Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

G. Lebourg

Problèmes d'optimisation dépendant d'un paramètre à valeurs dans un espace de Banach

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 11, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

PROBLEMES D'OPTIMISATION DEPENDANT D'UN PARAMETRE A VALEURS DANS UN ESPACE DE BANACH

G. LEBOURG

(CEREMADE - Université Paris IX Dauphine)

Exposé No XI

8 Décembre 1978

INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit, on entend par espace de Banach un espace de Banach sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Un espace de Banach E est un espace d'Asplund si toute fonction convexe continue définie sur un ouvert (convexe) Ω de E est Fréchet-différentiable en tout point d'un G_δ dense dans Ω (cf. [12]) ; E est un espace de Radon-Nikodym si, pour tout espace mesuré (Ω,Σ,λ) et toute mesure vectorielle μ, σ-additive et à variation bornée, absolument continue par rappport à λ, définie sur Σ et à valeurs dans E, μ est différentiable (au sens de Bochner) par rapport à λ (cf. [5], [15]). L'étude de ces deux classes d'espaces et de leurs caractérisations a suscité un regain d'intérêt pour la théorie géométrique des espaces de Banach de dimension infinie, et, plus particulièrement pour les propriétés liées à la structure extrémale des parties fermées bornées (convexes ou non) de ces espaces (cf. [5], [11], [15]). L'objet de cet exposé est de souligner l'étroite corrélation qui existe entre ces diverses approches de la phénoménologie des espaces de Banach et la théorie abstraite de l'optimisation que l'on peut y développer, et de mettre en évidence la grande souplesse d'utilisation que fournit ce dernier cadre.

§ 1. PROBLEMES D'OPTIMISATION DANS LES ESPACES DE BANACH.

1.1 Dans toute la suite, nous ferons usage du schéma suivant :

$$\mathcal{P}(v) \; : \; \sup_{x\in X} f(x,v)$$

est une famille de problèmes d'optimisation dépendant d'un paramètre v variant dans un ouvert Ω d'un Banach V.

Pour tout $v\in\Omega$, le problème $\mathcal{P}(v)$ consiste à maximiser la fonction numérique $f_v : x \to f(x,v)$ sur X. On suppose que f est une fonction semi-continue supérieurement de $X\times\Omega$ dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Une solution du problème $\mathcal{P}(v)$ est un point x de X où f_v atteint son maximum sur X ; une suite maximisante du problème $\mathcal{P}(v)$ est une suite x_n de points de X qui "tendent à être solution" de $\mathcal{P}(v)$, c'est-à-dire qui vérifient $\lim_n f(x_n,v) = \sup_{x\in X} f(x,v)$.

L'hypothèse de fermeture de X et l'hypothèse de semi-continuité de f sont destinées à assurer que les éventuels points d'adhérence des suites maximisantes de $\mathcal{P}(v)$, qui sont les candidats naturels à être solutions de $\mathcal{P}(v)$, le sont effectivement.

1.2 L'archétype de ces familles de problèmes est :

$$\mathcal{P}(v) \quad \sup_{x\in X} v(x) \quad ,$$

où X est une partie fermée bornée d'un espace de Banach E et v varie dans l'espace $V = E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ des formes linéaires continues sur E muni de la topologie forte du dual.

Ce schéma est le cadre de deux importants résultats de la théorie géométrique des espaces de Banach : le théorème de Bishop-Phelps et le théorème de James ([5], ch. 1). Le premier affirme que, si X est convexe (fermé borné), le problème $\mathcal{P}(v)$ admet au moins une solution pour un ensemble dense de v dans V ; le second ajoute que le problème $\mathcal{P}(v)$ n'a une solution (au moins) pour tout $v \in V$ que si X est, de plus, faiblement compact dans E.

