SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

La méthode d'interpolation complexe : applications aux treillis de Banach

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. nº 17, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A15_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

LA METHODE D'INTERPOLATION COMPLEXE : APPLICATIONS AUX TREILLIS DE BANACH

G. PISIER

Exposé No XVII

2 Février 1979

INTRODUCTION

Dans cet exposé, nous présentons d'abord (§ 1) les principales propriétés de la méthode d'interpolation complexe introduite par Calderón et Lions. Pour plus de détails, le lecteur se réfèrera avec profit à l'article très détaillé [3] de Calderón. Nous insistons surtout sur les propriétés susceptibles d'applications à la structure isomorphiques des espaces de Banach.

Dans la section 2, on considère l'interpolation complexe entre deux treillis de Banach et dans la section 3, on donne des applications dans la ligne des exposés X et XVI précédents. La section 4 présente plusieurs problèmes suggérés par l'étude du § 2.

§ 1. RAPPELS SUR L'INTERPOLATION COMPLEXE.

1.1 Dans toute la suite, un "couple d'interpolation" (B^0,B^1) sera un couple d'espaces de Banach sur le corps des complexes, tous deux continûment injectés dans un espace vectoriel topologique V (qui sera le plus souvent sous-entendu). On notera $\| \|_0$ et $\| \|_1$ les normes respectives de B^0 et B^1. On peut munir $B^0 \cap B^1$ de la norme

$$\|x\|_{B^0\cap B^1} = \max\{\|x\|_0 , \|x\|_1\}$$

et $B^0 + B^1$ de la norme :

$$\|x\|_{B^0+B^1} = \inf\{\|y\|_0 + \|z\|_1 \mid x = y + z \quad y \in B^0 \quad z \in B^1\} \quad ,$$

ces deux espaces sont alors des espaces de Banach.

1.2 Posons $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}\ z < 1\}$.
Soient B^0, B^1 comme ci-dessus. On définit l'espace $\mathfrak{F}(B^0,B^1)$ comme l'espace des fonctions $f : \overline{D} \to B^0 + B^1$ continues et bornées et vérifiant :

(i) f est analytique sur D.

(ii) $f(it) \in B^0$ et $f(1+it) \in B^1$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

(iii) Les applications $t \to f(it)$ et $t \to f(1+it)$ de $\mathbb{R}$ dans B^0 et B^1 respectivement sont continues et tendent vers 0 quand $|t| \to \infty$.

On introduit sur cet espace la norme notée simplement $\| \|_{\mathfrak{F}}$:

$$\|f\|_{\mathfrak{F}} = \max\{\sup_t \|f(it)\|_o , \sup_t \|f(1+it)\|_1\} \quad .$$

L'espace $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(B^o, B^1)$ est alors un espace de Banach.

1.3 Soit θ tel que $0 \le \theta \le 1$. Considérons l'ensemble $B_\theta = [B^o, B^1]_\theta$ formé des $x \in B^o + B^1$ pour lesquels il existe f dans $\mathfrak{F}$ avec $x = f(\theta)$. Si on munit cet espace de la norme

$$\|x\|_\theta = \inf\{\|f\|_{\mathfrak{F}} \mid f(\theta) = x\}$$

alors il devient un espace de Banach.
Le lecteur notera que cela revient à identifier B_θ au quotient $\mathfrak{F}(B^o, B^1)/\mathcal{N}_\theta$ où $\mathcal{N}_\theta$ est le sous-espace de $\mathfrak{F}$ formé des f tels que $f(\theta) = 0$.

1.4 La principale propriété de B_θ est la "propriété d'interpolation" : Soient (C^o, C^1) un autre couple d'interpolation et soit $T : B^o + B^1 \to C^o + C^1$ un opérateur linéaire. Si T est borné de B^o dans C^o et de B^1 dans C^1, alors T est borné de $[B^o, B^1]_\theta$ dans $[C^o, C^1]_\theta$.

1.5 L'espace $B^o \cap B^1$ est dense dans l'espace $B_\theta = [B^o, B^1]_\theta$ pour tout θ dans $[0,1]$ (cf. [3] § 9.3). B_o (resp. B_1) est un sous-espace fermé de B^o (resp. B^1). De plus, on a $[B^o, B^1]_\theta = [B_o, B_1]_\theta$ $(0 \le \theta \le 1)$.

1.6 Dans cette terminologie, le théorème de Riesz-Thorin devient le résultat suivant : Soit (Ω, μ) un espace mesuré σ-fini. Soient p_o, p_1 avec $1 \le p_o, p_1 \le \infty$. Il est clair qu'on peut associer à tout couple d'interpolation (B^o, B^1), le couple d'interpolation $(L^{p_o}(\mu; B^o), L^{p_1}(\mu; B^1))$. La version "moderne" du théorème de Riesz-Thorin est alors :

$$[L^{p_o}(\mu; B^o), L^{p_1}(\mu; B^1)]_\theta = L^{p_\theta}(\mu; [B^o, B^1]_\theta)$$

avec $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}$ et les deux normes correspondantes sont égales.

Nous verrons au § 2 une forme beaucoup plus générale due à Calderón.

1.7 Etudions la dualité :

D'après 1.5, on peut supposer sans restreindre la généralité que $B^o \cap B^1$ est dense à la fois dans B^o et dans B^1. Les espaces duaux $B^{o'}$ $B^{1'}$ sont alors continûment injectés dans $(B^o \cap B^1)'$; ils forment donc un couple d'interpolation. On a alors : si l'un des espaces B^o ou B^1 est réflexif[♦], alors le dual de $[B^o,B^1]_\theta$ s'identifie à l'espace $[B^{o'},B^{1'}]_\theta$ avec égalité des normes correspondantes.

Signalons par ailleurs que $[B^o,B^1]_\theta$ est réflexif dès que B^o ou B^1 l'est (cf. [3] § 12.2). Le lecteur se reportera à [3] § 12.1 pour l'identification du dual de $[B^o,B^1]_\theta$ dans le cas général : Calderón y montre que $[B^o,B^1]_\theta'$ s'obtient à partir de $B^{o'}$ et $B^{1'}$ par une méthode d'interpolation un peu différente de la méthode complexe.

