Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

G. Pisier

Sur les espaces de Banach de dimension finie à distance extrêmale d'un espace euclidien, d'après V. D. Milman et H. Wolfson

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. nº 16, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A14_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE

D'ANALYSE FONCTIONNELLE

1978-1979

SUR LES ESPACES DE BANACH DE DIMENSION FINIE A DISTANCE EXTREMALE D'UN ESPACE EUCLIDIEN,

d'après V.D. Milman et H. Wolfson

G. PISIER

Exposé No XVI

26 Janvier 1979

Les résultats exposés ci-dessous ont pour origine le papier [3] de Milman et Wolfson. Dans cet article, les auteurs montrent que si un espace de Banach E de dimension n est à une distance (au sens de Banach-Mazur) extrémale d'un espace euclidien, c'est-à-dire si $d(E,\ell^2_n) \geq \delta\sqrt{n}$ avec $\delta > 0$, alors E contient un sous-espace F de dimension $k = k(n,\delta)$ tel que $d(F,\ell^1_k) \leq 2$ et, pour tout $\delta > 0$ fixé, on a : $k(n,\delta) \to \infty$ quand $n \to \infty$.

La démonstration originale a été simplifiée une première fois par W. Johnson et B. Maurey (cf. [3]). Plus tard, de nouvelles simplifications et diverses contributions (dues à W. Johnson, G. Schechtman, D. Lewis et l'auteur) ont permis d'obtenir un premier résultat concernant les constantes de projection. Ce n'est en fait que récemment que je me suis aperçu que la considération des nombres $e_n(X)$ permet de traiter simultanément la question des distances et celle des projections en complète analogie (cf. théorème 9 ci-dessous). Indépendamment (et sans doute avant moi) V. Milman avait abouti au même résultat.

<u>Notations</u> : Cet exposé est une suite naturelle de l'exposé X dont nous conservons les notations. Rappelons la définition de la "distance" de Banach-Mazur d(E,F) de deux espaces de Banach E et F :

$$d(E,F) = \inf\{\|T\| \, \|T^{-1}\|\}$$

l'infimum portant sur tous les isomorphismes T de E sur F. Rappelons aussi que si $u : X \to Y$ est un opérateur entre espaces de Banach, on note $u' : Y' \to X'$ son adjoint, $\pi_2(u)$ sa norme 2-sommante, et $\gamma_2(u)$ sa norme de factorisation par un Hilbert. On note $\Pi_2(X,Y)$ l'espace des opérateurs 2-sommants de X dans Y.

Commençons par un énoncé général :

<u>Proposition 1</u> : Soient X un espace de Banach♦, $C > 0$ une constante et n un entier fixés. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\forall\, v : \ell^2_n \to X,\ \pi_2(v) \leq C\, \pi_2(v')$.

♦ L'énoncé est valable dans le cas réel comme dans le cas complexe. Dans le cas complexe, ℓ^2_n est l'espace euclidien complexe.

ii) Pour tout opérateur $A : \ell^2 \to \ell^2$ de rang $\leq n$, on a :

$$\forall (x_j)_j \in \ell^2(X) \qquad (\sum_i \|\sum_j a_{ij} x_j\|^2)^{1/2} \leq C \|A\| (\sum_j \|x_j\|^2)^{1/2}$$

où $\{a_{ij} \mid i,j \in \mathbb{N}\}$ est la matrice associée à A (c'est-à-dire que, si l'on note e_i la base canonique de ℓ^2, on a $a_{ij} = \langle e_i, Ae_j\rangle$).

iii) Pour tout espace de Banach Z, pour tout sous-espace Y de X et tout opérateur $u : Y \to Z$ de rang $\leq n$, il existe une extension $\tilde{u} : X \to Z$ telle que

$$\tilde{u}|_Y = u \quad \text{et} \quad \gamma_2(\tilde{u}) \leq C \|u\| \quad .$$

iv) Pour tout sous-espace $E \subset X$ de dimension $\leq n$, il existe une projection $P : X \to E$ telle que

$$\gamma_2(P) \leq C \quad .$$

<u>Démonstration</u> : i) $\Rightarrow$ ii). Soit $A : \ell^2 \to \ell^2$ de rang $\leq n$. On a une factorisation de $A : \ell^2 \xrightarrow{A_1} \ell^2_n \xrightarrow{A_2} \ell^2$ avec $A = A_2 A_1$ et $\|A_1\| \, \|A_2\| = \|A\|$. Soit $w : \ell^2 \to X$ défini par

$$w\, e_j = x_j \qquad \forall\, j \in \mathbb{N} \quad .$$

On voit facilement que $\pi_2(w') \leq (\sum \|x_j\|^2)^{1/2}$.