1.3 Dans le cadre du schéma général défini en 1.1, on s'intéresse à :

- des résultats d'existence "en densité" de solutions des problèmes $\mathcal{P}(v)$ (analogues au théorème de Bishop-Phelps dans le cas de l'exemple cité en 1.2) ;
- des résultats qualitatifs sur l'ensemble des éventuelles solutions des problèmes $\mathcal{P}(v)$; y-a-t-il, par exemple, unicité de la solution éventuelle ?
- des résultats sur la convergence des suites maximisantes des problèmes $\mathcal{P}(v)$

Dans le cas de l'exemple type 1.2, l'unicité de la solution de $\mathcal{P}(v)$ signifie que v "expose" un point de X ; la convergence des suites maximisantes signifie alors en outre que v "expose fortement" un point de X.

§ 2. LE RESULTAT FONDAMENTAL.

2.1 Nous utiliserons la notion de gradient généralisé d'une fonction numérique φ définie sur un ouvert Ω d'un Banach V et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; en un point u appartenant au domaine effectif de φ, $\operatorname{dom\,eff} \varphi = \{v \in \Omega / -\infty < \varphi(v) < +\infty\}$, le gradient généralisé $\partial\varphi(u)$ de φ est une partie convexe (éventuellement vide) du dual $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ de V qui se réduit à la dérivée usuelle lorsque φ est continûment Fréchet-dérivable au voisinage de u, au sous-différentiel au sens classique de l'analyse convexe si φ est convexe sur un voisinage (convexe) de u, et au gradient généralisé défini par F.H. Clarke dans [4] lorsque φ est lipschitzienne sur un voisinage de u. De cette notion à laquelle R.T. Rockafellar vient de consacrer deux articles récents ([13], [14]), nous n'utiliserons que les propriétés élémentaires qui généralisent les propriétés établies dans [4] dans le cas des fonctions localement lipschitziennes . Les "subtilités" du "calcul sous-différentiel généralisé" peuvent donc être occultées, en première analyse, en supposant, ce qui n'apporte aucune altération majeure à la portée de notre propos, que les fonctions dont on introduit le gradient généralisé sont localement lipschitziennes.

Nous dirons en outre que φ est strictement dérivable en un point u de Ω si φ est lipschitzienne au voisinage de u, $\partial\varphi(u)$ est singleton, et la multi-application $v \to \partial\varphi(v)$ est continue en u lorsqu'on munit V^* de la topologie forte de dual ; on note alors $\varphi'(u)$ l'unique élément de $\partial\varphi(u)$.

Enfin, si φ est définie sur un ouvert Ω de V, une majorante de φ sur Ω est une fonction ψ de Ω dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ telle que : $\forall\, v \in \Omega$, $\varphi(v) \leq \psi(v)$; si, en outre $\varphi(u) = \psi(u)$ pour un point u de Ω, nous dirons que ψ est exacte au point u.

Théorème 1 : Soient E et V des espaces de Banach, X une partie de E, Ω un ouvert de V et f une fonction de $X \times \Omega$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
Si la fonction α définie sur Ω par :

$$v \in \Omega \qquad \alpha(v) = \sup_{x \in X} f(x,v)$$

admet, au voisinage d'un point u de Ω, une majorante φ exacte en u et strictement dérivable en u, pour toute suite maximisante x_n du problème $\mathcal{P}(u) : \sup_{x \in X} f(x,u)$, il existe des suites : u_n dans Ω et

$\ell_n \in -\partial(-f_{x_n})(u_n)$ telles que : $\|u_n - u\| \to 0$, $f(x_n,u_n) \to \alpha(u)$ et $\|\ell_n - \varphi'(u)\| \to 0$.

2.2 Pour comprendre l'intérêt du théorème précédent, revenons à l'exemple 1.2 du § 1 :

X est un fermé borné d'un espace de Banach E, $\Omega = V = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ est le dual topologique de E et $f(x,v) = v(x)$;

f_x est la forme linéaire continue $v \to v(x)$, continûment Fréchet-dérivable sur V dont la dérivée en tout point v de V est l'élément x, considéré comme élément du bidual $V^* = E^{**}$ de E. Si les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites en un point u de V, le théorème affirme que toute suite maximisante x_n du problème :

$$\mathcal{P}(u) \qquad \sup_{x\in X} u(x)$$

converge en norme dans E^{**}, donc dans E, vers un même élément $\bar{x} \in X$ et que $u(\bar{x}) = \lim\limits_n u(x_n) = \alpha(u)$. Par suite, le problème $\mathcal{P}(u)$ admet une unique solution $\bar{x}$ et toutes les suites maximisantes du problème $\mathcal{P}(u)$ convergent vers $\bar{x}$; dans ce cas, la fonction α est en outre convexe continue, donc localement lipschitzienne sur V, et $\bar{x} \in \partial\alpha(u)$.

