection nous donnera une projection continue de $L^p(\ell_r)$ sur Z_1.

pour cela, nous allons montrer que les suites $(b_k^{i*} \otimes e_i^*)$ et $(d_k^* \otimes e_i^*)$ sont équivalentes dans $L^q(\ell_s)$. On sait déjà d'après le lemme I.5 que $(d_k^* \otimes e_i^*)$ est équivalente à $(\zeta_k \otimes e_i^*)$, où $\zeta_k = \dfrac{d_k}{\mu(Sd_k)}$. Cette dernière suite est donc basique inconditionnelle dans $L^q(\ell_s)$. D'autre part $b_k^{i*} = \dfrac{b_k^i}{\mu(Sb_k^i)}$,

donc la suite $(b_k^{i*} \otimes e_i^*)$ est une suite bloc de la base de $L^q(\ell_s)$ et est donc aussi inconditionnelle. On a $|b_k^{i*}(t)| = \lambda_{ki}\,|\zeta_k(t)|$ sauf sur un ensemble de mesure $\varepsilon_{k,i}$ avec

$$\lambda_{ki} = \frac{\mu(S(d_k))}{\mu(S(b_k^i))} \quad \text{donc} \quad |1 - \lambda_{ki}| \leq \frac{2\varepsilon_{k,i}}{\mu(S(d_k))} \leq \frac{2^{n+1}}{K_1}\,\varepsilon_{ki} \quad .$$

On peut choisir ε_{ki} de façon que

$$\sum_k \sum_i \varepsilon_{ki}^{1/q}\,(\|b_k^{i*}\|_{L^\infty}\,\|b_k^i\| + \|\zeta_k\|_{L^\infty}\,\|\zeta_k^*\|) + \sum_{k,i} |1 - \lambda_{ki}| < 1 \quad ,$$

alors d'après le corollaire I.2, on a l'équivalence des deux suites

$(b_k^{i*}\otimes e_i^*)$ et $(\zeta_k\otimes e_i^*)$ dans $L^q(\ell_s)$.

On en déduit l'équivalence de $(b_k^{i*}\otimes e_i^*)$ et $(d_k^*\otimes e_i^*)$. Par conséquent, si

$$\eta = \sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq 2} \alpha_{ki}\, b_k^{i*}\otimes e_i^*$$

$$\varphi = \sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq 2} \alpha_{ki}\, d_k^{*}\otimes e_i^*$$

on a
$$\|\varphi\|_{L^q(\ell_s)} \approx \|\eta\|_{L^q(\ell_s)} .$$

Mais d'après la première partie de la démonstration les suites $(b_k^i\otimes e_i)$ et $(d_k\otimes e_i)$ sont équivalentes donc

$$\|\eta\|_{Z_1^*} \approx \|\varphi\|_{U_1^*} .$$

Enfin nous avons vu dans la remarque qui suit le lemme I.4 que

$$\|\varphi\|_{U_1^*} \approx \|\varphi\|_{L^q(\ell_s)} .$$

On en déduit alors
$$\|\eta\|_{L^q(\ell_s)} \approx \|\eta\|_{Z_1^*} .$$

Ceci nous montre que l'injection de Z_1^* dans $L^q(\ell_s)$ est continue.

CQFD.

Nous fixons $K_2 = 2\mu(K)$ et $K_1 = \mu(K)/2$. Nous allons construire une suite $(b_k)_{k\geq 1}$ qui vérifient les conditions du lemme I.5 pour ces valeurs de K_1 et K_2. Pour chaque i nous construirons alors une suite $(b_k^i)_{k\geq 2}$, bloc de $(h_j)_{j\in\Phi_i}$, qui vérifie les conditions du lemme I.6. En appliquant ce lemme nous aurons donc montré qu'il existe dans Z_1 un sous-espace complémenté isomorphe à $L^p(\ell_r)$.

<u>Construction de</u> $(b_k)_{k\geq 2}$ <u>et</u> $(b_k^i)_{k\geq 2, i\geq 1}$.

<u>Première étape : i = 1</u>. Nous allons construire (b_k^1) et (b_k). Pour chaque t dans K on peut construire une suite strictement croissante $n_1(t) < n_2(t) < \ldots < n_j(t) < \ldots$ telle que $n_j(t) = k$ si k est le j-ième indice dans Φ_1 tel que $h_k(t) \neq 0$. Soit $\psi_j' = \{n_j(t)/t\in K\}$. On voit facilement que $\psi_j'\cap\psi_i' = \emptyset$ si $i\neq j$. On considère une sous-suite ψ_1 et ψ_1' telle que $\{h_k\}_{k\in\psi_1}$ soit une famille maximale à support disjoint dans $\{h_k\}_{k\in\psi_1'}$. Pour tout i_o dans ψ_1 on définit de même ψ_{2,i_o}, sous-suite de ψ_2', telle