Posons $v = wA_1'$; d'après i) on a $\pi_2(v) \leq C\pi_2(v') \leq \|A_1\| \, \pi_2(w') \leq \|A_1\| \, (\sum \|x_j\|^2)^{1/2}$, donc :

$$\pi_2(w A') = \pi_2(w A_1' A_2') \leq \|A\| \, (\sum \|x_j\|^2)^{1/2} \quad .$$

Par définition de $\pi_2(w A')$, on a :

$$(\sum_i \|w A'(e_i)\|^2)^{1/2} \leq \pi_2(w A')$$

c'est-à-dire : $(\sum_i \|\sum_j a_{ij} x_i\|^2)^{1/2} \leq \|A\| \, (\sum \|x_j\|^2)^{1/2}$.

Ce qui montre que i) $\Rightarrow$ ii).

ii) $\Rightarrow$ iii). Soit u, Y, Z comme en iii). D'après un résultat de Maurey (cf. le théorème 1.3 de l'exposé X de ce même séminaire) il suffit de montrer que ii) implique : $\forall \{y_1,\dots,y_k\} \subset Y$, $\forall \{x_1,\dots,x_m\} \subset X$

(1) $$(y_j)_{j\le k} \prec (x_i)_{i\le m} \Longrightarrow \Sigma \|u(y_j)\|^2 \le C^2 \|u\|^2 \Sigma \|x_i\|^2 .$$

D'après le lemme 4.1 et la remarque 1.1 de l'exposé X, il existe un opérateur $A : \ell^2_m \to \ell^2_k$ de rang $\le n$ et de norme ≤ 1 tel que la matrice associée (a_{ij}) vérifie :

$$\forall\ j = 1,\dots,k \qquad \sum_{\ell=1}^{m} a_{j\ell}\, x_\ell - y_j \in \operatorname{Ker} u .$$

Posons $$\tilde{y}_j = \sum_\ell a_{j\ell}\, x_\ell .$$

D'après ii), on a :

$$(\sum_j \|\tilde{y}_j\|^2)^{1/2} \le C\ (\Sigma \|x_i\|^2)^{1/2} .$$

D'où

$$(\Sigma \|u(y_j)\|^2)^{1/2} = (\Sigma \|u(\tilde{y}_j)\|^2)^{1/2} \le C\ \|u\|\ (\Sigma \|x_i\|^2)^{1/2} ,$$

ce qui est bien l'inégalité annoncée (1).

iii) $\Rightarrow$ iv). Trivial (prendre $u = Id_E$).

iv) $\Rightarrow$ i). Soit $v : \ell^2_n \to X$ et soit E l'image de v. D'après iv), on peut factoriser v de la manière suivante :

$$\ell^2_n \xrightarrow{v} X \xrightarrow{A} H \xrightarrow{B} X$$

où H est un Hilbert, $BAv = v$ et $\|A\|\,\|B\| \le C$. La norme de Hilbert Schmidt, notée $\|w\|_{HS}$, d'un opérateur w entre deux espaces de Hilbert coïncide avec $\pi_2(w)$ (vérification facile) ; on a donc :

$$\|(Av)'\|_{HS} = \pi_2((Av)') \quad ;$$

par conséquent, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \pi_2(v) = \pi_2(BAv) &\le \|B\|\ \pi_2(Av) = \|B\|\ \|Av\|_{HS} = \|B\|\ \|(Av)'\|_{HS} \\ &= \|B\|\ \pi_2((Av)') \\ &\le \|B\|\ \|A\|\ \pi_2(v') \le C\ \pi_2(v') . \end{aligned}$$

On obtient donc i). Ce qui termine la démonstration.