D'une façon plus générale, le théorème A permet d'obtenir un résultat d'existence des solutions du problème $\mathcal{P}(u)$ dès que le schéma général défini en 1.1 vérifie une condition du type :

(*) si u_n converge vers u dans Ω, $\ell_n \in -\partial(-f_{x_n})(u_n)$ et ℓ_n converge en norme vers ℓ dans V^*, alors la suite x_n a au moins un point d'adhérence dans X.

De plus, la structure de l'ensemble S(u) des solutions du problème $\mathcal{P}(u)$ est partiellement déterminée par la condition nécessaire d'optimalité $\varphi'(u) \in -\partial(-f_x)(u)$. Enfin, toute suite maximisante du problème $\mathcal{P}(u)$ a au moins un point d'adhérence dans X qui appartient à S(u) ; en particulier si S(u) est singleton, toute suite maximisante de $\mathcal{P}(u)$ converge vers l'unique solution de $\mathcal{P}(u)$.

2.3 Démonstration du théorème 1 : Considérons un point u de Ω où α admet une majorante exacte φ, strictement dérivable en u ; soient alors x un point quelconque de X et ε un réel positif tel que $\varepsilon^2 = \alpha(u) - f(x,u)$. Le théorème sera démontré si on exhibe un point v de Ω et un

$\ell \in -\partial(-f_x)(v)$ tels que $\|v - u\| \leq \varepsilon$ et $d(\ell, v, \partial\varphi(v)) = \inf_{\lambda \in \partial\varphi(v)} \|\ell - \lambda\| \leq \varepsilon$.

En effet, si x_n est une suite maximisante du problème $\mathcal{P}(u)$, $\varepsilon_n^2 = \alpha(u) - f(x_n, u)$, et v_n, ℓ_n choisis comme ci-dessus, ε_n converge vers 0, donc v_n converge vers u dans Ω et, puisque φ est strictement dérivable au point u, ℓ_n converge en norme vers $\varphi'(u)$. Il suffit alors de remarquer que la fonction F définie sur V par :

$$F(v) = \begin{cases} \varphi(v) - f(x,v) & \text{si } v \in \Omega \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

est semi-continue inférieurement sur V et bornée inférieurement par 0. De plus $F(u) = \varphi(u) - f(x,u) = \varepsilon^2 \leq \inf_{v \in V} F(v) + \varepsilon^2$, on peut donc lui appliquer le théorème 1.1 de [8] qui affirme l'existence d'un point $v \in V$ tel que :

i) $F(v) \leq F(u)$;

ii) $\|u - v\| \leq \varepsilon$;

iii) et $\forall\, w \neq v$, $F(v) < F(w) + \varepsilon\|v - w\|$.

i) implique $v \in \Omega$; iii) exprime que la fonction $w \to F(w) + \varepsilon\|v - w\|$ atteint son minimum sur V en v, et, par suite, son gradient généralisé contient 0 ; le gradient généralisé de F en v contient donc un élément de norme au plus égale à ε, et, puisque φ est supposée lipschitzienne au voisinage de u, on a, pour ε assez petit :

$$\partial F(v) \subset \partial\varphi(v) + \partial(-f_x)(v) \quad ,$$

ce qui termine la démonstration.

(On renvoie, pour l'énoncé des règles du calcul "sous-différentiel" utilisées à [4] pour le cas des fonctions localement lipschitziennes et [13], [14] pour le cas général).

§ 3. PREMIERES APPLICATIONS DU RESULTAT FONDAMENTAL ET COMMENTAIRES.