D'autre part, on peut généraliser la propriété d'interpolation à des applications multilinéaires (cf. [3] § 10.1).

1.8 Pour finir, nous voudrions préciser un point qui est implicite dans [3] (cf. aussi [11]) et qui est sans doute important pour des applications éventuelles à la structure des espaces de Banach : d'après [3] § 9.4, on a pour toute fonction $f \in \mathfrak{F}(B^o,B^1)$ l'inégalité suivante :

$$(1.1) \qquad \|f(\theta)\|_{B_\theta} \leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(it)\|_o \, \mu_o(\theta,t)dt\right] + \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(1+it)\|_1 \, \mu_1(\theta,t)dt\right]$$

où $\mu_o(\xi,t)$, $\mu_1(\xi_1,t)$ sont des noyaux positifs définis pour $\xi \in \overline{D}$ et $t \in \mathbb{R}$ (ils forment à eux deux le noyau de Poisson associé au domaine D) et vérifient :

$$\frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_o(\theta,t)dt = \frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_1(\theta,t)dt = 1 \quad .$$

(Pour une formule explicite cf. [3] § 9.4).

Notons ν_o^θ et ν_1^θ respectivement les mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ $\frac{1}{1-\theta}\mu_o(\theta,t)dt$ et $\frac{1}{\theta}\mu_1(\theta,t)dt$. D'après (1.1) on a donc a fortiori :

$\forall\ p_o,p_1,\alpha \in [1,\infty]$

♦ En réalité, une lecture attentive de [3] § 9.5 montre qu'il suffit que $B^{o'}$ ou $B^{1'}$ ait la propriété de Radon-Nikodym.

$$(1.2) \qquad \|f(\theta)\|_{B_\theta} \leq \left\{ (1-\theta)\ \|f(it)\|^{\alpha}_{L^{p_o}(\nu^\theta_o;B^o)} + \theta\ \|f(1+it)\|^{\alpha}_{L^{p_1}(\nu^\theta_1;B^1)} \right\}^{1/\alpha} .$$

Soit $\widetilde{\mathfrak{F}}$ l'espace des fonctions $f : \overline{D} \to B^o + B^1$, continues bornées, analytiques sur D et telles que

$$\int \|f(it)\|_o^{p_o}\ \nu_o^\theta(dt) < \infty \quad \text{et} \quad \int \|f(1+it)\|_1^{p_1}\ \nu_1^\theta(dt) < \infty \quad .$$

Munissons $\widetilde{\mathfrak{F}}$ de la norme suivante (qui dépend de θ) :

$$\|f\|_{\widetilde{\mathfrak{F}}} = \left\{ (1-\theta)\ \|f(it)\|^{\alpha}_{L^{p_o}(\nu^\theta_o;B^o)} + \theta\ \|f(1+it)\|^{\alpha}_{L^{p_1}(\nu^\theta_1;B^1)} \right\}^{1/\alpha} .$$

Soit $\mathcal{C}$ le complété de $\widetilde{\mathfrak{F}}$ pour la norme $\|\ \|_{\widetilde{\mathfrak{F}}}$. Il est clair que $\mathfrak{F} \subset \widetilde{\mathfrak{F}}$ et $\forall\ f \in \mathfrak{F}$

$$\|f\|_{\widetilde{\mathfrak{F}}} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}} \quad .$$

L'inégalité (1.2) établit donc :

$$\|x\|_{B_\theta} = \inf\{ \|f(\theta)\|_{\widetilde{\mathfrak{F}}} \mid f \in \widetilde{\mathfrak{F}} \quad f(\theta) = x\} \quad .$$

Par conséquent, $B_\theta = [B^o,B^1]_\theta$ s'identifie à un quotient de $\mathcal{C}$. Or si l'on note $L^{p_o}(B^o) \oplus_{\alpha,\theta} L^{p_1}(B^1)$ l'espace $L^{p_o}(\nu^\theta_o;B^o) \times L^{p_1}(\nu^\theta_1;B^1)$ muni de la norme

$$\|(x,y)\| = \left\{ (1-\theta)\ \|x\|^{\alpha}_{L^{p_o}(\nu^\theta_o;B^o)} + \theta\ \|y\|^{\alpha}_{L^{p_1}(\nu^\theta_1;B^1)} \right\}^{1/\alpha} ,$$

alors il est clair que $\mathcal{C}$ s'identifie isométriquement à un sous-espace fermé de $L^{p_o}(B^o) \oplus_{\theta,\alpha} L^{p_1}(B^1)$. En conclusion : $[B^o,B^1]_\theta$ s'identifie isométriquement à un quotient d'un sous-espace de $L^{p_o}(B^o) \oplus_{\theta,\alpha} L^{p_1}(B^1)$. Donnons quelques exemples d'applications (qui pourraient aussi se voir autrement) :

Si B^o et B^1 sont isométriques (resp. isomorphes) à des espaces hilbertiens, alors il en est de même de $B_\theta = [B^o, B^1]_\theta$ (prendre $p_o = p_1 = \alpha = 2$).
Si B^o et B^1 sont isométriques (resp. isomorphes) à des quotients de sous-espaces d'espaces L^p [en abrégé QSL^p], alors il en est de même de $[B^o, B^1]_\theta$ (prendre $p_o = p_1 = \alpha = p$).
Cette dernière assertion pourrait aussi être obtenue en appliquant 1.6 et le théorème 2 de [5].

On pourrait d'ailleurs faire une remarque analogue pour l'interpolation "à la Lions-Peetre" (cf. [9], [2]) : si B^o, B^1 sont isomorphes à des QSL^p $(1 < p < \infty)$, alors l'espace $[B^o, B^1]_{\theta,p}$ est lui isomorphe à un QSL^p.