Notation 2 : Pour tout espace de Banach X et tout entier n, on note $e_n(X)$ le plus petit nombre C ayant les quatre propriétés équivalentes de la proposition précédente (e pour euclidien !).

Définition 3 : On dit qu'un espace X contient des ℓ_n^1 uniformément si : $\exists\, C\ \forall\, n\ \exists\, x_1,\dots,x_n \in X$ tels que :

$$\forall\, (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n \qquad \sum_1^n |\alpha_i| \leq \|\Sigma\, \alpha_i\, x_i\| \leq C \sum_1^n |\alpha_i| \ .$$

Autrement dit, X contient une suite de sous-espaces $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $d(X_n,\ell_n^1) \leq C$.

Rappelons brièvement un résultat classique :

Proposition 4 : X contient des ℓ_n^1 uniformément si et seulement si son dual X' a la même propriété.

Démonstration : Supposons que X contient des ℓ_n^1 uniformément. Soit $X_n \subset X$ avec $d(X_n,\ell_{2^n}^1) \leq C$. On a $d(X_n',\ell_{2^n}^\infty) \leq C$. Mais ℓ_n^1 est isométrique à un sous-espace de $\ell_{2^n}^\infty$, et X_n' s'identifie à un quotient de X'. En relevant dans X' les éléments de X_n' correspondant aux vecteurs de base de ℓ_n^1, on trouve que X' contient des ℓ_n^1 uniformément. La réciproque est similaire.

Nous utiliserons un lemme très utile dû essentiellement à Brunel et Sucheston ([1] ; pour une démonstration explicite combiner [1] avec le lemme 1.5 de [2], cf. aussi les exposés de A. Brunel dans le séminaire Maurey-Schwartz 1973-74).

Lemme 5 : Soient $\delta > 0$ et n un entier. Il existe un entier $N = N(n,\delta)$ ayant la propriété suivante : de toute suite $(x_1,\dots,x_N)$ de N éléments d'un espace de Banach quelconque X vérifiant

$$\|x_i\| \leq 1 \quad \forall\, i = 1,2,\dots,N$$

et

$$\|x_i - x_j\| > \delta \quad \forall\, i,j = 1,2,\dots,N \quad i \neq j \ ,$$

on peut extraire une suite notée $y_1,\dots,y_{2n}$ telle que si on pose $x'_j = y_{2j} - y_{2j-1}$ $(j = 1,2,\dots,n)$ la suite $(x'_j)_{j\le n}$ est basique inconditionnelle de constante ≤ 3 c'est-à-dire :

$$(2)\quad \forall\, (\alpha_j)\in \mathbb{R}^n\ \forall\, (\varepsilon_j)\in\{-1,+1\}^n\qquad \left\|\sum_1^n \varepsilon_j\alpha_j x'_j\right\| \le 3\left\|\sum_1^n \alpha_j x'_j\right\| .$$

(On a évidemment encore : $\delta < \|x'_j\| \le 2\ \ \forall\, j = 1,2,\dots,n$.)

De ce lemme, on peut déduire le suivant :

<u>Lemme 6</u> : Soient X un espace de Banach, $u : X \to \ell_2$ un opérateur 2-sommant tel que $\pi_2(u) \le 1$, et soit $x_1,\dots,x_N$ dans X avec $N = N(n,\delta)$ et :

$$\|u(x_i) - u(x_j)\| > \delta\quad \forall\, i,j\in\{1,\dots,N\}\quad i\ne j$$

$$\|x_i\| \le 1\quad \forall\, i = 1,2,\dots,N\ .$$

Il existe alors $x'_1,\dots,x'_n$ dans X tels que

$$\forall\, (\alpha_i)\in\mathbb{R}^n\qquad \frac{\delta^2}{6}\sum_1^n |\alpha_i| \le \left\|\sum_1^n \alpha_i\ x'_i\right\| \le 2\sum_1^n |\alpha_i|$$

c'est-à-dire que X contient un sous-espace $\frac{12}{\delta^2}$- isomorphe à ℓ^1_n.