3.1 Remarquons que l'existence d'une majorante de la fonction α, exacte en un point u de Ω et strictement dérivable en u est assurée, en particulier, dès que α est elle-même strictement dérivable en u ; en effet α est alors elle-même une majorante convenable de α. Si on peut obtenir aisément la continuité de la fonction α (définie rappelons-le sur l'espace V des paramètres par : $v \in \Omega$, $\alpha(v) = \sup_{x \in X} f(x,v)$ (en imposant, par exemple, une continuité uniforme des fonctions $f_x : v \to f(x,v)$ pour $x \in X$), voire une caractère localement lipschitzien, il est beaucoup plus difficile d'aller plus avant et d'établir des propriétés de dérivabilité de α ; il suffit pour s'en convaincre d'examiner la situation de l'exemple type 1.2 où $\alpha(v) = \sup_{x\in X} v(x)$ est une fonction convexe continue sur Ω ; on ne pourra, même dans ce cas élémentaire, obtenir de différentiabilité "en densité" de α que moyennant une hypothèse structurelle sur l'espace V (par exemple, en supposant que V est un espace d'Asplund). Dès que α n'est plus convexe, ce qui est le cas de schémas très simples comme :

$$\mathcal{P}(v) \quad \sup_{x\in X} - \|x - v\| \equiv \inf_{x\in X} \|x - v\|$$

(où X est un fermé borné d'un Banach E et V = E), il paraît "a priori" nécessaire d'imposer des conditions très restrictives de "dérivabilité uniforme" des fonctions f_x pour parvenir à un résultat de dérivabilité de α.

Ces remarques conduisent aux deux situations types où l'on peut appliquer le théorème 1 en établissant préalablement la stricte dérivabilité de la fonction α =

3.2 Première situation type : le schéma général est défini comme en 1.1 ; les fonctions $f_x : v \to f(x,v)$ sont, en outre, convexes sur l'ouvert (convexe) Ω. La fonction α est alors convexe sur Ω. Si l'espace V des paramètres est un espace d'Asplund, il suffit d'établir la continuité de α pour obtenir sa Fréchet-différentiabilité en tout point d'un G_δ dense dans Ω (et, donc, sa stricte dérivabilité, en tout point d'un G_δ dense dans Ω, cf. [10]).

Exemple : "le problème des points éloignés" (cf. [1], [2], [6]).

X est un fermé borné d'un espace de Banach E, $\Omega = V = E$ et $f(x,v) = \|x - v\|$.

Le problème $\mathcal{P}(v)$ consiste à maximiser la distance d'un point x, astreint à rester dans X, au point v.

Proposition 1 : Si E est un espace d'Asplund dont la norme satisfait la condition :

(**) si x_n converge faiblement vers x dans E et si $\lim_n \|x_n\| = \|x\|$, alors $\lim_n \|x_n - x\| = 0$, alors le problème $\mathcal{P}(v)$: $\sup_{x\in X} \|x - v\|$, où X est une partie fermée bornée de E faiblement relativement compacte, admet des solutions pour tout point V d'un G_δ dense dans E ; si, de plus, la norme de E est <u>strictement convexe</u>, la solution est <u>unique</u> en tout point de ce G_δ dense.

<u>Preuve</u> : Il suffit de vérifier que la fonction convexe $\alpha(v) = \sup_{x\in X} \|x - v\|$ est continue et donc strictement dérivable en tout point d'un G_δ G dense dans $E = V$. Si $u \in G$, le théorème 1 affirme que, pour toute suite maximisante x_n du problème $\mathcal{P}(u)$, il existe des suites u_n convergeant vers u et $\ell_n \in -\partial(-f_{x_n})(u_n)$ convergeant en norme vers $\ell = \alpha'(u)$. L'hypothèse (**) implique que le schéma considéré satisfait l'hypothèse (*) de 2.2. En effet, ℓ_n appartient au sous-différentiel de la norme au point $x_n - u_n$, soit $(\ell_n, x_n - u_n) = \|x_n - u_n\|$; X étant faiblement relativement compact, on peut extraire de la suite x_n une sous-suite x_{n_p} convergeant faiblement vers $\bar{x}$ dans E ; on a alors :

$$\ell(\bar{x} - u) = \lim_p (\ell_{n_p}, x_{n_p} - u_{n_p}) = \lim_p \|x_{n_p} - u_{n_p}\| \geq \|\bar{x} - u\|$$

et

$$\|\ell\| = \lim_p \|\ell_{n_p}\| \leq 1 \quad ,$$

d'où, nécessairement $\|\bar{x} - u\| = \ell(\bar{x} - u) = \lim_p \|\bar{x}_{n_p} - u_{n_p}\|$,

et, d'après (**), $\lim_p \|x_{n_p} - \bar{x}\| = 0$.