1.9 Donnons une autre application facile : on dit qu'un espace de Banach X est p-uniformément lisse (resp. p-uniformément convexe) s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall\ x, y \in X \qquad \frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2} \leq \|x\|^p + C\ \|y\|^p$$

(resp. $\geq \|x\|^p + \frac{1}{C}\ \|y\|^p$) .
Le fait suivant a été observé par B. Beauzamy (implicite dans [1] p. 72) en utilisant la méthode d'interpolation de Lions-Peetre :
Si un espace de Banach complexe X possède une première norme équivalente $\|\ \|_o$ pour laquelle il est p-uniformément lisse $(p > 1)$ et une autre norme équivalente $\|\ \|_1$ pour laquelle il est q-uniformément convexe $(q < \infty)$, alors, pour tout $\theta \in]0,1[$, il possède une norme équivalente $\|\ \|_\theta$ pour laquelle il est <u>à la fois</u> p_θ-uniformément lisse et q_θ-uniformément convexe

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_o} + \frac{\theta}{q_1} \quad .$$

(D'après [12], il suffit pour cela que l'espace X soit super-réflexif.)
Démontrons-le : par hypothèse, on a $\forall\ x, y \in X$

$$(1.3) \qquad \frac{1}{2}\ (\|x+y\|_o^p + \|x-y\|_o^p) \leq \|x\|_o^p + C\ \|y\|_o^p$$

$$(1.4) \qquad \|x\|_1^q + \frac{1}{C}\ \|y\|_1^q \leq \frac{1}{2}\ (\|x+y\|_1^q + \|x-y\|_1^q) \quad .$$

On peut évidemment supposer $C \geq 1$. Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$(1.5) \qquad \frac{1}{2}\ (\|x+y\|_1 + \|x-y\|_1) \leq \|x\|_1 + C\ \|y\|_1$$

(1.6) $$\max\{\|x\|_o, \|y\|_o\} \leq \frac{1}{2} (\|x+y\|_o + \|x-y\|_o) \quad .$$

Notons X_o (resp. X_1) l'espace X muni de la norme $\| \ \|_o$ (resp. $\| \ \|_1$) et notons $\| \ \|_\theta$ la norme de l'espace $[X_o, X_1]_\theta$ (dans ce cas, l'e.v.t. ambiant est l'espace X lui-même !).

D'après 1.6, on peut "interpoler" entre (1.3) et (1.5) et on trouve :

$$\frac{1}{2} (\|x+y\|_\theta^{p_\theta} + \|x-y\|_\theta^{p_\theta}) \leq \|x\|_\theta^{p_\theta} + C\|y\|_\theta^{p_\theta} \quad .$$

De même, en "interpolant" entre (1.4) et (1.6), on trouve :

$$\|x\|_\theta^{q_\theta} + \frac{1}{C} \|y\|_\theta^{q_\theta} \leq \frac{1}{2} (\|x+y\|_\theta^{q_\theta} + \|x-y\|_\theta^{q_\theta}) \quad .$$

Ce qui démontre le résultat annoncé.

On notera que si X_o, X_1 sont des espaces de Banach sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la méthode précédente à des complexifiés et on trouve le même résultat.

1.10 On a un résultat similaire pour la notion de type des espaces de Banach : soit (B^o, B^1) un couple d'interpolation ; si B^o est de type p_o et B^1 de type p_1, alors l'espace $[B^o, B^1]_\theta$ est de type p_θ avec $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}$.

La démonstration est triviale à partir de la définition des espaces de type p (combiner 1.4 et 1.6). Dans [1] p. 75, un résultat analogue est donné pour l'interpolation Lions-Peetre ; il est d'ailleurs évident que tout foncteur d'interpolation qui "commute avec les espaces L^p" (i.e. qui vérifie un analogue de 1.6) vérifie une propriété similaire.

§ 2. APPLICATIONS AUX TREILLIS DE BANACH.

2.1 Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré. On note $L^o(\Omega, \Sigma, \mu)$ l'espace vectoriel topologique des fonctions mesurables à valeurs réelles, muni de la convergence en mesure sur tout ensemble de μ-mesure finie.

2.2 Soit L un espace de Banach dont les éléments forment un sous-espace de $L^o(\Omega, \Sigma, \mu)$ et qui vérifie :

$\forall\, g \in L \quad \forall\, f \in L^o(\Omega, \Sigma, \mu)$

$$|f| \leq |g| \ \mu\text{-p.s.} \Longrightarrow f \in L \quad \text{et} \quad \|f\|_L \leq \|g\|_L \quad .$$

Nous dirons qu'un tel espace L est un "treillis de Banach sur (Ω,Σ,μ)".

2.3 Pour éviter les cas pathologiques, nous supposerons dans la suite que (Ω,Σ,μ) est un espace mesuré "raisonnable" ; c'est-à-dire, soit : μ est σ-finie, soit : il existe une famille de parties $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ disjointes dans Σ, recouvrant Ω, telles que

$$\forall\, \alpha\in A \quad \mu(\Omega_\alpha) < \infty \quad \text{et} \quad \forall\, \sigma\in\Sigma \quad \mu(\sigma) = \sum_{\alpha\in A} \mu(\sigma\cap\Omega_\alpha) \quad .$$

2.4 Pour tout treillis de Banach X sur (Ω,Σ,μ), on note $X(\mathbb{C})$ le complexifié de X, c'est-à-dire l'espace des $f\in L^0(\Omega,\Sigma,\mu;\mathbb{C})$ tels que $|f|\in X$, muni de la norme $\|f\|_{X(\mathbb{C})} = \|\,|f|\,\|_X$.

