SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

I. EKELAND

Relations d'ordre dans les Banach : quelques applications à l'analyse

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 12, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A11_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

RELATIONS D'ORDRE DANS LES BANACH :

QUELQUES APPLICATIONS A L'ANALYSE

I. EKELAND

(Ceremade - Université Paris 9 Dauphine)

Exposé No XII

15 Décembre 1978

Dans un travail célèbre de 1961 ([1]), Bishop et Phelps ont démontré que l'ensemble des formes linéaires continues sur un Banach V qui atteignent leur maximum sur une partie convexe fermée bornée $X \subset V$ est dense dans le dual topologique V^*. Ce résultat, quoique important et même surprenant, est peut-être moins intéressant que la méthode de démonstration, qui consiste à introduire une relation d'ordre dans V et à montrer que X est inductif pour cette relation d'ordre, puis à appliquer Zorn.

Brøndsted et Rockafellar ([3]) ont adapté cette méthode pour démontrer que toute fonction convexe semi-continue inférieurement sur un Banach V est sous-différentiable. Ils définissent une relation d'ordre appropriée dans $V \times \mathbb{R}$ et montrent que l'épigraphe de f :

$$\text{epi } f = \{(v,a) \in V \times \mathbb{R} \mid a \geq f(v)\} \quad ,$$

qui est convexe puisque f est convexe,et fermé puisque f est s.c.i., est inductif pour cette relation d'ordre.

F. Browder ([2]) a été le premier à se dégager du cadre convexe, en montrant qu'une partie fermée bornée X d'un Banach V pouvait être inductive pour une relation d'ordre appropriée. Il démontre ainsi un analogue non convexe du théorème de Bishop et Phelps : il existe dans la frontière de X une partie dense Σ telle que, si $x \in \Sigma$, il existe un cône C_x de sommet x, d'intérieur non vide, et une boule B_x centrée en x, avec $X \cap C_x \cap B_x = \{x\}$. Là encore, le résultat, quoique utilisé pour fonder une version non-linéaire de l'alternative de Fredholm, me paraît moins intéressant que la méthode.

J'en arrive maintenant à ma contribution personnelle. Avant d'énoncer le résultat, insistons sur le fait que, dans toute la suite, il n'y aura ni convexité, ni compacité, faible ou forte. Les raisonnements s'appuient uniquement sur la fait qu'un espace de Banach est métrique complet.

<u>Théorème 1</u> : Soit (V,d) un espace métrique complet, et $f : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement et bornée inférieurement. Pour tout $u \in V$, il existe $x \in V$ tel que :

(1) $\quad f(v) \leq f(u)$

(2) $\quad d(u,v) \leq 1$

(3) $\forall\, w \neq v, \quad f(w) > f(v) - [f(u) - \inf f]\, d(w,v)$.

Démonstration : Posons $\alpha = f(u) - \inf f$, et introduisons dans $V \times \mathbb{R}$ la relation d'ordre :

$$(w,b) \succsim (v,a) \Longleftrightarrow b - a \leq -\alpha \, d(v,w) \quad .$$

On montre successivement que c'est une relation d'ordre (non totale), et que epi f est inductif pour cette relation d'ordre (ici interviennent les hypothèses sur f, particulièrement la semi-continuité inférieure, grâce à laquelle l'épigraphe est fermé, donc complet). Il y a donc, d'après Zorn, un élément maximal $(v,a) \succsim (u,f(u))$ dans epi f. On en déduit facilement que :

$$a = f(v) \leq f(u)$$

$$d(u,v) \leq \frac{1}{\alpha} (f(u) - f(v)) = \frac{f(u) - f(v)}{f(u) - \inf f}$$

$$d(u,v) \leq 1 \quad .$$

Les inégalités (1) et (2) sont établies, et la relation (3) exprime la maximalité de $(v,f(v))$.

On en déduit immédiatement le

Corollaire 1 : Sous les hypothèses précédentes, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v_\varepsilon \in V$ tel que :

$$f(v_\varepsilon) \leq \inf f + \varepsilon^2$$

$$\forall w \in V , \qquad f(w) \geq f(v_\varepsilon) - \varepsilon \, d(w,v_\varepsilon) \quad .$$

Démonstration : On munit V de la nouvelle distance $\delta = d/\varepsilon$. On choisit un point $u \in V$ tel que $f(u) \leq \inf f + \varepsilon^2$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème 1.