<u>Démonstration</u> : On applique le lemme précédent (noter que $\|x_i - x_j\| > \|u(x_i - x_j)\| > \delta$ si $i\ne j$) d'où $(x'_1,\dots,x'_n)$ vérifiant (2) avec $\|x'_j\| \le 2$ pour $j = 1,2,\dots,n$. Comme $\pi_2(u)\le 1$, il existe une probabilité λ sur la boule unité de X' munie de $\sigma(X',X)$ telle que

$$\|u(x)\| \le \left(\int |\langle x,\xi\rangle|^2\ d\lambda(\xi)\right)^{1/2}$$

(cf. théorème 1.2 de l'exposé X ; c'est la "factorisation de Pietsch"). Remarquons que

$$\delta \le \|u(x'_j)\| \le \left(\int |\langle x'_j,\xi\rangle|^2\ d\lambda(\xi)\right)^{1/2}$$

d'où, puisque $\|x'_j\| \le 2$: $\quad \delta \le \sqrt{2}\left(\int |\langle x'_j,\xi\rangle|\ d\lambda(\xi)\right)^{1/2}$

soit finalement $\quad \int |\langle x'_j,\xi\rangle|\ d\lambda(\xi) \ge \frac{\delta^2}{2}$.

On peut donc écrire : $\forall\, (\alpha_j)\in\mathbb{R}^n$

$$\frac{\delta^2}{2} \sum_1^n |\alpha_j| \leq \int \sum_1^n |\alpha_j| \; |\langle x'_j,\xi\rangle| \; d\lambda(\xi)$$

$$= \int \max_{\varepsilon_j=\pm 1} |\langle \sum_1^n \varepsilon_j \alpha_j x'_j,\xi\rangle| \; d\lambda(\xi)$$

$$\leq \sup_{\varepsilon_j=\pm 1} \|\sum_1^n \varepsilon_j \alpha_j x'_j\| \leq 3 \|\sum_1^n \alpha_j x'_j\|$$

la dernière inégalité d'après (2). cqfd

On peut maintenant énoncer le

Théorème 7 : Soit X un espace de Banach ne contenant pas de ℓ^1_n uniformément. Alors, il existe une suite ω_n tendant vers 0 quand $n \to \infty$ telle que : pour tout opérateur 2-sommant $u : X \to \ell^2$, on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$a_n(u) \leq \omega_n \, \pi_2(u)$$

où le nombre d'approximation $a_n(u)$ est défini par :

$$a_n(u) = \inf\{\|u - Pu\|\} \quad ,$$

l'infimum portant sur tous les projecteurs orthogonaux $P : \ell^2 \to \ell^2$ de rang $< n$.

Démonstration : Posons :

$$\omega_n = \sup\{a_n(u) \mid u \in \Pi_2(X,\ell^2) \; \pi_2(u) \leq 1\} \quad .$$

Il s'agit de montrer que $\omega_n \to 0$ si $n \to \infty$. Supposons le contraire : alors $\exists\, \delta > 0$ et $\forall\, N \in \mathbb{N}$ $\exists\, u_N : X \to \ell^2$ avec $\pi_2(u_N) \leq 1$ mais $a_N(u_N) > \delta$. Fixons N. Nous allons montrer : $\exists\, x_1, \ldots, x_N \in X$ tels que

$$(*) \quad \forall\, i \neq j \qquad \|x_j\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|u_N(x_i) - u_N(x_j)\| > \delta \quad .$$

On le montre par récurrence : puisque $\|u_N\| \geq a_N(u_N) > \delta$, on trouve $x_1 \in X$ tel que $\|x_1\| \leq 1$ et $\|u_N(x_1)\| > \delta$. Supposons que l'on a trouvé $x_1, \ldots, x_m$ avec la propriété (*) ci-dessus et $m < N$; soit P la projection orthogonale sur le sous-espace de ℓ^2 engendré par $\{u_N(x_1), \ldots, u_N(x_m)\}$. On a $\|u_N - Pu_N\| \geq a_N(u_N) > \delta$ donc $\exists\, x_{m+1} \in X$ tel que $\|x_{m+1}\| \leq 1$ et $\|(u_N - Pu_N)(x_{m+1})\| > \delta$; on a donc

