Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Beauzamy

Sous-espaces invariants dans les espaces de Banach : quelques résultats positifs

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 13, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A12_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

SOUS-ESPACES INVARIANTS DANS LES ESPACES DE BANACH : QUELQUES RESULTATS POSITIFS

B. BEAUZAMY

Exposé No XIII

5 Janvier 1979

Etant donné un espace de Banach E et un opérateur linéaire continu T de E dans E, on dit que le sous-espace vectoriel fermé F est invariant par T si $TF \subset F$. On dit que F est non-trivial si $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. La question de l'existence de sous-espaces invariants non triviaux (en abrégé S.I.N.T.) n'est pas résolue, pour un opérateur quelconque, même dans l'espace de Hilbert. A l'opposé, P. Enflo a construit [2] un exemple d'espace E et d'opérateur T sans S.I.N.T.

Nous nous intéresserons ici à la question de l'existence de S.I.N.T. seulement pour les opérateurs T possédant une propriété particulière :

$$(\mathcal{H}) \qquad \|T\| = 1 \quad \text{et} \quad \exists\, x_0 \in E \quad \text{tel que } T^n x_0 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \text{ dans } E \quad .$$

Même pour les opérateurs possédant $\mathcal{H}$ et même dans les espaces de Hilbert, la question reste ouverte ; le meilleur résultat dans cette direction paraît être celui de C. Foias (voir [3]) : si et ${}^tT$ vérifient tous deux $\mathcal{H}$ (dans E et E' respectivement) et si E est réflexif, T a un S.I.N.T.

Nous allons développer ci-dessous un critère permettant d'assurer qu'un opérateur vérifiant $\mathcal{H}$ possède un S.I.N.T. Ce critère se trouvera satisfait en particulier dans le cas considéré par C. Foias, ce qui nous redonnera une démonstration (peut-être plus simple) du résultat de celui-ci.

Remarquons tout d'abord que l'espace vectoriel fermé engendré par les itérés d'un point : $\overline{\text{span}}\{x_0, Tx_0, T^2x_0, \dots, T^n x_0, \dots\}$ est toujours invariant par T. Nous pouvons donc restreindre au cas où, pour chaque x_0, cet espace est E tout entier. Nous dirons alors que x_0 est <u>cyclique</u>. Ce sous-espace étant séparable, E doit être séparable.

Une seconde remarque évidente est que T doit être injectif et d'image dense (faute de quoi Ker T ou $\overline{\text{Im } T}$ sont des S.I.N.T.).

Une troisième remarque évidente est que si l'on considère

$$F = \{x \in E,\ T^n x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\} \quad ,$$

on a un sous-espace fermé, non égal à E si on admet $\mathcal{H}$; il doit donc être réduit à $\{0\}$, sinon le problème est résolu. Autrement dit,

$\mathcal{H}$ implique que $\forall\ x \neq 0,\ T^n x \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Si x_o est un point cyclique, les combinaisons linéaires finies $\sum_{k\geq 0} T^k x_o$ sont denses dans E. Or sur celles-ci, T agit comme un shift : $T(\sum_{k\geq 0} \alpha_k T^k x_o) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k T^{k+1} x_o$. On peut donc représenter T comme la multiplication par x sur un espace de polynômes, en identifiant :

$$p(x) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k x^k \longleftrightarrow \sum_{k\geq 0} \alpha_k T^k x_o \quad ;$$

et on pose
$$\|p\| = \|\sum_{k\geq 0} \alpha_k T^k x_o\|_E \quad .$$

L'espace E s'identifie ainsi isométriquement à la complétion pour la norme $\|\cdot\|$ d'un espace de polynômes;cet espace sera noté B ; l'opérateur devient la multiplication par x. Nous dirons que nous avons fait la représentation de T sur l'orbite de x_o. L'hypothèse $\mathcal{H}$ se traduit, dans B, par :

$$(1) \qquad \begin{cases} \|x\|_{op} = 1 \\ x^n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \end{cases} .$$

(On note $\|p\|_{op}$ la norme d'opérateur de la multiplication par p, c'est-à-dire $\sup_{\|q\|\leq 1} \|p.q\| = \sup_{\|\sum \beta_j T^j x_o\|\leq 1} \|(\sum \alpha_i T^i)(\sum \beta_i T^j x_o)\|$ si $p(x) = \sum \alpha_i x^i$.)