que $\{h_k\}_{k\in\psi_{2,i_o}}$ soit une famille maximale à support disjoint dans $\{h_k / k\in\psi_2',\ S(h_k)\subset S(h_{io})\}$. On pose $\psi_2 = \bigcup_{i_o\in\psi_1} \psi_{2,io}$. On définit ainsi des familles disjointes ψ_n, telles que pour $i\in\psi_n$, il existe $j\in\psi_{n-1}$ tel que $S(h_i)\subset S(h_j)$. Posons $K_n = \bigcup_{j\in\psi_n}$, il est facile de voir que $\cap K_n = K$. Si on se donne une suite de nombres $(\delta_{n,1})_{n\geq 0}$ positifs, on peut extraire une sous-suite $\ell(n)$ telle que

$$\mu(K_{\ell(n)}\setminus K) < \delta_{n,1} .$$

Posons alors
$$b_2 = \sum_{j\in\psi_{\ell(0)}} h_j .$$

Supposons définis les b_k pour $k\leq 2^n$, on posera alors

$$b_{2^n+(2m-1)} = \sum_{\substack{k\in\psi_{\ell(n)}\\ S(h_k)\subset S(b^+_{2^{n-1}+m})}} h_j$$

$$b_{2^n+2m} = \sum_{\substack{k\in\psi_{\ell(n)}\\ S(h_k)\subset S(b^-_{2^{n-1}+m})}} h_j .$$

Il faut montrer que la suite $d_1 = 1\!\!1_K$ et $d_k = 1\!\!1_K \cdot b_k$ pour $k\geq 2$ vérifie les conditions du lemme I.4.

Pour tout $n\geq 0$ et $m = 1,2,\dots 2^n$ posons

$$B_{n,2m-1} = S(b^+_{2^n+m}) \quad , \quad D_{n,2m-1} = S(d^+_{2^n+m})$$

$$B_{n,2m} = S(b^-_{2^n+m}) \quad , \quad D_{n,2m} = S(d^-_{2^n+m}) .$$

Il est clair que
$$D_{n,j} = B_{n,j}\cap K$$

et
$$D_{n,2m-1}\cup D_{n,2m} = D_{n-1,m} = S(d_{2^n+m}) .$$

Minorons d'abord $\mu(D_{n,j})$ pour évaluer K_1, supposons par exemple que $j = 2k-1$,

$$\mu(D_{n,2k-1}) = \mu(B_{n,2k-1}) - \mu(B_{n,2k-1}\setminus K) .$$

Mais $(B_{n,2k-1}\setminus K) \subset (K_{\ell(n)}\setminus K)$ donc $\mu(B_{n,2k-1}\setminus K) < \delta_{n,1}$. D'autre part les fonctions b_{2^n+k} sont symétriques donc

$$\mu(B_{n,2k-1}) = \mu(S(b^+_{2^n+k})) = \frac{1}{2}\,\mu(S(b_{2^n+k})) \geq \frac{1}{2}\,\mu(S(d_{2^n+k})) \quad .$$

On a donc

$$\mu(D_{n,2k-1}) \geq \frac{1}{2}\,\mu(D_{n-1,k}) - \delta_{n,1} \quad .$$

De même $$\mu(D_{n-1,k}) \geq \frac{1}{2}\,\mu(D_{n-2,\ell}) - \delta_{n-1,1}$$

si $k = 2\ell-1$ ou $k = 2\ell$.

La dernière inégalité est de la forme

$$\mu(D_{1,t}) \geq \frac{1}{2}\,\mu(D_{o,u}) - \delta_{1,1} \qquad \text{avec } u = 1 \text{ ou } 2$$

$$\mu(D_o,u) \geq \frac{1}{2}\,\mu(S(b_2) - \delta_{o1} \geq \frac{1}{2}\,\mu(K) - \delta_{o1} \quad .$$

En multipliant membre à membre on obtient

$$\mu(D_{n,2k-1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}\,\mu(K) - (\frac{\delta_{o1}}{2^n} + \ldots + \delta_{n,1})$$

$$\geq \frac{1}{2^{n+1}}\,(\mu(K) - \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j+1}\,\delta_{j,1}) \quad .$$

On peut choisir la suite $\delta_{j,1}$ de façon que $K_1 \geq \frac{\mu(K)}{2}$. Nous allons maintenant majorer $\mu(D_{n,2k-1})$ pour évaluer K_2 :

$$\mu(D_{n,2k-1}) \leq \mu(B_{n,2k-1}) = \frac{1}{2}\,\mu(Sb_{2^n+k}) \quad .$$

Mais $$\mu(Sb_{2^n+k}) \leq \frac{1}{2}\,\mu(Sb_{2^{n-1}+\ell}) \quad \text{si} \quad k = 2\ell \text{ ou } 2\ell-1 \quad .$$

La dernière inégalité est

$$\mu(Sb_{2+u}) \leq \mu(Sb_2) \leq \frac{1}{2}\,(\mu(K) + \delta_{o1}) \quad .$$

On en déduit $$\mu(D_{n,2k-1}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}\,(\mu(K) + \delta_{o1}) \quad .$$

On peut choisir δ_{o1} de façon que $K_2 \leq 2\mu(K)$.