$$\forall\ j \le m \qquad \|u_N(x_{m+1}) - u_N(x_j)\| \ge \|(I-P)(u_N(x_{m+1}) - u_N(x_j))\|$$

$$= \|(I-P)u_N(x_{m+1})\| > \delta \quad .$$

Ce qui établit l'hypothèse de récurrence à l'ordre m+1. Si l'on applique alors le lemme 6 à $(x_1,\dots,x_N)$ et u_N, on trouve -en supposant $N \ge N(\delta,n)$- un sous-espace de X qui est $\frac{12}{\delta^2}$- isomorphe à ℓ^1_n. On obtient ainsi, puisque n est arbitraire, une contradiction avec l'hypothèse que X ne contient pas de ℓ^1_n uniformément.

<u>Remarque 8</u> : (i) On peut démontrer assez facilement que si un espace X vérifie la conclusion du théorème 7, alors nécessairement X ne contient pas de ℓ^1_n uniformément.

(ii) Dans [4] ("added in proof"), on trouve le résultat suivant : un espace X ne contient pas ℓ^1 si et seulement si tout opérateur 2-sommant de X dans ℓ^2 est compact. Le théorème 7 apparaît comme la version locale de ce résultat de Rosenthal, et on pourrait d'ailleurs démontrer le théorème 7 par ultraproduit à partir de l'énoncé de Rosenthal.

Nous en venons au principal résultat de cet exposé :

<u>Théorème 9</u> : Soit X un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) X ne contient pas de ℓ^1_n uniformément.

(ii) $e_n(X)/\sqrt{n} \to 0$ quand $n \to \infty$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} \sup\{d(E,\ell^2_n) \mid E \subset X \ \dim E = n\} = 0$.

(iv) Il existe une suite $\alpha_n > 0$ vérifiant : $\alpha_n/\sqrt{n} \to 0$ quand $n \to \infty$ et telle que : $\forall\ E \subset X$, $\dim E = n$ il existe une projection $P : X \to E$ avec $\|P\| \le \alpha_n$.

<u>Démonstration</u> : C'est la partie (i) ⇒ (ii) qui est intéressante : si X ne contient pas de ℓ^1_n uniformément, d'après la proposition 4, il en est de même pour son dual X' ; donc, d'après le théorème 7, $\omega_n(X') \to 0$ quand $n \to \infty$ où

$$\omega_n(X') = \sup\{a_n(w) \mid w \in \Pi_2(X',\ell^2) \quad \pi_2(w) \le 1\} \quad .$$

Soit alors $u : \ell^2_n \to X$ et soit $k \le n$ un entier que nous déterminerons plus loin.
Par définition de $a_k(u')$, $\exists\ P : \ell^2_n \to \ell^2_n$ projecteur de rang $< k$ tel que $\|u' - Pu'\| \le a_k(u')$ donc

$$\|u - uP\| = \|u' - Pu'\| \le a_k(u') \quad .$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \pi_2(u) &\le \pi_2(uP) + \pi_2(u - uP) \\ &\le \|u\|\ \pi_2(P) + \|u - uP\|\ \pi_2(Id_{\ell^n_2}) \\ &\le \|u\|\ \sqrt{k} + a_k(u')\ \sqrt{n} \end{aligned}$$

soit, puisque $\|u\| = \|u'\| \le \pi_2(u')$ et $a_k(u') \le \omega_k(X')\ \pi_2(u')$

$$\pi_2(u) \le \left[\sqrt{\frac{k}{n}} + \omega_k(X')\right] \sqrt{n}\ \pi_2(u')$$

c'est-à-dire :
$$\frac{e_n(X)}{\sqrt{n}} \le \sqrt{\frac{k}{n}} + \omega_k(X') \quad .$$

Il suffit donc de prendre par exemple k tel que

$$\sqrt{n} < k \le \sqrt{n} + 1 \quad ,$$

pour voir que $\qquad e_n(X)/\sqrt{n} \longrightarrow 0 \quad$ quand $n \to \infty$.