Dans la suite, nous supposerons toujours (sans le mentionner davantage) l'hypothèse $\mathcal{H}$ satisfaite. Nous supposerons aussi que nous avons représenté T sur l'orbite d'un certain point, qui sera si nécessaire précisé par la suite. Nous allons mettre en évidence certains éléments particuliers de B ; l'approche qui suit nous a été suggérée par P. Enflo.

Nous notons $A(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions, définies sur le tore, dont la série de Fourier est absolument convergente :

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta} \quad , \quad \text{avec} \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k| < \infty \quad .$$

Cet espace est muni de la norme :

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k| \quad .$$

Pour toute fonction $f \in A(\mathbb{T})$, si $f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ik\theta}$, nous poserons (si $m \in \mathbb{Z}$) :

$$\varphi_m(f)(\theta) = \sum_{k\geq -m} c_k\, e^{i(k+m)\theta}$$

(c'est une suite d'éléments de $A(\mathbb{T})$), et

$$\psi_m(f) = \sum_{k\geq -m} c_k\, x^{k+m}$$

(c'est une suite d'éléments de B).
Remarquons que puisque $\|x\|_{op} = 1$, on a :

$$\text{(2)} \qquad \|\psi_m(f)\|_{op} \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k| = \|f\|_{A(\mathbb{T})} \qquad \forall\, m \in \mathbb{Z}$$

et a fortiori

$$\text{(3)} \qquad \|\psi_m(f)\| \leq \|f\|_{A(\mathbb{T})} \qquad \forall\, m \in Z \quad ,$$

ce qui signifie que les $\psi_m(f)$ sont uniformément bornés, en norme et en norme d'opérateurs.

Proposition 1 : Il existe deux fonctions f et g, sur le tore, à supports disjoints, appartenant à $A(\mathbb{T})$, telles que :

$$\psi_m(f) \underset{m\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 \quad \text{dans B}$$

$$\psi_m(g) \underset{m\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \quad \text{dans B}$$

Démonstration de la proposition 1 : Nous allons construire f et g successivement.

Lemme 1 : Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit $f_{N,j}$ $(j = 1,\ldots,N)$ une partition de l'unité sur $\mathbb{T}$, faite de fonctions C^∞, avec, pour tout j, $f_{N,j} = 1$ sur un intervalle de largeur $\frac{2\pi}{N}$, chaque $f_{N,j}$ étant à support dans un intervalle de largeur $\frac{4\pi}{N}$.

Alors, pour chaque $N \geq 1$, il y a au moins un $j \in \{1,2,\dots,N\}$ pour lequel $\psi_m(f_{N,j}) \underset{m\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ dans B.

Démonstration du lemme 1 : Fixons N et écrivons les décompositions en série de Fourier des $f_{N,j}$:

$$f_{N,j}(\theta) = \sum_k a_k^{(N,j)} e^{ik\theta} \quad .$$

On a :

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_k a_k^{(N,j)} e^{ik\theta} = 1$$

et donc $\forall\, m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_k a_k^{(N,j)} e^{i(k+m)\theta} = e^{im\theta} \quad .$$

d'où l'on déduit, d'après l'unicité du développement en série trigonométrique

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} a_k^{(N,j)} &= 1 \quad \text{si } k=0\\ &= 0 \quad \text{si } k \neq 0 \quad .\end{aligned}$$

On a donc, dans l'espace B :

$$\sum_{k\geq -m} \sum_{j=1}^{N} a_k^{(N,j)} x^{k+m} = x^m \quad ,$$

ou encore

$$\sum_{j=1}^{N} \psi_m(f_{N,j}) = x^m \quad .$$

Puisque $x^m \neq 0$ dans B, pour chaque N, il existe au moins un $j \in \{1,\dots,N\}$ pour lequel $\psi_m(f_{N,j}) \underset{m\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$; remarquons que l'on obtient facilement, pour cet indice j,

$$\liminf_{m\to\infty} \|\psi_m(f_{N,j})\| \geq \frac{\alpha_o}{N} \quad , \quad \text{où } \alpha_o = \lim_{m\to\infty} \|x^m\| \quad .$$

Ceci achève la démonstration du lemme 1. Si pour un certain N, il y a deux indices j_1 et j_2 non consécutifs modulo N pour lesquels

$\psi_m(f_{N,j}) \not\to 0$ dans B, la proposition est démontrée, (avec $f = f_{N,j_1}$ et $g = f_{N,j_2}$), car si f_1 et f_2 ne pas consécutifs modulo N, f_{N,j_1} et f_{N,j_2} sont à supports disjoints.