2.5 Soient X_o, X_1 deux treillis de Banach sur (Ω,Σ,μ). Soient $\|\ \|_o$ et $\|\ \|_1$ leurs normes respectives. $X_o(\mathbb{C})$ et $X_1(\mathbb{C})$ forment évidemment un couple d'interpolation (c'est $L^0(\Omega,\Sigma,\mu;\mathbb{C})$ qui joue le rôle de l'e.v.t. ambiant) et l'espace $[X_o(\mathbb{C}),X_1(\mathbb{C})]_\theta$ est lui aussi un treillis de Banach sur (Ω,Σ,μ). Grâce à un résultat de Calderón, on va pouvoir "identifier" l'espace $[X_o(\mathbb{C}),X_1(\mathbb{C})]_\theta$.

En effet, on peut associer au couple X_o, X_1 un troisième espace noté $X_o^{1-\theta}\ X_1^\theta$ défini comme suit : $X_o^{1-\theta}\ X_1^\theta$ est formé des éléments x de $L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ pour lesquels il existe x_o dans X_o et x_1 dans X_1 tels que

$$|x| = |x_o|^{1-\theta}\ |x_1|^\theta$$

(les égalités ou inégalités ont toujours lieu au sens μ-p.s., nous ne le répèterons pas dans la suite) ; cet espace est muni de la norme

$$\|x\|_{X_o^{1-\theta}\ X_1^\theta} = \inf\{\|x_o\|_o^{1-\theta}\ \|x_1\|_1^\theta\}$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations comme ci-dessus.

On peut vérifier (cf. [3] § 33.5) que $X_o^{1-\theta}\ X_1^\theta$, muni de cette norme, est un treillis de Banach sur (Ω,Σ,μ).

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat de Calderón sur lequel est basé ce paragraphe :

Théorème 2.6 ([3]) : Soient X_o, X_1 deux treillis de Banach sur un espace mesuré σ-fini (Ω,Σ,μ). Si X_1 est réflexif♦, l'espace $[X_o(\mathbb{C}),X_1(\mathbb{C})]_\theta$ coïncide avec l'espace $X_o^{1-\theta}\ X_1^{\theta}(\mathbb{C})$ et leurs normes sont égales $(0<\theta<1)$.

Définition 2.7 : Soient p, q avec $1\leq p\leq q\leq\infty$ et soit X un treillis de Banach sur (Ω,Σ,μ).

(i) X est dit p-convexe s'il existe une constante M telle que : $\forall\ n\ \forall\ \{x_1,\dots,x_n\}\subset X$

$$\|(\Sigma\ |x_i|^p)^{1/p}\|\leq M(\Sigma\ \|x_i\|^p)^{1/p}\quad .$$

La plus petite valeur possible de M est notée $M^{(p)}(X)$.

(ii) X est dit q-concave s'il existe M tel que $\forall\ n\ \forall\ \{x_1,\dots,x_n\}\subset X$

$$(\Sigma\ \|x_i\|^q)^{1/q}\leq M\ \|(\Sigma\ |x_i|^q)^{1/q}\|$$

(avec la convention usuelle si $q=\infty$).
La plus petite valeur possible de M est notée $M_{(q)}(X)$.
On notera que tout treillis de Banach X est nécessairement 1-convexe et ∞-concave.

2.8 Le plus souvent, on peut supposer sans restreindre la généralité que $M^{(p)}(X)=M_{(q)}(X)=1$. En effet, d'après un résultat de T. Figiel et W. Johnson (cf. [8] prop. 1.d.8), si X est p-convexe et q-concave, alors il existe un treillis de Banach Y sur (Ω,Σ,μ) tel que $M^{(p)}(Y)=M_{(q)}(Y)=1$ est un isomorphisme respectant l'ordre $T:X\to Y$ tel que

$$\|T\|\ \|T^{-1}\|\leq M^{(p)}(X)\ M_{(q)}(X)\quad .$$

Signalons par ailleurs que l'on peut définir la p-convexité et la q-concavité pour des treillis de Banach généraux (cf. [4] où ces notions sont introduites sous un autre nom : type $\geq p$ et type $\leq q$).

2.9 Soit B un espace de Banach complexe. Une fonction à valeurs dans B sur (Ω,Σ,μ) sera dite mesurable si elle est limite μ-p.s. d'une

---

♦ Il suffit en fait (cf. [3] § 13.6) que X_1 ait la propriété suivante : $\forall\ f\in X_1,|f_n|\leq|f|$ et $|f_n|\to 0$ p.s. $\Rightarrow\|f_n\|_{X_1}\to 0$.

suite de fonctions "simples" à valeurs dans B (i.e. de la forme $\sum_1^n 1_{A_i} x_i$ avec $A_i \in \Sigma$, $x_i \in B$). On définit l'espace X(B) comme l'espace formé des fonctions f mesurables à valeurs dans B et telles que $\omega \to \|f(\omega)\|_B$ soit un élément de X ; on le munit de la norme

$$\|f\|_{X(B)} = \|(\|f\|_B)\|_X \quad .$$

Soit alors B_o, B_1 un couple d'interpolation et soit X_o, X_1 deux treillis de Banach sur (Ω,Σ,μ).
Les espaces $X_o(B_o)$ et $X_1(B_1)$ forment aussi un couple d'interpolation ; si l'on suppose que X_1 est réflexif[♦] alors $[X_o(B_o),X_1(B_1)]_\theta$ coïncide avec l'espace $X_o^{1-\theta}\, X_1^\theta([B_o,B_1]_\theta)$ et leurs normes sont égales. Ce résultat (dont le théorème 2.6 ainsi que 1.6 sont des cas particuliers) est démontré dans [3] § 33.6.
Donnons-en une application immédiate : soit $\ell^p(\mathbb{C})$ $(1 \le p \le \infty)$ l'espace des suites complexes à puissance p-ième sommable et, pour tout entier n, notons $\ell_n^p(\mathbb{C})$ l'espace correspondant de dimension n.
Supposons que X_i est p_i-convexe et q_i-concave, $i = 0$ ou 1, et supposons que X_1 est réflexif[♦]. Alors $X_\theta = X_o^{1-\theta}\, X_1^\theta$ est p_θ-convexe et q_θ-concave avec $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}$ et $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_o} + \frac{\theta}{q_1}$. On a de plus :

$$M^{(p_\theta)}(X_\theta) \le M^{(p_1)}(X_1)^\theta\, M^{(p_o)}(X_o)^{1-\theta} \tag{2.1}$$

$$M_{(q_\theta)}(X_\theta) \le M_{(q_1)}(X_1)^\theta\, M_{(q_o)}(X_o)^{1-\theta} \quad .$$