D'autre part on a $b_k(t) = d_k(t)$ sauf sur un ensemble de mesure δ_{n1}, si

$k=2^n+m$. Il suffit donc d'imposer

$$\delta_{n1} < \varepsilon_k \quad \forall\, k = 2^n+1,\dots 2^{n+1} \quad .$$

<u>2ème étape : Construction de</u> b_k^i. Si on impose $\delta_{n1} < \varepsilon_{k1}$ $\forall\, k = 2^n+1,\dots 2^{n+1}$ alors on peut poser $b_k^1 = b_k$.

Fixons $i>1$. On peut alors définir comme précédemment une suite (Ψ_n) de sous-suites de Φ_i, et si $K_n = \bigcup_{j\in\Psi_n} S(h_j)$, on aura de même $\bigcap K_n = K$.

Donnons-nous, pour i fixé, une suite $\delta_{n,i}>0$. On peut extraire une suite $\ell(n)$ telle que $\mu(K_{\ell(n)}\backslash K) < \delta_{n,i}$. On posera alors

$$b_k^i = \sum_{\substack{j\in\Psi_{\ell(n)} \\ S(h_j)\subset S(b_k)}} h_j \quad .$$

Il est facile de voir que l'on obtient ainsi une suite bloc de $(h_j)_{j\in\Phi_i}$.

Nous allons montrer que si la suite $\ell(n)$ est bien choisie, alors on a $|b_k^i(t)| = |b_k(t)|$ sauf sur un ensemble de mesure $\varepsilon_{k,i}$. Comme $S(b_k^i)\subset S(b_k)$, il est clair que $|b_k^i(t)| = |b_k(t)|$ sauf sur $S(b_k)\backslash S(b_k^i)$.

Considérons une somme finie $\hat{b}_k$ de la somme définissant b_k, telle que $S(\hat{b}_k)\subset S(b_k)$ et $\mu(S(b_k)\backslash S(\hat{b}_k)) < \delta_{n,i}$ pour $k=2^n+m$. Je choisis alors $\ell(n)$ assez grand pour que l'on ait la propriété suivante : si $j\in\Psi_{\ell(n)}$ et $S(h_j)$ rencontre $S(\hat{b}_k)$, alors $S(h_j)\subset S(\hat{b}_k)$ et ceci pour tout $k=2^n+1, 2^n+2,\dots 2^{n+1}$.

On peut faire ce choix car les $\hat{b}_k$ sont des sommes finies. Il est clair alors que $K\cap S(\hat{b}_k)\subset S(b_k^i)\subset S(b_k)$, donc pour $t\in K$ on aura $|b_k^i(t)| \neq |d_k(t)|$ seulement si $t\in S(b_k)\backslash S(\hat{b}_k)$, et pour $t\notin K$ on aura $|b_k^i(t)| \neq |d_k(t)|$ seulement si $t\in S(b_k^i)\backslash K$. La réunion de ces deux ensembles est de mesure inférieure à $2\delta_{n,i}$. Il suffit donc de choisir $2\delta_{n,i} < \varepsilon_{n,i}$.

La construction est donc possible et ceci achève la démonstration du théorème I.3 dans l'hypothèse (1).

<u>Démonstration du théorème I.3 dans l'hypothèse (2)</u> : Nous gardons les mêmes notations et supposons maintenant que pour toute partie infinie M de $\mathbb{N}$ on a

$$\bigcap_{i\in M} \hat{\Phi}_i^C = \emptyset \quad \text{p.s.} \quad .$$

Donc pour tout entier k, $\bigcup_{i\geq k} \hat{\Phi}_i = [01]$ p.s. On peut facilement construire une suite (P_n) d'entiers telle que si $B_n = \bigcup_{i=P_n+1}^{P_{n+1}} \hat{\Phi}_i$, alors $\mu(B_n) > 1 - \frac{1}{4^n}$.

Fixons n et posons $B_{ni} = \hat{\Phi}_i / \bigcup_{P_n<j<i} \hat{\Phi}_j$, $i = P_n+1, \ldots P_{n+1}$. Les B_{ni} sont deux-à-deux disjoints et $\bigcup_{i=P_n+1}^{P_{n+1}} B_{ni} = B_n$. On peut donc trouver des compacts $C_{n,i} \subset B_{n,i}$ tels que $C_n = \bigcup_{i=P_n+1}^{P_{n+1}} C_{n,i}$ soit de mesure $> 1 - \frac{1}{4^n}$.