Supposons donc maintenant que, pour tout $N \geq 1$, il n'y ait qu'un seul j, ou deux consécutifs modulo N, qui conviennent.

Notons $\mathcal{U}_N$ la réunion des supports des $f_{N,j}$ tels que $\psi_m(f_{N,j}) \not\to 0$ dans B.

Alors $\mathcal{U}_N$ est un intervalle, et

$$\frac{4\pi}{N} \leq \text{mes. } \mathcal{U}_N \leq \frac{8\pi}{N} . \tag{4}$$

Si, pour deux N différents, N_1 et N_2, on peut trouver deux fonctions f_{N_1,j_1} et f_{N_2,j_2} à supports disjoints telles que $\psi_m(f_{N_1,j_1}) \underset{m\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ et $\psi_m(f_{N_2,j_2}) \underset{m\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, là encore, la proposition est démontrée. Le cas qui nous reste à étudier est donc celui où $\forall\, N_1, N_2$, $\mathcal{U}_{N_1}$ et $\mathcal{U}_{N_2}$ ont une intersection non vide. Comme il s'agit d'intervalles fermés, il résulte alors de (4) que l'intersection $\bigcap_{N\geq 1} \mathcal{U}_N$ contient exactement un point, que nous noterons $a = e^{i\theta_o}$.

<u>Lemme 2</u> : Il existe une fonction $g(\theta) \in A(\mathbb{T})$, identiquement nulle sur un voisinage de a, telle que $\psi_m(g) \underset{m\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ dans B.

<u>Démonstration du lemme 2</u> : Le point x_o sur l'orbite duquel on a fait la représentation de T ne peut être vecteur propre de T, puisqu'il est cyclique. On a donc en particulier $Tx_o - ax_o \neq 0$, c'est-à-dire, dans B, $x - a \neq 0$.

Posons $p_o = a - x$. On a vu que l'on pouvait supposer $x^m p_o \neq 0$ dans B, et donc $\exists\, \gamma > 0$ avec $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\|x^m p_o\| \geq \gamma > 0$.

Posons $f_o(\theta) = e^{i\theta_o} - e^{i\theta}$. Modulo 2π, f_o s'annule au seul point $\theta = \theta_o$. Il résulte du théorème de Wiener-Ditkin (voir [3]) qu'on peut trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $A(\mathbb{T})$, convergeant vers f_o dans $A(\mathbb{T})$, et s'annulant chacune identiquement sur un voisinage de $a = e^{i\theta_o}$.

On choisit n_o assez grand pour que si $n \geq n_o$,

$$\|f_n - f_o\|_{A(\mathbb{T})} \leq \frac{\gamma}{4} .$$

On a alors, $\forall\ m \in \mathbb{N}$,

$$\|e^{im\theta}\ f_n(\theta) - e^{im\theta}\ f_o(\theta)\|_{A(\mathbb{T})} \leq \frac{\gamma}{4} \quad \text{si } n \geq n_o \quad .$$

On choisit ensuite m_o assez grand pour que si $m \geq m_o$,

$$\|e^{im\theta}\ f_{n_o}(\theta) - \varphi_m(f_{n_o})(\theta)\|_{A(\mathbb{T})} \leq \frac{\gamma}{4} \quad .$$

On aura alors $\forall\ m \geq m_o$,

$$\|\varphi_m(f_{n_o})(\theta) - e^{im\theta}\ f_o(\theta)\|_{A(\mathbb{T})} \leq \frac{\gamma}{4}$$

et donc

$$\|\psi_m(f_{n_o}) - x^m\ p_o\| \leq \frac{\gamma}{2}$$

et donc

$$\|\psi_m(f_{n_o})\| \geq \frac{\gamma}{2} \qquad \text{pour } m \geq m_o \quad ,$$

ce qui prouve le lemme 2, avec $g = f_{n_o}$.