En revenant au cadre des Banach :

Corollaire 2 : Soit V un espace de Banach, et $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable et bornée inférieurement. Il existe une suite $v_n \in V$ telle que :

$$f(v_n) \longrightarrow \inf f$$

$$\|f'(v_n)\|^* \longrightarrow 0 \quad .$$

<u>Démonstration</u> : On applique le corollaire précédent avec $\varepsilon = 1/n$. On obtient une suite $v_n \in V$, avec $f(v_n) \to \inf f$ et :

$$\forall\, w \in V \quad , \qquad f(w) \geq f(v_n) - \frac{1}{n}\, d(w,v_n) \quad .$$

En posant $w = v + tu$, $t \in \mathbb{R}$ et $u \in V$, et en faisant tendre t vers zéro, on obtient :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(v+tu) - f(v)}{t} \geq -\frac{1}{n}\,\|u\|$$

$$\langle f'(v),u\rangle \geq -\frac{1}{n}\,\|u\| \qquad \forall\, u \in V \quad .$$

Soit $$\|f'(v)\|^* \leq \frac{1}{n} \quad ,$$

le résultat désiré.

<u>Application 1</u>. Point fixe :

Caristi ([4]) a démontré un théorème de point fixe qui a attiré beaucoup d'attention, car il ne requiert pas que la fonction étudiée soit continue. Il se démontre aisément à partir du corollaire 1 :

<u>Proposition</u> : Soit (V,d) un espace métrique complet, et $F : V \to V$ une application vérifiant :

$$\varphi(v) - \varphi(F(v)) \leq d(v,F(v)) \qquad \forall\, v \in V \quad ,$$

où $\varphi : V \to \mathbb{R}$ est une fonction s.c.i. donnée. Alors F a un point fixe au moins :

$$\exists\, v \in V \quad : \quad v = F(v) \quad .$$

<u>Démonstration</u> : On applique le corollaire 1 à la fonction φ, avec $\varepsilon = 1/2$. Il existe donc un point $v \in V$ tel que :

$$\forall\, w \in V \quad , \qquad \varphi(w) \geq \varphi(v) - d(w,v)/2 \quad .$$

C'est vrai en particulier pour $w = F(v)$:

$$\varphi(v) - \varphi(F(v)) \leq d(v,F(v))/2 \quad .$$

En comparant à l'hypothèse, on obtient :

$$d(v,F(v)) \leq d(v.F(v))/2$$

et donc $$d(v,F(v)) = 0 \quad .$$

Notons qu'il n'y a pas d'unicité : l'identité $I : V \to V$ satisfait aux hypothèses précédentes (prendre φ constante).

<u>Application 2</u>. Problèmes variationnels :

Bien souvent, on est amené à résoudre une équation du type $F'(v) = 0$. On saura qu'il y a une solution si, par exemple, la fonction F est convexe, s.c.i., tend vers $+\infty$ à l'infini, et si le Banach V est réflexif, ce qui fait beaucoup de conditions. Si elles ne sont pas réalisées, le corollaire 2 nous permet du moins d'affirmer l'existence de solutions approchées : l'équation $F'(v) = 0$ peut être résolue, sinon exactement, du moins avec n'importe quelle précision exigée à l'avance.

On peut même résoudre l'équation $F'(v) = v^*$ pour un ensemble dense de seconds membres v^* :

<u>Proposition</u> : Soit $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable et semi-continue inférieurement sur un Banach V. On suppose qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et une constante $a \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\varphi(t)/t \longrightarrow \infty \quad \text{quand } t \to \infty$$

$$F(v) \geq \varphi(\|v\|) - a \qquad \forall\, v \in V \quad .$$

Alors $F'(V)$ est dense dans V^*.

<u>Démonstration</u> : Soit u^* un point de V^* et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de montrer que, dans la boule de centre u^* et de rayon $\varepsilon > 0$, il existe un point $v^* = F'(v)$. Pour cela, on applique le corollaire 2 à la fonction :

$$G(v) = F(v) - \langle v, v^* \rangle \quad .$$

Il y a un point v tel que $\|G'(v)\|^* \leq \varepsilon$, ce qui traduit exactement le résultat désiré.

De nombreuses autres applications du théorème 1 ont été faites, particulièrement en contrôle optimal et en programmation mathématique ; il faut ici citer le nom de F. Clarke. Je ne chercherai pas à les décrire, et je m'orienterai immédiatement vers un autre aspect de cette théorie. Il s'agit d'une version "locale" du théorème 1, établie en collaboration avec G. Lebourg ([8]).