Pour n fixé, la famille des compacts $C_{n,i}$ est finie et disjointe, donc leur distance respective est minorée par un nombre $\varepsilon_n > 0$. Posons alors pour $P_n < i \leq P_{n+1}$:

$$\Phi_i' = \{k \in \Phi_i / S(h_k) \text{ rencontre } C_{ni} \text{ et } \mu(S(h_k)) < \frac{\varepsilon_n}{2}\} .$$

Il est clair que $\hat{\Phi}_i' \supset C_{n,i}$ et de plus si $k \in \Phi_i'$, $\ell \in \Phi_j'$ alors

$$S(h_k) \cap S(h_\ell) = \emptyset .$$

Posons alors $\Psi_n = \bigcup_{i=P_n+1}^{P_{n+1}} \Phi_i'$. Nous allons montrer que Z contient un sous-espace complémenté isomorphe à l'espace $Y = [h_k \otimes e_n]_{\substack{n\geq 1 \\ k\in\Psi_n}}$. Comme $\hat{\Psi}_n$ contient C_n et que $\mu(\bigcap_n C_n) > 0$ on sait d'après la première partie de la démonstration que Y est isomorphe à $L^p(\ell_r)$. Le théorème sera donc démontré. Considérons $Z_o = [h_k \otimes e_i]_{\substack{i\in\mathbb{N} \\ k\in\Phi_i'}} = [E_n]_{n\in\mathbb{N}}$, où $E_n = [h_k \otimes e_i]_{\substack{P_n<i\leq P_{n+1} \\ k\in\Phi_i'}}$.

Or il est facile de voir que si f_n est dans E_n on a

$$\|\sum_n f_n(t)\|_{\ell_r}^p = (\sum_n \|f_n(t)\|_{\ell_r}^r)^{P/r} .$$

D'autre part, comme les compacts C_{ni} sont disjoints, on a

$$\|f_n(t)\|_{\ell_r} = |\langle f_n(t);\zeta_n\rangle| \quad \text{où } \zeta_n = e^*_{p_n+1} + \cdots + e^*_{p_{n+1}} .$$

Z_o est donc isométrique à l'espace engendré par les fonctions de la forme $<f_n(t),\zeta_n>\otimes e_n$, où $f_n \in E_n$. Mais on voit facilement que, pour n fixé :

$$[<f_n(.),\zeta_n>/f_n \in E_n] = [h_k / k \in \Psi_n] \quad .$$

Donc Z_o est isométrique à Y. On sait que Z_o est complémenté dans $L^p(\ell r)$ car c'est un espace engendré par une sous-suite de la base.

Ceci achève la démonstration du théorème I.3.

II - PRIMARITE DE $L^p(\ell r)$.

Nous allons utiliser une méthode semblable `celle de [1] pour démontrer que $L^p(\ell\ )$ est primaire.

[Proposition II.1 : Les espaces $L^p(\ell_r)$ et $L^p((\oplus\ell_2)_{\ell_r})$ sont isomorphes.

Démonstration : Le premier est manifestement isométrique à un sous-espace complémenté du second, il nous suffit de montrer que le second est isomorphe à un sous-espace complémenté de $L^p([01]^2,\ell_r)$. Soit $F \in L^p((\otimes\ell_2)_{\ell_r})$, $F = (F_n)_{n\geq 1}$, $F_n(t) \in \ell_2$ et $F_n(t) = (f_k^{(n)}(t))_{k\geq 1}$. On a

$$\|F\|^p = \int \|F(t)\|^p \, dt$$

$$\|F\|^p = \int (\sum_n (\sum_k f_k^{(n)}(t)^2)^{r/2})^{p/r} \, dt \quad .$$

Considérons l'opérateur $T : L^p((\otimes\ell_2)_{\ell_r}) \to L^p([01]^2,\ell_r)$ défini par

$$(TF)(t,u) = (g_n(t,u))_{n\geq 1}$$

avec $$g_n(t,u) = \sum_k f_k^{(n)}(t) \ \varepsilon_k(u) \quad ,$$

$\varepsilon_k(.)$ désigne la k-ième fonction de Rademacher . On a

$$\|TF\|^p = \iint \|TF(t,u)\|_{\ell_r}^p \, dt \, du \quad .$$

Posons $$\varphi_k(t) = (f_k^n(t))_{n\geq 1}$$

alors $$TF(t,u) = \sum_k \varphi_k(t)\ \varepsilon_k(u)\quad .$$

D'après les inégalités de Kahane on a

$$\int \|\sum_k \varphi_k(t)\ \varepsilon_k(u)\|_{\ell_r}^p\ du \approx (\int \|\sum_k \varphi_k(t)\ \varepsilon_k(u)\|_{\ell_r}^r\ du)^{p/r}\quad .$$

On en tire

$$\|TF\|^p \approx \int dt[\int \sum_n |\sum_k f_k^{(n)}(t)\ \varepsilon_k(u)|^r\ du]^{p/r}\quad .$$

En utilisant maintenant les inégalités de Khintchine on a

$$\|TF\|^p \approx \int (\sum_n (\sum_k f_k^{(n)}(t)^2)^{r/2})^{p/r}\ dt = \|F\|^p\quad .$$