Achevons maintenant la démonstration de la proposition 1 : il nous reste, comme nous l'avons vu, le cas où $\bigcap_{N\geq 1} \mathcal{U}_N = \{a\}$. Soit g la fonction donnée par le lemme 2, telle que $\psi_m(g) \neq 0$. Cette fonction s'annule identiquement sur un certain voisinage de a, $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, et, pour N assez grand, $\mathcal{U}_N$ est contenu dans $]a-\frac{\varepsilon}{2}, a+\frac{\varepsilon}{2}[$. La fonction f de la proposition est alors $f_{N,j}$, pour le N et le j correspondants.

Nous allons maintenant voir à quoi correspond, dans B, le fait que f et g soient à supports disjoints :

<u>Proposition 2</u> : Soient f et g deux fonctions de $A(\mathbb{T})$, à supports disjoints. On note $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier de f, $(b_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ ceux de g. On a, dans B, $\forall\ m,n \in \mathbb{N}$:

$$\|\psi_m(f) \cdot \psi_n(g)\|_{op} \leq \|g\|_{A(\mathbb{T})} \cdot \sum_{k<0} |a_{k-m}| + \|f\|_{A(\mathbb{T})} \sum_{j<0} |b_{j-n}| .$$

<u>Démonstration de la proposition 2</u> : Posons

$$\varphi'_m(f)(\theta) = \sum_{k<-m} a_k\ e^{i(k+m)\theta}$$

et $$\varphi'_n(g)(\theta) = \sum_{j<-n} b_j\, e^{i(j+n)\theta} ,$$

si bien que

$$\begin{cases} \varphi'_m(f) + \varphi_m(g) = e^{im\theta}\, f(\theta) & \forall\, m \in \mathbb{N} \\ \varphi'_n(g) + \varphi_n(g) = e^{in\theta}\, f(\theta) & \forall\, n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

Nous allons calculer $\varphi_m(f) \cdot \varphi_n(g)$, qui n'a de coefficients non nuls que sur les exponentielles positives, puisque c'est le cas pour $\varphi_m(f)$ et $\varphi_n(g)$.

Puisque f et g sont à supports disjoints, on a

$$[\varphi_m(f) + \varphi'_m(f)] \cdot [\varphi_n(g) + \varphi'_n(g)] = 0 \quad \forall\, m,n \in \mathbb{N} ,$$

et donc :

$$\varphi_m(f) \cdot \varphi_n(g) = -\varphi'_m(f)\, e^{in\theta}\, g - \varphi_m(f) \cdot \varphi'_n(g) .$$

On sait que

$$\|\psi_m(f) \cdot \psi_n(g)\|_{op} \le \|\varphi_m(f) \cdot \varphi_n(g)\|_{A(\mathbb{T})} ,$$

et il nous reste donc à calculer la somme des coefficients de Fourier d'indices positifs de $\varphi'_m(f) \cdot e^{in\theta} g$ et de $\varphi_m(f) \cdot \varphi'_n(g)$ (puisque les coefficients négatifs doivent s'annuler).

– Pour $\varphi'_m(f) \cdot e^{im\theta} g = \left(\sum_{k<-m} a_k\, e^{i(k+m)\theta}\right)\left(\sum_j b_j\, e^{i(j+n)\theta}\right)$,

le coefficient de $e^{i\nu\theta}$ dans le produit est donc :

$$\sum_{\substack{k+m+j+n=\nu \\ k<-m}} a_k\, b_j = \sum_{\substack{k'+j'=\nu \\ k'<0}} a_{k'-m}\, b_{j'-n} .$$

Le terme à estimer vaut :

$$\sum_{\nu\ge 0} \Big|\sum_{\substack{k'+j'=\nu \\ k'<0}} a_{k'-m}\, b_{j'-n}\Big| = \sum_{\nu\ge 0} \Big|\sum_{k'<0} a_{k'-m}\, b_{\nu-k'-n}\Big|$$

$$\le \sum_{\nu\ge 0} \sum_{k'<0} |a_{k'-m}|\, |b_{\nu-k'-n}|$$

$$\leq \sum_{k'<0} |a_{k'-m}| \left(\sum_{\nu\geq 0} |b_{\nu-k'-n}| \right)$$

$$\leq \|g\|_{A(\mathbb{T})} \sum_{k<0} |a_{k-m}| \quad .$$

– Pour $\varphi_m(f) \cdot \varphi'_n(g) = \left(\sum_{k\geq -m} a_k \, e^{i(k+m)\theta} \right) \left(\sum_{j<-n} b_j \, e^{i(j+n)\theta} \right)$,

le coefficient de $e^{i\nu\theta}$ dans le produit est donc :

$$\sum_{\substack{k+m+j+n=\nu \\ k\geq -m,\, j<-n}} a_k \, b_j = \sum_{j'<0} a_{\nu-j'-m} \, b_{j'-n} \quad .$$