Pour commencer, introduisons une définition :

<u>Définition</u> : Soit $f : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction, ε un réel positif et u un point du Banach V. On dira que f est ε-soutenue en u s'il existe $u^* \in V^*$ et $\eta > 0$ tels que :

$$\|v - u\| \leq \eta \Longrightarrow f(v) \geq f(u) + \langle u^*, v - u\rangle - \varepsilon\|v - u\| \quad .$$

Il s'agit en fait d'une variante unilatérale et ultra-faible de la différentiabilité-Fréchet. On peut montrer, par exemple, que si f et -f sont ε-soutenues en u pour chaque $\varepsilon > 0$, alors f est Fréchet-différentiable en u. L'intérêt de cette définition est qu'il y aura beaucoup de points où une simple fonction s.c.i. sera ε-soutenue, moyennant une hypothèse géométrique sur le Banach V :

<u>Définition 2</u> : On dit qu'un espace de Banach V est <u>local</u> s'il existe une fonction Fréchet-différentiable $\varphi : V \to \mathbb{R}$ et un borné $B \subset V$ tels que :

$$\varphi(0) > 0$$

$$\varphi(v) \leq 0 \quad \text{pour } v \notin B \quad .$$

Les espaces de Banach réflexifs, et plus généralement tous ceux qu'on peut munir d'une norme équivalente Fréchet-différentiable sont locaux. On a alors :

<u>Théorème 2</u> : Soit V un Banach local et $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction s.c.i. Pour chaque $\varepsilon > 0$, l'ensemble S_ε des points où f est ε-supportée est dense dans V.

Démonstration : On se donne une boule ouverte B de V, et on cherche à montrer qu'elle contient un point où f est ε-supportée. On peut toujours supposer B assez petite pour que f soit bornée inférieurement sur V. On peut aussi se ramener au cas où B est centrée à l'origine, et où il existe une fonction différentiable $\varphi : V \to \mathbb{R}$ avec $\varphi(0) > 0$ et $\varphi \leq 0$ hors de B (par translation et homothétie).

On pose alors :

$$\psi(v) = \begin{cases} \varphi(v)^{-1} & \text{si } \varphi(v) > 0 \\ +\infty & \text{si } \varphi(v) \leq 0 \end{cases} .$$

La fonction $\psi : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ainsi définie est semi-continue inférieurement. On peut alors appliquer le corollaire 1 à la fonction $f + \psi$. On obtient un point $v \in V$ tel que :

$$\forall\, w \neq v , \qquad f(w) + \psi(w) \geq f(v) + \psi(v) + \varepsilon\|v - w\| .$$

On en conclut (prendre $0 = w$) que $\psi(v)$ est certainement fini, et donc que $v \in B$. En outre, comme ψ est différentiable, on peut trouver un $\eta > 0$ tel que :

$$\|w - v\| \leq \eta \Longrightarrow \psi(w) \leq \psi(v) + \langle \psi'(v), w - v\rangle + \varepsilon\|w - v\| .$$

En reportant, on obtient :

$$\|w - v\| \leq \eta \Longrightarrow f(w) \geq f(v) - \langle \psi'(v), w - v\rangle - 2\varepsilon\|w - v\|$$

ce qui est le résultat désiré, avec $u^* = -\psi'(v)$ et ε remplacé par 2ε.

Citons deux conséquences de ce résultat :

Application 1 : Soit V un Banach local, et $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Alors l'ensemble des points de V où f est Fréchet-différentiable contient un G_δ dense ([8]).

Application 2 : Soit M une variété riemannienne complète, modelée sur un Hilbert de dimension infinie. Alors, quel que soit $p \in M$, l'ensemble des $q \in M$ qui peuvent être joints à p par une géodésique minimale contient un G_δ dense ([6]).

Pour tous ces résultats, et d'autres encore, on renvoie à l'article d'exposition [7], et aux articles originaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bishop et Phelps, A proof that all Banach spaces are subreflexive, Bull. A.M.S. 67 (1961) p. 97-98.

[2] Browder , Normal solvability for nonlinear mappings into Banach spaces, Bull. A.M.S. 79 (1973) p. 328-350.

[3] Brøndsted et Rockafellar, On the subdifferentiability of convex functions, Proceedings A.M.S. 16 (1965) p. 605-611.

[4] Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. A.M.S. 225 (1976) p. 241-251.

[5] Ekeland, On the variationel principle, J. Math. An. Appl. 47 (1974) p. 324-353.

[6] Ekeland, The Hopf-Rinow theorem in infinite dimension, J. Diff. Geometry, à paraître en 1979.

[7] Ekeland, Non-convex minimization problems, Bull. A.M.S., à paraître en 1978.

[8] Ekeland-Lebourg, Generic Frechet-differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces, Trans. A.M.S. 224 (1976) p. 193-216.