T est donc un isomorphisme sur son image qui est l'espace Z engendré par les fonctions de la forme $\varphi_k(t)\otimes\varepsilon_k(u)$ où φ_k est à valeurs dans ℓ_r et ε_k la k-ième fonction de Rademacher. Il reste à montrer que cet espace est complémenté dans $L^p([01]^2,\ell_r)$. On définit un opérateur de $L^p([01]^2,\ell_r)$ dans Z en posant

$$(Qf)(t,u) = \sum_k \langle f(t,.),\varepsilon_k(.)\rangle\ \varepsilon_k(u)$$

où $$\langle f(t,.),\varepsilon_k(.)\rangle = \int f_k(t,s)\ \varepsilon_k(s)\ ds\quad .$$

Il faut montrer que Q est une projection bornée sur Z. Il est facile de voir que $Q_{|Z} = id_{|Z}$ car si

$$f(t,u) = \varphi_{k_o}(t)\ \varepsilon_{k_o}(u)$$

$$\langle f(t,.),\varepsilon_k(.)\rangle = \delta_{k,k_o}\ \varphi_{k_o}(t)\quad .$$

D'autre part $$Qf(t,u) = \sum_k \varphi_k(t)\ \varepsilon_k(u)$$

où $$\varphi_k(t) = (\varphi_k^n(t))_{n\geq 1}$$

$$\varphi_k^n(t) = \langle f^n(t,.),\varepsilon_k(.)\rangle\quad .$$

D'après le calcul fait dans la première partie de la démonstration, on a

$$\|Qf\|^p \approx \int (\sum_n (\sum_k \varphi_k^n(t)^2)^{r/2})^{p/r} \, dt \quad .$$

Désignons par P la projection orthogonale sur la suite de Rademacher. Pour tout t fixé on a

$$\|Pf^n(t,.)\|_{L^2} = [\sum_k \varphi_k^n(t)^2]^{1/2} \quad .$$

Or on sait que

$$\|Pf^n(t,.)\|_{L^2} \approx \|Pf^n(t,.)\|_{L^r} \leq K \, \|f^n(t,.)\|_{L^r} \quad ,$$

puisque cette projection est bornée dans L^r, si $r > 1$. On a donc

$$(\sum_k \varphi_k^n(t)^2)^{r/2} \leq K^r \int |f^n(t,u)|^r \, du$$

$$\|Qf\|^p \leq K' \int dt \, [\sum_n \int |f^n(t,u)|^r \, du]^{p/r}$$

$$\leq K' \int dt \, [\int \|f(t,u)\|_{\ell_r}^r \, du]^{p/r} \quad .$$

Supposons $p \geq r$ alors $\| \quad \|_{L^r} \leq \| \quad \|_{L^p}$ donc

$$\|Qf\|^p \leq K' \int dt \int \|f(t,u)\|_{\ell_r}^p \, du = K' \, \|f\|^p \quad .$$

Pour tout $p \geq r$ nous avons montré que Z est complémenté dans $L^p([01]^2, \ell_r)$ et par conséquent la proposition est vraie pour $p \geq r > 1$. En passant aux duaux, on voit qu'elle est également vraie pour $1 < p \leq r$.

<u>Proposition II.2</u> : La base naturelle $(h_k \otimes e_j^i)$ de $L^p((\oplus \ell_2)_{\ell_r})$ est une base inconditionnelle.

<u>Lemme II.3</u> : Soit $x_k \in (\oplus \ell_2)_{\ell_r}$ telle que $\sum_k h_k \otimes x_k$ converge, alors cette série converge inconditionnellement.

<u>Démonstration</u> : D'après la remarque faite par Pisier [3], il suffit de le démontrer lorsque $p = r$. Posons

$$x_k = \sum_i (\sum_j \lambda_{ijk} \, e_j^i) \quad ,$$

où $(e_j^i)_{j \geq 1}$ est la base de ℓ_2.

On a $\qquad \|\sum_k h_k(t)\ x_k\|^p_{(\otimes\ell_2)_p} = \sum_i (\sum_j (\sum_k \lambda_{ijk}\ h_k(t))^2)^{p/2}$.

Soit $$\Delta^p = \int \|\sum_k h_k(t)\ x_k\|^p\ dt \quad .$$

On utilise les inégalités de Khintchine :

$$\Delta^p \approx \int \sum_i \int |\sum_{j,k} \lambda_{ijk}\ h_k(t)\ \varepsilon_j(u)|^p\ dt\ du$$

$$\approx \sum_i \iint |\sum_k h_k(t)\ g_{k,i}(u)|^p\ dt\ du \quad ,$$

où $$g_{k,i}(u) = \sum_j \lambda_{ijk}\ \varepsilon_j(u) \quad .$$

Mais la base de Haar est inconditionnelle et par conséquent

$$\Delta^p \approx \sum_i \iint |\sum_k \pm\ h_k(t)\ g_{k,i}(u)|^p\ dt\ du$$

$$\Delta^p \approx \|\sum_k \pm\ h_k \otimes x_k\|^p \quad .$$

CQFD.