Le terme à estimer vaut donc :

$$\sum_{\nu\geq 0} \left| \sum_{j'<0} a_{\nu-j'-m} \, b_{j'-n} \right| \leq \sum_{\nu\geq 0} \sum_{j'<0} |a_{\nu-j'-m}| \, |b_{j'-n}|$$

$$\leq \sum_{j'<0} \left(\sum_{\nu\geq 0} |a_{\nu-j'-m}| \right) |b_{j'-n}|$$

$$\leq \|f\|_{A(\mathbb{T})} \circ \sum_{j'<0} |b_{j'-n}| \quad ,$$

d'où l'estimation donnée par la proposition 2.

Posons, pour simplifier les notations, $h_m = \dfrac{1}{\|f\|_{A(\mathbb{T})}} \psi_m(f)$,

$p_k = \dfrac{1}{\|g\|_{A(\mathbb{T})}} \psi_k(g)$, $m,k \in \mathbb{N}$, où f et g sont les fonctions données par la proposition 1. Il résulte de celle-ci que, pour un certain $\alpha > 0$,

(5) $$\begin{cases} \|h_m\| \geq \alpha & \forall\, m \\ \|p_k\| \geq \alpha & \forall\, k \quad , \end{cases}$$

(6) $$\|h_m\|_{op} \leq 1 \quad , \quad \|p_k\|_{op} \leq 1 \quad ,$$

et, d'après la proposition 2, $\|h_m \, p_k\|_{op} \to 0$ lorsque $m,k \to +\infty$ (i.e. lorsque $\min(m,k) \to \infty$).

Remarquons aussi qu'il résulte de l'estimation évidente

$$\|h_{m+m'} - x^{m'} \, h_m\| \leq \left(\sum_{j<-m} |b_j| \right) \circ \frac{1}{\|g\|_{A(\mathbb{T})}} \quad , \quad \forall\, m,m' \in \mathbb{N}$$

que l'on a aussi

$$(7) \qquad \|x^{m'} h_m\| \geq \frac{\alpha}{2} \quad \text{si } m \geq m_o \quad , \quad \forall\, m' \in \mathbb{N} \ .$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner le critère assurant qu'il existe un sous-espace invariant non trivial.

<u>Théorème</u> : S'il existe une suite de polynômes ℓ_k et un $q \in B$, $q \neq 0$, avec

$$\ell_k\, p_k \longrightarrow q \quad \text{faiblement dans } B \quad ,$$

$$\sup_k \|x^k \ell_k\| < \infty \quad ,$$

il existe un sous-espace invariant non trivial.

<u>Démonstration</u> : Si $\ell_k p_k \to q$ faiblement, on peut trouver une suite d'entiers ν_k et une suite de coefficients $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\alpha_i \geq 0\ \forall\, i$, avec $\sum_{\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \alpha_i = 1$, $\forall\, k$, tels que

$$p'_k = \sum_{\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \alpha_i\, \ell_i\, p_i \xrightarrow[k\to+\infty]{} q \quad \text{dans } B \ .$$

Posons $K_1 = \sup_k \|x^k \ell_k\| < \infty$. On a, si $\|x^k \ell_k\| \leq K_1$, a fortiori $\|x^{k+j} \ell_k\| \leq K_1 \ \forall\, j$, et donc

$$(8) \qquad \|x^{\nu_{k+1}} \ell_i\| \leq K_1 \quad \text{si } \nu_k < i \leq \nu_{k+1} \ .$$