Montrons les autres implications : (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (ii) $\Rightarrow$ (iv) sont triviales.
L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est évidente, si l'on sait que $d(\ell^1_n, \ell^2_n) = \sqrt{n}$ $\forall\ n \ge 1$. Montrons pour finir que (iv) $\Rightarrow$ (i) : il est classique que $\ell^1_{2^n}$ contient un sous-espace E avec $d(E, \ell^2_n) \le 2$, et $\|P\| \ge \delta\sqrt{n}$ pour toute projection P de $\ell^1_{2^n}$ sur E, avec $\delta > 0$ indépendant de n. (On peut prendre pour E le sous-espace engendré par les n premières fonctions de Rademacher considérées comme fonctions sur un ensemble à 2^n points.) Par conséquent, si X contient des ℓ^1_n uniformément, on ne peut avoir (iv). Ce qui achève la démonstration.

Nous avons déjà signalé le problème suivant à l'exposé X :

Problème : Si $e_n(X)/\sqrt{n} \to 0$ quand $n \to \infty$, existe-t-il $\alpha < 1/2$ tel que :

$$\sup_n \frac{e_n(X)}{n^\alpha} < \infty \quad ?$$

D'après les résultats de König, Retherford et Tomczak-Jaegermann (cf. remarque 3.3 de l'exposé X de ce même séminaire) le problème précédent est équivalent au suivant :

Si X ne contient pas de ℓ^1_n uniformément, existe-t-il $C < \infty$ et $\beta < 1/2$ tels que :

$$(3) \quad \begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, \{x_1, \dots, x_n\} \subset X \\ \left(\sum_{i=1}^n \|\sum_{j=1}^n u_{ij}\, x_j\|^2\right)^{1/2} \leq C\, n^\beta \left(\sum_1^n \|x_j\|^2\right)^{1/2} \end{cases}$$

pour toute matrice orthogonale $(u_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$?

En effet, en utilisant la remarque 3.3 de l'exposé X, on peut montrer que (3) entraîne : $e_n(X) \leq (K^2 \operatorname{Log} n) C\, n^\beta$ pour tout $n \geq 2$.
On peut remarquer que (3) est vrai en moyenne : si l'on intègre le carré du 1er membre de (3) par rapport à la mesure de Haar normalisée sur le groupe orthogonal, le résultat est inférieur à

$$\{C(\sum_1^n \|x_i\|^p)^{1/p}\}^2$$

où C est une constante et $p > 1$ est tel que X est de type p.
On sait (cf. [2]) que tout espace qui ne contient pas de ℓ^1_n uniformément est nécessairement de type p pour un $p > 1$. Par analogie, on peut donc espérer une réponse positive au problème précédent. Par ailleurs, si X est de type p et de cotype q avec $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, alors les résultats présentés dans l'exposé X donnent une réponse positive.

Si l'on étudie la démonstration du théorème 9, on s'aperçoit qu'on a démontré le

Théorème 10 ([3]) : Pour tout $\delta > 0$, il existe une suite d'entiers $k_n(\delta)$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $k_n(\delta) \to \infty$ quand $n \to \infty$.

(ii) Tout espace E de dimension n tel que $d(E, \ell^2_n) \geq \delta\sqrt{n}$ contient un sous-espace F de dimension $k_n(\delta)$ tel que $d(F, \ell^1_{k_n(\delta)}) \leq 2$.

Le lecteur peut se reporter à [3] pour plus de précisions, en particulier sur l'ordre de grandeur de $k_n(\delta)$ en fonction de n et aussi sur le cas "isométrique" (i.e. le cas où $d(E,\ell_n^2) = \sqrt{n}$). Bien entendu, on a également un analogue du théorème 10 concernant les constantes de projection, nous laissons au lecteur le soin de l'énoncer.

REFERENCES

[1] A. Brunel, L. Sucheston, On B-convex Banach spaces, Math. Systems Theory 7 (1973) 294-299 et On J-convexity and some ergodic super-properties of Banach spaces, T.A.M.S. 204 (1975) 79-90.

[2] B. Maurey, G. Pisier, Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, Studia Math. 58 (1976) 45-90.

[3] V.D. Milman, H. Wolfson, Minkowski spaces with extremal distance from the Euclidean space, Israël J. Math. 29 (1978) 113-131.

[4] H.P. Rosenthal, Point-wise compact subsets of the first Baire class, Amer. J. Math. 99 (1977) 362-378.