<u>Démonstration de la proposition</u> : Nous allons donner une expression équivalente de la norme Δ qui montrera qu'elle ne dépend que du carré de λ_{ijk}

$$\Delta^p = \int \|\sum_k h_k(t)\ x_k\|^p_{(\oplus\ell_2)_{\ell_r}}\ dt \quad .$$

D'après le lemme II.3 on a

$$\Delta^p \approx \iint \|\sum_k \varepsilon_k(u)\ h_k(t)\ x_k\|^p\ dt\ du \quad .$$

Fixons maintenant t, si on applique les inégalités de Kahane on a

$$E = \int \|\sum_k \varepsilon_k(u)\ h_k(t)\ x_k\|^p\ du \approx [\int \|\sum_k \varepsilon_k(u)\ h_k(t)\ x_k\|^r\ du]^{p/r}$$

$$E^{r/p} \approx \int \sum_i (\sum_j (\sum_k \varepsilon_k(u)\ h_k(t)\ \lambda_{ijk})^2)^{r/2}\ du \quad .$$

On utilise à nouveau les inégalités de Khintchine

$$E^{r/p} \approx \iint \sum_i |\sum_{j,k} \varepsilon_j(s)\ \varepsilon_k(u)\ h_k(t)\ \lambda_{ijk}|^r\ du\ ds \quad .$$

Il est alors facile de vérifier que

$$E^{r/p} \approx \sum_i \Big(\sum_{j,k} \lambda_{ijk}^2 \; h_k^2(t)\Big)^{r/2}$$

donc

$$\Delta^p \approx \int \Big[\sum_i \Big(\sum_{j,k} \lambda_{ijk}^2 \; h_k^2(t)\Big)^{r/2}\Big]^{p/r} dt \quad .$$

CQFD.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème principal.

<u>Théorème II.4</u> : L'espace $L^p(\ell_r)$ est primaire si p et $r \in]1,+\infty[$.

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition II.1 il suffit de montrer que si P est une projection de $L^p((\oplus \ell_2)_{\ell_r}) = Y$, alors l'un des deux espaces PY ou $(I-P)(Y)$ contient un sous-espace complémenté isomorphe à $L^p(\ell_r)$.
Nous considérons la base naturelle de Y

$$h_k^{i,j} = h_k \otimes e_j^i \quad \text{où} \quad e_j^i = (0,0,\ldots,e_j,0\ldots) \quad ,$$

le vecteur e_j étant écrit à la i-ième place.
$(h_k^{i,j})^*$ désigne la suite biorthogonale et P une projection de Y. Posons

$$\Phi_i = \{k / |\langle h_k^{ij*}, Ph_k^{i,j}\rangle| \geq \tfrac{1}{2} \text{ pour une infinité d'indices } j\}$$

$$\Psi_i = \{k / |\langle h_k^{ij*}, (I-P)h_k^{i,j}\rangle| \geq \tfrac{1}{2} \text{ pour une infinité d'indices } i\} \quad .$$

En reprenant les notations de la première partie on voit facilement $\hat{\Phi}_i \cup \hat{\Psi}_i = [01]$ pour tout i. Deux cas peuvent alors se produire :

- ou bien l'une des deux suites (Φ_i) ou (Ψ_i) vérifient l'hypothèse (1) du théorème I.2 ;
- ou bien ni l'une, ni l'autre ne la vérifie, mais alors (Φ_i) vérifie l'hypothèse (2) car $\hat{\Phi}_i^C \subset \Psi_i$.

Supposons donc que (Φ_i) vérifie l'une des hypothèses du théorème I.3.
Soit $\Omega = \{k,i / i \in \mathbb{N} \, , \, k \in \Phi_i\}$; cet ensemble est en bijection avec $\mathbb{N}$.
Comme d'autre part pour tout i et k fixés, $h_k^{i,j}$ tend vers 0 faiblement, on peut construire des indices $(j(k,i))_{(k,i)\in\Omega}$ deux-à-deux distincts et tels que

1o) $$|\langle h_k^{i,j(k,i)*} ; Ph_k^{i,j(k,i)}\rangle| \geq \tfrac{1}{2} \qquad \forall \, (k,i) \in \Omega \quad .$$

2o) Il existe des blocs $y_{k,i}$ de la base tels que

$$\|Ph_k^{i,j(k,i)} - y_{ki}\| < \frac{\delta}{2^{k+i+1}} ,$$

où δ est un nombre fixé.

On peut alors appliquer le lemme 1 de [1] si δ a été choisi assez petit et on en conlut :

1o) La suite $\{Ph_k^{i,j(k,i)}\}_{(k,i)\in\Omega}$ est équivalente à $\{h_k^{i,j(k,i)}\}_{(k,i)\in\Omega}$.