Posons $p''_k = x^{\nu_{k+1}} p'_k$, supposons la conclusion du théorème fausse : tout élément non nul de B est cyclique, et en particulier q est cyclique. Pour tout $\delta > 0$, on peut alors trouver un polynôme ℓ tel que $\|\ell q - 1\| < \delta$; en particulier, on peut trouver un polynôme ℓ tel que $\|\ell q - 1\| < \frac{\alpha}{4}$. Soit $K = \|\ell\|_{op}$. Posons $\varepsilon = \frac{\alpha}{8K}$. Pour k_o assez grand, on a, si $k \geq k_o$,

$$\|p'_k - q\| < \varepsilon \quad , \quad \text{et donc} \quad \|p''_k - x^{\nu_{k+1}} q\| < \varepsilon \ .$$

On peut écrire, d'après (7), si $k \geq k_1$,

$$\frac{\alpha}{2} \leq \|h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}}\| \leq \|h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}} \ell q - h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}}\| + \|h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}} \ell q\|$$

$$\leq \|\ell q - 1\| + \|\ell\|_{op} \|h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}} q\|$$

puisque $\|h_{\nu_{k+1}}\|_{op} \leq 1$, et donc :

$$\frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{4} + K \|h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}} q\|$$

d'où, si $k \geq k_1$, $\qquad \|h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}} q\| \geq \frac{\alpha}{4K}$.

Mais par ailleurs :

$$\|h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}} q\| \leq \|h_{\nu_{k+1}} (p_k'' - x^{\nu_{k+1}} q)\| + \|h_{\nu_{k+1}} p_k''\|$$

$$\leq \|p_k'' - x^{\nu_{k+1}} q\| + \|h_{\nu_{k+1}} p_k''\|$$

$$\leq \frac{\alpha}{8K} + \|h_{\nu_{k+1}} p_k''\| \quad , \qquad \text{si } k \geq k_o \; .$$

Pour obtenir une contradiction, il nous reste à montrer que $h_{\nu_{k+1}} p_k'' \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. On a en effet :

$$\|h_{\nu_{k+1}} p_k''\| = \|\sum_{\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \alpha_i \ell_i h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}} p_i\|$$

$$\leq \sum_{\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \alpha_i \|x^{\nu_{k+1}} \ell_i\| \|h_{\nu_{k+1}} p_i\|_{op}$$

$$\leq K_1 \sum_{\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \alpha_i \|h_{\nu_{k+1}} p_i\|_{op} \; .$$

Mais $\|h_{\nu_{k+1}} p_i\|_{op} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ si $i > \nu_k$, d'après la proposition 2 ; ceci achève la démonstration du théorème.

Nous allons maintenant, pour terminer, montrer que le critère donné par le théorème est satisfait lorsque ${}^tT$ vérifie aussi $\mathcal{H}$, et retrouver ainsi le résultat de Foias [3].

Proposition 3 (C. Foias [3]) : Si E est réflexif et si T et ${}^tT$ vérifient $\mathcal{K}$, dans E et E' respectivement, T a un sous-espace invariant non trivial.

Démonstration : Supposons qu'il existe $\xi_o \in E'$ avec ${}^tT^n\, \xi_o \not\to 0$. On peut supposer $\|\xi_o\| = 1$; comme $\|{}^tT\| = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|{}^tT^n\, \xi_o\| \geq \delta$.

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\|y_n\| = 1$ et ${}^tT^n\, \xi_o(y_n) = \|{}^tT^n\, \xi_o\|$, $\forall$ n, on a donc

$$\xi_o(T^n\, y_n) > \delta \quad . \tag{9}$$

La suite $(T^n\, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E et en converge pas faiblement vers 0 au vu de (9) ; on peut donc trouver une sous-suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des entiers et un $z_o \neq 0$ tel que $T^{n_k}\, y_{n_k} \to z_o$ faiblement dans E. Donc, pour une suite d'entiers ν_k, de coefficients $\beta_i \geq 0$, avec $\sum\limits_{\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \beta_i = 1$, $\sum\limits_{\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \beta_i\, T^{n_i}\, y_{n_i} \xrightarrow[k\to\infty]{} z_o$ dans E. On peut écrire

$$\sum_{\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \beta_i\, T^{n_i}\, y_{n_i} = T^k \Big[\sum_{\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \beta_i\, T^{n_i-k}\, y_{n_i} \Big] = T^k\, y'_k \quad ,$$

en posant $y'_k = \sum\limits_{\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \beta_i\, T^{n_i-k}\, y_{n_i}$, et on a $\|y'_k\| \leq 1\ \forall$ k ; par ailleurs $\xi_o(z_o) \geq \delta$, et donc $\|z_o\| \geq \delta$.