Montrons-le dans le cas de la convexité (la concavité se traite similairement) : d'après 1.6 on a $[\ell_n^{p_o}(X_o(\mathbb{C})),\ell_n^{p_1}(X_1(\mathbb{C}))]_\theta = \ell_n^{p_\theta}(X_\theta(\mathbb{C}))$; il suffit donc d'appliquer le résultat précédent avec $B_o = \ell_n^{p_o}(\mathbb{C})$, $B_1 = \ell_n^{p_1}(\mathbb{C})$: par la propriété d'interpolation (cf. (1.4)) on peut estimer la norme de l'injection

$$\ell_n^{p_\theta}(X_\theta(\mathbb{C})) \longrightarrow X_\theta(\ell_n^{p_\theta}(\mathbb{C}))$$

en fonction de ses valeurs pour $\theta = 0$ et 1. On obtient alors (2.1). Supposons par exemple que X_1 est isométrique à un espace de Hilbert de sorte que X_1 est à la fois 2-convexe et 2-concave et $M^{(2)}(X_1) = M_{(2)}(X_1) = 1$. Si l'on ne fait aucune hypothèse sur X_o, alors $X_\theta = X_o^{1-\theta}\ X_1^\theta$ est nécessairement p-convexe et p'-concave avec $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2}$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$.
Notre principal résultat constitue la réciproque de ce dernier énoncé :

<u>Théorème 2.10</u> : Soit p tel que $1 < p < 2$. Soit X un treillis de Banach sur (Ω,Σ,μ), p-convexe et p'-concave avec $M^{(p)}(X) = M_{(p')}(X) = 1$. Posons $X_1 = L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$. Il existe alors un treillis de Banach X_o sur (Ω,Σ,μ) tel que $X = X_o^{1-\theta}\ X_1^\theta$ avec égalité des normes correspondantes, où θ est déterminé par la relation $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2}$.

<u>Démonstration</u> : On définit X_o comme l'ensemble des $f \in L^o(\Omega,\Sigma,\mu)$ tels que :

a) $|f|^{1-\theta}\ |g|^\theta \in X \quad \forall\, g \in X_1$,

b) l'ensemble $\{|f|^{1-\theta}\ |g|^\theta \mid \|g\|_1 \le 1\}$ est borné dans X.

On munit cet ensemble de la norme

$$\|f\|_o = \sup\{(\|\ |f|^{1-\theta}\ |g|^\theta\ \|_X)^{\frac{1}{1-\theta}} \mid g \in X_1 \quad \|g\|_1 \le 1\} \quad .$$

Commençons par montrer la sous-additivité de $\|\ \|_o$: soient $x,y \in X_o$ et soit $g \in X_1$ avec $\|g\|_1 \le 1$, il s'agit de montrer qu'il existe $g',g'' \in X$ avec $\|g'\|_1 \le 1$, $\|g''\|_1 \le 1$ tels que :

$$\|\ (|x| + |y|)^{1-\theta}\ |g|^\theta\ \|_X \le \left\{\|\ |x|^{1-\theta}\ |g'|^\theta\ \|_X^{\frac{1}{1-\theta}} + \|\ |y|^{1-\theta}\ |g''|^\theta\ \|_X^{\frac{1}{1-\theta}}\right\}^{1-\theta} \quad .$$

Posons $\qquad h' = |x|^{1/2}\ |g|\ (|x| + |y|)^{-1/2}$

et $\qquad h'' = |y|^{1/2}\ |g|\ (|x| + |y|)^{-1/2}$

avec la convention $0/0 = 0$, puis :

$$g' = \frac{h'}{\|h'\|_1} \qquad g'' = \frac{h''}{\|h''\|_1} \quad .$$

On notera que $(|h'|^2 + |h''|^2)^{1/2} = |g|$, donc (puisque X_1 est 2-concave) $\|h'\|_1^2 + \|h''\|_1^2 \le 1$.

D'autre part, on vérifie que :

$$\left\{(\|h'\|_1 \ |g'|)^{\theta p}|x|^{(1-\theta)p} + (\|h''\|_1 \ |g''|)^{\theta p} \ |y|^{(1-\theta)p}\right\}^{1/p} =$$

$$= (|x| + |y|)^{1-\theta} \ |g|^{\theta}$$

d'où, puisque $M^{(p)}(X) = 1$:

$$\|(|x| + |y|)^{1-\theta} \ |g|^{\theta}\|_X \leq$$

$$\leq \left\{\|(\|h'\|_1 \ |g'|)^{\theta} \ |x|^{1-\theta}\|_X^p + \|(\|h''\|_1 \ |g''|)^{\theta} \ |y|^{1-\theta}\|_X^p\right\}^{1/p}$$

d'où par l'inégalité de Hölder :

$$\leq \left(\|h'\|_1^2 + \|h''\|_1^2\right)^{\theta/2} \left(\| \ |g'|^{\theta} \ |x|^{1-\theta}\|_X^{\frac{1}{1-\theta}} + \| \ |g''|^{\theta} \ |y|^{1-\theta}\|_X^{\frac{1}{1-\theta}}\right)^{1-\theta}$$

ce qui est bien l'inégalité annoncée puisque $\|h'\|_1^2 + \|h''\|_1^2 \leq 1$.
D'autre part, il est facile de voir que

$$\|f\|_{X_o} = 0 \Longrightarrow f = 0 \quad \mu\text{-p.s.}$$

Donc X_o est normé ; c'est évidemment un treillis, la démonstration standard du fait qu'il est complet est laissée au lecteur.