2o) L'espace qu'elle engendre est complémenté dans $L^p((\oplus\ell_2)_{\ell_r})$.

Il nous suffit donc de montrer que l'espace engendré par la suite $\{h_k^{i,j(k,i)}\}_{(k,i)\in\Omega}$ est isomorphe à $L^p(\ell_r)$. Soit

$$\Delta = \sum_{(k,i)\in\Omega} \lambda_{ki}\ h_k \otimes e^i_{j(k,i)}$$

$$\|\Delta(t)\|^r = \sum_i (\sum_n (\sum_{k\in B_{n,i}} \lambda_{ki}\ h_k(t))^2)^{r/2} ,$$

où $B_{ni} = \{k / j(k,i) = n\}$.

Par construction B_{ni} a au plus un élément et on a donc

$$(\sum_{k\in B_{n,i}} \lambda_{k,i}\ h_k(t))^2 = \sum_{k\in B_{n,i}} \lambda^2_{k,i}\ h^2_k(t)$$

$$\|\Delta(t)\|^r = \sum_i (\sum_k \lambda^2_{k,i}\ h^2_k(t))^{r/2}$$

$$\|\Delta\|^p = \int \|\Delta(t)\|^p\, dt = \int [\sum_i (\sum_k \lambda^2_{k,i}\ h^2_k(t))^{r/2}]^{p/r}\, dt .$$

Le lemme I.1 nous montre que la suite est équivalente à la suite $\{h_k \otimes e_i\}_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ k\in\Phi_i}}$ dans $L^p(\ell_r)$. Comme (Φ_i) vérifie les hypothèses du théorème I.3, l'espace engendré est bien isomorphe à $L^p(\ell_r)$. Ceci achève la démonstration.

III - PRIMARITE DE $\ell_p(L^r)$ pour $p \geq 1$ et $r > 1$.

Dans ce paragraphe nous démontrerons que les espaces $\ell_p(L^r)$ sont primaires pour $1 \leq p < +\infty$ et $r > 1$, et aussi l'espace $C_o(L^r)$. Si (h_k)

est la base de Haar de L^r, alors la suite $h_k^i = (0,0\dots,0,h_k,0\dots)$, où h_k est écrit à la i-ème place, est une base inconditionnelle de $Y = \ell_p(L^r)$. Cela résulte immédiatement du fait que la suite (h_k) est une base inconditionnelle de L^r et de la définition de la norme de Y.

Nous allons d'abord étudier l'espace engendré par une sous-suite de la base, $(h_k^i)_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ k\in\Phi_i}}$. Nous gardons les mêmes notations qu'aux paragraphes précédents.

<u>Proposition III.1</u> : S'il existe $\varepsilon > 0$, et une partie infinie I de $\mathbb{N}$ telle que $\mu(\hat{\Phi}_i) \geq \varepsilon$ pour tout i dans I, alors l'espace engendré par la sous-suite $(h_k^i)_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ k\in\Phi_i}}$ est isomorphe à $\ell_p(L^r)$.

<u>Démonstration</u> : Si on désigne par Z cet espace, il est complémenté dans Y et en utilisant la méthode de décomposition de Pełczynski, il suffit de montrer que Z contient un sous-espace complémenté isomorphe à $\ell_p(L^r)$. On peut donc supposer que $I = \mathbb{N}$.

Si on regarde la démonstration de [2] on voit que pour chaque i il existe un isomorphisme entre L^r et l'espace engendré par la suite $(h_k)_{k\in\Phi_i}$ et en outre on peut construire un isomorphisme T_i tel que $\|T_i\|\,\|T_i^{-1}\|$ ne dépend que de $\mu(\hat{\Phi}_i)$.

Supposons donc construit une telle famille d'isomorphismes avec

$$\|T_i^{-1}\| \leq \varphi(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \|T_i\| = 1 \quad .$$

On définit alors un opérateur de $\ell_p(L^r)$ sur Z en posant

$$Tf = (T_i f_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{si} \quad f = (f_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

$$\|Tf\|^p = \sum_i \|T_i f_i\|_{L^r}^p \leq \sum_i \|T_i\|^p \, \|f_i\|_{L^r}^p \leq \sum_i \|f_i\|_{L^r}^p = \|f\|^p$$

$$\|Tf\| \leq \|f\| \quad .$$

On démontre de même que $\qquad \|Tf\| \geq \frac{1}{\varphi(\varepsilon)} \|f\| \quad .$

Il est facile de voir que l'image de T est Z tout entier, donc Z est isomorphe à $\ell_p(L^r)$.

<u>Théorème III.2</u> : Les espaces $C_o(L^r)$ et $\ell_p(L^r)$ sont primaires, pour $1 < r < +\infty$ et $1 \leq p < \infty$.