Faisons la représentation de T sur l'orbite d'un point quelconque (on pourrait choisir z_o par commodité, mais c'est sans importance). On a, en notant encore y'_k dans la représentation :

$$x^k\, y'_k \to z_o \quad \text{dans B}$$

et donc, pour tout n,

$$x^k\, y'_k\, p_n \xrightarrow[k\to 0]{} p_n \cdot z_o \quad . \tag{10}$$

Lemme : L'ensemble $G = \{z \in B,\ p_n \cdot z \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\}$ est un sous-espace fermé invariant dans B.

La démonstration du lemme est immédiate, compte tenu du fait que $\|p_n\|_{op} \leq 1 \ \forall\ n$. Comme $G \not\ni 1$, puisque $p_n \not\to 0$, on peut supposer, sans quoi le problème est résolu, que G est réduit à $\{0\}$. En particulier $p_n\ z_o \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$. Il existe donc $\delta' > 0$ tel que $\forall\ n$,

11 $$\|p_n\ z_o\| \geq \delta' > 0 \quad .$$

Choisissons n_o assez grand pour que, $\forall\ n$,

$$\|p_{n+n_o} - x^n\ p_{n_o}\|_{op} \leq \frac{\delta'}{4} \quad .$$

On aura, d'après (10), pour $k \geq k_o$,

$$\|x^k\ y'_k\ p_{n_o} - p_{n_o}\ z_o\| \leq \frac{\delta'}{4} \quad ,$$

et donc, pour $k \geq k_o$:

$$\begin{aligned}\|p_{k+n_o}\ y'_k - p_{n_o}\ z_o\| &\leq \|p_{k+n_o}\ y'_k - x^k\ y'_k\ p_{n_o}\| + \|x^k\ y'_k\ p_{n_o} - p_{n_o}\ z_o\| \\ &\leq \|y'_k\| \cdot \|p_{k+n_o} - x^k\ p_{n_o}\| + \|x^k\ y'_k\ p_{n_o} - p_{n_o}\ z_o\| \\ &\leq \frac{\delta'}{2} \quad .\end{aligned}$$

Il en résulte qu'une sous-suite des $(y'_k\ p_{k+n_o})_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un q, avec $\|q - p_{n_o}\ z_o\| < \frac{\delta'}{2}$, et donc $q \neq 0$.

On a donc, dans ce cas (quitte à prendre une sous-suite),

$$\ell_k\ p_k \longrightarrow q \quad \text{faiblement} \quad ,$$

et $$\|\ell_k\| \leq 1 \quad ;$$

les hypothèses du théorème sont donc satisfaites. On remarquera qu'elles sont beaucoup plus générales, puisqu'elles admettent $\sup\limits_k \|x^k\ \ell_k\| < \infty$.

<u>Remarques</u> : 1°) On dit qu'un sous-espace fermé F de E est hyperinvariant par T s'il est invariant par tous les opérateurs qui commutent avec T. Le sous-espace que nous obtenons grâce au théorème est en

réalité hyper-invariant : il suffit, pour s'en convaincre, de modifier convenablement la fin de la démonstration du théorème.

2°) On peut remplacer l'hypothèse $\|T\| = 1$ par la suivante :

$$\exists\ M,\ \forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad \|T^n\| \leq M \ .$$

Mais il ne s'agit que d'une généralisation apparente, car la norme

$$[\![x]\!] = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T^n x\|$$

est équivalente à la norme d'origine, et rend T de norme 1.

3°) Au lieu de E réflexif, on peut supposer, comme nous l'a fait observer A. Pełczynski, que T est faiblement compact, et utiliser le résultat dû à W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson et A. Pełczynski [1] suivant lequel tout opérateur faiblement compact se factorise par un espace réflexif.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson, A. Pełczynski, Factoring weakly compact operators, J. of Funct. Anal. 17, 3 (Nov. 1974).

[2] P. Enflo, On the invariant subspace problem, à paraître.

[3] Colojoara et C. Foias, General spectral theory, Gordon and Breach, 1968.

[4] J.P. Kahane, Séries de Fourier absolument convergentes, Springer Verlag, 1970.