Passons à la propriété principale de X_o : on a évidemment par définition de $\| \ \|_o$:

$$\| \ |f|^{1-\theta} \ |g|^{\theta}\|_X \leq \|f\|_o^{1-\theta} \ \|g\|_1^{\theta}$$

par conséquent : $\qquad X_o^{1-\theta} \ X_1^{\theta} \subset X$

et $\forall \ x \in X_o^{1-\theta} \ X_1^{\theta} \qquad \|x\|_X \leq \|x\|_{X_o^{1-\theta} \ X_1^{\theta}}$.

Pour démontrer l'inégalité inverse, il nous faudra utiliser la p'-concavité de X : soit $x \in X$ fixé, avec $\|x\|_X \leq 1$. Nous allons trouver une décomposition $|x| = |x_o|^{1-\theta} \ |x_1|^{\theta}$ avec $\|x_o\| \leq 1$ et $\|x_1\|_1 \leq 1$. Pour cela, il s'agit de trouver x_1 dans X_1 avec $\|x_1\|_1 \leq 1$ tel que

$$\{x_1 = 0\} \subset \{x = 0\}$$

et tel que $$\|(|x|\,|x_1|^{-\theta})^{\frac{1}{1-\theta}}\|_{X_o} \le 1 \quad ,$$

soit, de manière équivalente, tel que :

$$(2.2)\quad \begin{cases} \forall\, y \in X_1 \text{ avec } \|y\|_1 \le 1 \quad : \\ \qquad\qquad \||x|\,|x_1|^{-\theta}\,|y|^{\theta}\|_X \le 1 \quad . \end{cases}$$

Nous allons exhiber x_1 vérifiant (2.2).
Pour cela, on considère l'opérateur $T : L^{\infty}(\Omega,\Sigma,\mu) \to X$ défini par $T(\varphi) = \varphi x$.
Il est clair que $\|T\| \le \|x\|_X \le 1$.
Nous utiliserons le fait suivant :

$$(2.3)\quad \begin{cases} \text{Il existe } \Phi \text{ dans } L^1(\Omega,\Sigma,\mu) \text{ tel que } \Phi \ge 0,\ \int \Phi\, d\mu \le 1,\ \{\Phi = 0\} \subset \{x = 0\} \\ \text{avec la propriété suivante :} \\ \forall\, \varphi \in L^{p'}(\Omega,\Sigma,\Phi\, d\mu) \qquad \varphi x \in X \quad \text{et} \quad \|\varphi x\|_X \le (\int |\varphi|^{p'}\, \Phi\, d\mu)^{1/p'} . \end{cases}$$

Admettons pour l'instant (2.3) ; si l'on pose $x_1 = \Phi^{1/2}$, alors $\|x_1\|_1 \le 1$ et l'on a : $\forall\, y \in X_1$

$$|x|\ |x_1|^{-\theta}\ |y|^{\theta} \in X$$

et $$\|\,|x|\ |x_1|^{-\theta}\ |y|^{\theta}\|_X \le (\int (|x_1|^{-\theta}\ |y|^{\theta})^{p'}\ \Phi\, d\mu)^{1/p'}$$

$$= (\int |y|^2\ d\mu)^{1/p'} \quad .$$

On obtient donc bien (2.2).
Il reste donc à démontrer (2.3) : Tout d'abord, vérifions que l'opérateur T est p'-sommant et $\pi_{p'}(T) \le 1$. En effet, on a, puisque X est p'-concave : $\forall\, \varphi_1,\dots,\varphi_n \in L^{\infty}(\Omega,\Sigma,\mu)$

$$(2.4)\qquad (\Sigma\ \|T\varphi_i\|^{p'})^{1/p'} \le \|(\Sigma\ |\varphi_i|^{p'})^{1/p'}\ x\|$$

$$\le \|(\Sigma\ |\varphi_i|^{p'})^{1/p'}\|_{L^{\infty}(\mu)} \quad .$$

Ce qui prouve que $\pi_{p'}(T) \le 1$.
Notons que puisque X est p'-concave et (Ω,Σ,μ) raisonnable, l'ensemble $\{x \ne 0\}$ est réunion dénombrable d'ensembles de μ-mesure finie ; on est donc ramené à démontrer (2.3) dans le cas où μ est σ-finie et $\Omega = \{x \ne 0\}$.

Le lecteur vérifiera aisément (appliquer le théorème de Radon-Nikodym) que $T' : X' \to L^\infty(\mu)'$ est en fait à valeurs dans $L^1(\mu) \subset L^\infty(\mu)'$.
Par conséquent, on peut dualiser (2.4) et l'on obtient : $\forall\ \xi_1,\ldots,\xi_n \in X'$

$$\int (\Sigma\ |T'\ \xi_i|^p)^{1/p}\ d\mu \leq (\Sigma\ \|\xi_i\|^p)^{1/p} \quad .$$

On peut appliquer le théorème de [10] : $\exists\ \Phi \geq 0$ avec $\int \Phi\ d\mu \leq 1$ tel que :

$$\forall\ \xi \in X' \qquad \left(\int \left|\frac{T'\xi}{\Phi}\right|^p \Phi\ d\mu\right)^{1/p} \leq \|\xi\| \quad .$$

En dualisant à nouveau (signalons que X est nécessairement réflexif, cf. [8] Th. 1.c.5) on obtient bien (2.3), ce qui termine la démonstration du théorème 2.10.

Nous aurions pu aussi démontrer (2.3) en appliquant le théorème de factorisation de Pietsch ainsi que l'argument du théorème 1 de [13].

D'après des résultats bien connus sur les représentations fonctionnelles des treillis de Banach "abstraits" (cf. [8] Prop. 1.a.9 et Th. 1.b.14), on sait que pour tout treillis de Banach L supposé q-concave pour un $q < \infty$, il existe :

(i) un espace mesuré raisonnable (Ω,Σ,μ),

(ii) un treillis de Banach X sur (Ω,Σ,μ),

(iii) une isométrie linéaire T de L sur X respectant la structure d'ordre.