<u>Démonstration</u> : Comme L^r est isomorphe à $L^r(\ell_2)$ pour $r > 1$, on a un isomorphisme entre $\ell_p(L^r)$ et $\ell_p(L^r(\ell_2))$. Je fais la démonstration dans le cas de ℓ_p. Elle serait analogue pour $C_o(L^r)$. Soit $Y = \ell_p(L^r(\ell_2))$ et P une projection de Y dans lui-même. Il suffit de montrer que PY ou (I-P)(Y) contient un sous-espace complémenté isomorphe à $\ell_p(L^r)$. Soit $(h^i_{k,j})$ la base naturelle de Y

$$h^i_{k,j} = (0,\dots,0,h_k \otimes e_j,0\dots) \quad ,$$

où $h_k \otimes e_j$ est écrit à la i-ème place.
Pour tout i posons

$$\Phi_i = \{k \in \mathbb{N} / \ |<h^{i*}_{k,j} , Ph^i_{k,j}>| \geq \frac{1}{2} \text{ pour une infinité de } j\}$$

$$\Psi_i = \{k \in \mathbb{N} / \ |<h^{i*}_{k,j} , (I-P)h^i_{k,j}>| \geq \frac{1}{2} \text{ pour une infinité de } j\} \quad .$$

Pour chaque i, on a $\Phi_i \cup \Psi_i = \mathbb{N}$. On en déduit facilement que $\hat{\Phi}_i \cup \hat{\Psi}_i = [01]$ et par conséquent on peut supposer qu'il existe une partie infinie I de $\mathbb{N}$ telle que $\mu(\hat{\Phi}_i) \geq \frac{1}{2}$ pour tout i dans I. Sur l'ensemble d'indices $\Omega = \{(k,i)/i \in I, k \in \Phi_i\}$ on peut mettre un ordre,et en utilisant le fait $\lim_{j\to+\infty} h^i_{k,j} = 0$ on peut construire par récurrence des indices $(j(k,i))_{(k,i)\in\Omega}$, deux-à-deux distincts tels que

(1) $$|<h^{i*}_{k,j(k,i)} ; Ph^i_{k,j(k,i)}>| \geq \frac{1}{2} \quad .$$

(2) Il existe une suite bloce $(\mathcal{J}_{k,i})$ telle que

$$\|Ph^i_{k,j(k,i)} - \mathcal{J}_{ki}\| < \delta/2^{k+i} \quad .$$

Si δ est assez petit on peut appliquer le lemme 1 de Alspach, Enflo et Odell [1] ; on en déduit que PY contient un sous-espace complémenté isomorphe à l'espace engendré par la suite $(h^i_{k,j(k,i)})_{(k,i)\in\Omega}$. Or

$$\begin{aligned}\|\sum_{(k,i)\in\Sigma} \alpha_{ki}\, h^i_{k,j(k,i)}\|^p &= \sum_i \|\sum_k \alpha_{ki} \otimes e_{j(k,i)}\|^p_{L^r(\ell_2)} \\ &= \sum_{i\in I} [\int (\sum_n (\sum_{k\in B_{i,n}} \alpha_{ki}\, h_k(t))^2)^{r/2} dt]^{p/r} \quad ,\end{aligned}$$

où $B_{i,n} = \{k/j(k,i) = n\}$.
Par construction $B_{i,n}$ contient au plus un indice, donc l'expression Δ ci-dessus s'écrit encore

$$\Delta = \sum_{i\in I} \left[\int \Big(\sum_n \sum_{k\in B_{in}} \alpha_{ki}^2\, h_k^2(t)\Big)^{r/2} dt\right]^{p/r}$$
$$= \sum_{i\in I} \left[\int \Big(\sum_{k\in \Phi_i} \alpha_{ki}^2\, h_k^2(t)\Big)^{r/2} dt\right]^{p/r} .$$

En utilisant le lemme I.1, on obtient donc

$$\Big\|\sum_{(k,i)\in\Omega} \alpha_{ki}\, h^i_{k,j(k,i)}\Big\|^p \approx \sum_{i\in I} \Big\|\sum_{k\in\Phi_i} \alpha_{ki}\, h_p\Big\|^p_{L^r} .$$

PY contient donc un sous-espace complémenté isomorphe à l'espace engendré, dans $\ell_p(L^r)$, par la suite $(h^i_k)_{\substack{i\in I\\ k\in\Phi_i}}$. D'après la proposition III.1, ce dernier espace est isomorphe à $\ell_p(L^r)$ et ceci achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Alspach-Enflo-Odell : On the structure of separable $\mathcal{L}_p$ spaces, Studia Math. LX (1977).

[2] Gamlem-Gaudet : On the subsequences of the Haar system in $L^p(01)$ $1 < p < \infty$, Israel J. Math. 15 (1973).

[3] Maurey : Système de Haar, Séminaire Maurey-Schwartz 1974-75, exposé No 2.

[4] Pisier : Les inégalités de Khintchine-Kahane, Séminaire Maurey-Schwartz 1977-78, exposé No 7.