On peut alors donner un résumé des résultats obtenus :

<u>Théorème 2.11</u> : Soit p tel que $1 < p < 2$ et soit θ tel que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2}$.
Soit L un treillis de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) L est p-convexe et p'-concave avec

$$M^{(p)}(L) = M_{(p')}(L) = 1 \quad .$$

(ii) Il existe un espace mesuré raisonnable (Ω,Σ,μ) et trois treillis de Banach sur (Ω,Σ,μ) X_0, X_1 et X tels que : il existe une isométrie respectant l'ordre de L sur X, X_1 est isométrique à un Hilbert, et enfin $X(\mathbb{C}) = [X_0(\mathbb{C}),X_1(\mathbb{C})]_\theta$ avec égalité des normes correspondantes.

Remarque 2.12 : Le théorème de Calderón (th. 2.6 ci-dessus) est énoncé dans [3] seulement pour μ σ-finie. On remarquera que cela suffit néanmoins pour démontrer le théorème précédent ; en effet, toute fonction de $X_1 = L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ a un support σ-fini, il en est donc de même de toute fonction de $X_o^{1-\theta}\ X_1^{\theta}$, et aussi d'après 1.5 de toute fonction de $[X_o(\mathbb{C}),X_1(\mathbb{C})]_\theta$. On est donc immédiatement ramené au cas σ-fini dans le théorème précédent.

Remarque 2.13 : Il y a une variante du théorème 2.10 valable dans le cas $X_1 = L^s(\Omega,\Sigma,\mu)$ $(1<s<\infty)$: soit θ fixé $(0<\theta<1)$, soient p, q tels que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{1}$, $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{\infty}$. Alors, si on suppose que X est p-convexe et q-concave avec $M^{(p)}(X) = M_{(q)}(X) = 1$, on a encore $X = X_o^{1-\theta}\ X_1^{\theta}$ où X_o est construit à partir de X et $X_1 = L^s(\Omega,\Sigma,\mu)$ exactement comme au théorème 2.10.

§ 3. APPLICATIONS AUX SOUS-ESPACES DE DIMENSION FINIE (DISTANCES A UN ESPACE EUCLIDIEN ET CONSTANTES DE PROJECTION).

La principale application du § 2 est le théorème suivant qui généralise les résultats de [6] et améliore ceux de [7]. Cette section constitue une suite aux exposés X et XVI du présent séminaire.

Théorème 3.1 : Soit X un treillis de Banach r-convexe et s-concave $(1<r\leq 2\leq s<\infty)$. On a :

$\forall\ n\in\mathbb{N}$
$$e_n(X) \leq M^{(r)}(X)\ M_{(s)}(X)\ n^{\alpha}$$
où
$$\alpha = \max\left\{\frac{1}{r}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\right\} .$$

Par conséquent (cf. proposition 1 de l'exposé XVI) : pour tout sous-espace $E\subset X$ de dimension finie égale à n, il existe une projection $P : X\to E$ telle que

$$\gamma_2(P) \leq M^{(r)}(X)\ M_{(s)}(X)\ n^{\alpha} .$$

(Rappelons que l'on a trivialement :

$$d(E,\ell_n^2) \leq \gamma_2(P) \quad \text{et} \quad \|P\| \leq \gamma_2(P) \ .)$$

Démonstration : D'après la proposition 1 de l'exposé XVI, il suffit de démontrer la première assertion concernant $e_n(X)$. D'après 2.6, nous pouvons supposer que

$$M^{(r)}(X) = M_{(s)}(X) = 1 \quad .$$

Posons $$p = \min\{r,s'\} \qquad \frac{1}{s}+\frac{1}{s'} = 1 \quad .$$

On a alors $$\alpha = \frac{1}{p}-\frac{1}{2} \quad .$$

La démonstration résulte du lemme suivant :

Lemme 3.2 : Soit B_o, B_1 un couple d'interpolation. On suppose que B_1 est isométrique à un espace de Hilbert. Soit θ avec $0<\theta<1$. On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad e_n([B_o,B_1]_\theta) \leq n^{\frac{1-\theta}{2}} \quad .$$

Montrons-le : d'après une des propriétés définissant $e_n(X)$ (cf. la propriété (ii) dans la proposition 1 de l'exposé XVI), et d'après 1.6 avec $p_o = p_1 = 2$, on a :

$$e_n([B_o,B_1]_\theta) \leq e_n(B_o)^{1-\theta}\; e_n(B_1)^{\theta} \quad .$$

D'une part (cf. le corollaire 1.1 de l'exposé X), on a $e_n(X_o) \leq \sqrt{n}$ et d'autre part on a trivialement $e_n(B_1) = 1$, on obtient donc le lemme 3.2.

Le théorème 3.1 est alors une conséquence immédiate du théorème 2.10 (noter que $(1-\theta)/2 = \alpha$) et du lemme 3.2.

Remarque 3.3 : Soit X un espace de Banach arbitraire et soit Z un quotient d'un sous-espace de X. Il est immédiat (à partir de la propriété (ii) de la proposition 1 de l'exposé XVI) que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad e_n(Z) \leq e_n(X) \quad .$$

D'où le :

Corollaire 3.4 : Soit X comme au théorème 3.1. Les conclusions du théorème 3.1 restent vraies pour tout quotient d'un sous-espace de X. En particulier, tout espace E de dimension finie qui est un quotient d'un sous-espace de X (ou, ce qui revient au même, un sous-espace d'un quotient de X) vérifie :

$$d(E,\ell_n^2) \leq M^{(r)}(X)\, M_{(s)}(X)\, n^{\alpha} \quad .$$

§ 4. REMARQUES ET PROBLEMES.

Les résultats précédents conduisent naturellement à la définition suivante :

Définition 4.1 : Un espace de Banach complexe X sera dit θ-hilbertien ($0 \leq \theta \leq 1$) s'il existe un couple d'interpolation X_o, X_1 d'espaces de Banach tels que X est isométrique à $[X_o,X_1]_\theta$ et X_1 est isométrique à un espace de Hilbert. Si X est seulement isomorphe à $[X_o,X_1]_\theta$, on dira que X est isomorphiquement θ-hilbertien.

Avec cette définition, il est clair que les espaces 1-hilbertiens sont les espaces de Hilbert tandis que les espaces 0-hilbertiens sont les espaces de Banach ordinaires.

Donnons quelques propriétés de stabilité de cette classe d'espaces de Banach, qui résultent immédiatement du § 1 :

(i) X est θ-hilbertien si et seulement si X' l'est.

(ii) Si X est θ-hilbertien, alors pour tout espace mesuré (Ω,μ), $L^{\alpha}(\Omega,\mu;X)$ l'est aussi si $p \leq \alpha \leq p'$ et $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2}$.

D'autre part, les résultats du § 3 montrent :

(iii) Plus généralement, si L est un treillis p-convexe et p'-concave sur un espace mesuré raisonnable avec $M^{(p)}(L) = M_{(p')}(L) = 1$, alors l'espace L(X) est θ-hilbertien (pour la définition de L(X), cf. 2.9).

(iv) Si X est θ-hilbertien, alors

$$e_n(X) \leq n^{\frac{1-\theta}{2}} \quad .$$

Bien entendu, on a des propriétés analogues dans le cas isomorphique.

Il serait intéressant d'avoir une caractérisation des espaces θ-hilbertiens, ou bien de leurs sous-espaces, ou bien encore des quotients de leurs sous-espaces.

Nous dirons pour abréger qu'un quotient d'un sous-espace d'un espace θ-hilbertien est un espace QS_θ. On a une condition évidemment nécessaire pour que X soit un espace QS_θ :

$$(*)\qquad \forall\ x,y\in X \qquad \left(\frac{\|x+y\|^{p'}+\|x-y\|^{p'}}{2}\right)^{1/p'} \leq (\|x\|^p+\|y\|^p)^{1/p}$$

avec $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{1}+\frac{\theta}{2}$.

Nous ignorons si cette condition est suffisante. D'ailleurs, il n'est pas évident qu'un espace finiment représentable dans un espace QS_θ soit encore un espace QS_θ. Les espaces QS_θ jouissent des mêmes propriétés de stabilité (i), (ii), (iii), (iv) données plus haut. En utilisant 1.8 ci-dessus, on peut vérifier aussi que : si X_o, X_1 est un couple d'interpolation, si X_o et X_1 sont tous deux des espaces QS_θ, alors $[X_o,X_1]_\alpha$ est encore un espace QS_θ, quel que soit α tel que $0<\alpha<1$.

Dans une autre direction, il résulte de (*) que tout espace QS_θ est uniformément convexe et uniformément lisse ; par conséquent, tout espace isomorphe à un espace QS_θ pour un $\theta>0$ est uniformément convexifiable. La réciproque est-elle vraie ?

Signalons que si X est un treillis de Banach, alors X est uniformément convexifiable si et seulement si X est isomorphiquement θ-hilbertien pour un $\theta>0$. En effet, cela résulte du § 2 combiné avec les théorèmes 1.f.12, 1.f.7 et 1.f.1 de [8].

D'autre part, il serait intéressant de traiter les mêmes problèmes qu'au § 2 avec d'autres foncteurs d'interpolation, par exemple avec la méthode de Lions-Peetre [9]. Il est plausible que l'on puisse alors obtenir les mêmes estimations qu'au théorème 3.1 en supposant seulement que X est un treillis de Banach de type r et de cotype s.

Pour finir, soulignons que l'on peut faire une étude analogue dans un cadre très général : soit $\mathcal{P}$ une propriété des espaces de Banach complexes, on dira que X a la propriété $[\mathcal{P}]_\theta$ s'il existe un couple d'interpolation X_o, X_1, X_1 possédant $\mathcal{P}$, tel que X est isométrique à $[X_o,X_1]_\theta$. Par exemple, si $\mathcal{P}$ est la propriété "être de type 2", alors tout espace possédant $[\mathcal{P}]_\theta$ est évidemment nécessairement de type p avec $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{1}+\frac{\theta}{2}$ (cf. 1.10). La réciproque est-elle vraie ?

Si oui, cela répondrait du même coup aux problèmes posés à la page 20 de l'exposé X.

REFERENCES

[1] B. Beauzamy, Espaces d'interpolation réels : topologie et géométrie, Springer Lecture Notes No 666 (1978).

[2] J. Bergh et J. Löfström, Interpolation spaces, an introduction, Springer Verlag Grundlehren 223 (1976).

[3] A.P. Calderón, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math. 24 (1964) 113-190.

[4] J.L. Krivine, Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés, exposés 22-23 du Séminaire Maurey-Schwartz 73-74, Ecole Polytechnique, Paris.

[5] S. Kwapień, On operators factorizable through L_p-spaces, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 31-32 (1972) 215-225.

[6] D. Lewis, Finite dimensional subspaces of L_p, Studia Math. 63 (1978) 207-212.

[7] D. Lewis, N. Tomczak-Jaegermann, Hilbertian and complemented finite dimensional subspaces of Banach lattices and unitary ideals, to appear.

[8] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach spaces, vol. II, Functions spaces, Springer Verlag Ergebnisse, Berlin-Heidelberg-New York (1979).

[9] J.L. Lions, J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Publ. Math. I.H.E.S. 19 (1964) 6-58.

[10] B. Maurey, Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p, Astérisque No 11 (1974) S.M.F.

[11] J. Peetre, Sur la transformation de Fourier de fonctions à valeurs vectorielles, Rend. Sem. Mat. Padova 42 (1969) 15-26.

[12] G. Pisier, Martingales with values in uniformly convex spaces, Israël J. Math. 20 (1975) 325-350.

[13] H.P. Rosenthal, On subspaces of L_p, Annals of Maths. 97 (1973) 344-373.