Toute suite maximisante du problème $\mathcal{P}(u)$ a donc au moins un point d'adhérence dans X, qui est nécessairement solution du problème $\mathcal{P}(u)$.

Enfin, le raisonnement précédent montre que toute solution x du problème $\mathcal{P}(u)$ satisfait la condition nécessaire d'optimalité $\ell(x - u) = \|x - u\|$ où $\ell = \alpha'(u)$. Si la norme de E est strictement convexe, cette condition implique l'unicité de la solution puisque deux solutions distinctes x_1 et x_2 du problème $\mathcal{P}(u)$ devraient vérifier

$$\frac{1}{2}\ell(x_1 - u) + \frac{1}{2}\ell(x_2 - u) = \frac{1}{2}\|x_1 - u\| + \frac{1}{2}\|x_2 - u\| = \alpha(u)$$

d'où

$$\alpha(u) = \ell(\tfrac{1}{2} x_1 + \tfrac{1}{2} x_2 - u) \leq \|\tfrac{1}{2} x_1 + \tfrac{1}{2} x_2 - u\|$$

$$< \frac{1}{2}\|x_1 - u\| + \frac{1}{2}\|x_2 - u\| = \alpha(u) \quad .$$

Dans ce dernier cas, les suites maximisantes du problème $\mathcal{P}(u)$ convergent vers l'unique solution de $\mathcal{P}(u)$.

3.3 Deuxième situation type : Le schéma général est défini comme en 1.1 ; les fonctions $f_x : v \to f(x,v)$ ne sont pas convexes mais suffisemment régulières pour que l'on puisse démontrer la stricte dérivabilité de α sur un G_δ dense de Ω.

On renvoie pour plus de détails sur cette situation à [9] où l'on obtient simultanément la stricte dérivabilité de α et les conclusions du théorème 1 par une démonstration directe. Nous donnerons seulement un exemple simple : "le problème des points les plus rapprochés" (cf. [7], [9]).

Proposition 2 : Si E est un espace de Banach uniformément convexe ainsi que son dual et X un fermé borné de E, il existe un G_δ dense dans V en tout point duquel :

- le problème $\mathcal{P}(v) : \inf_{x \in X} \|x - v\|$ admet une unique solution et toutes les suites minimisantes de $\mathcal{P}(v)$ convergent vers cette solution ;
- la fonction $\alpha(v) = \inf_{x \in X} \|x - v\| = d_X(v)$ est strictement dérivable (donc Fréchet-dérivable !).

La démonstration de cette proposition utilise le fait que la norme de E est alors "uniformément continûment Fréchet-dérivable" sur tout borné de E ne contenant pas l'origine. Si les suites minimisantes x_n du problème $\mathcal{P}(u)$ sont telles que $x_n - u$ est "voisin" de 0, u est solution de $\mathcal{P}(u)$, sinon $\alpha(v) = d_X(v)$ est strictement dérivable en tout point d'un G_δ dense dans un voisinage de u et on peut appliquer "en densité" les conclusions du théorème 1. L'uniforme convexité de la norme E implique que la condition (**) de la proposition 1 est satisfaite et donc que le schéma considéré satisfait la condition (*) de 2.2. On renvoie, pour la démonstration exacte de la proposition 2 et l'énoncé de généralisations de cette proposition à [9].

Signalons une généralisation des méthodes de [9] au cadre de notions de dérivabilité plus faibles que la Fréchet-dérivabilité, due à J.M. Borwein ([3]) qui fournit, notamment, le résultat le plus fin connu d'existence en densité pour "le problème des points les plus rapprochés".

§ 4. MINORANTES EXACTES REGULIERES DE FONCTIONS SEMI-CONTINUES INFERIEUREMENT.

4.1 On peut se demander quelles sont les hypothèses minimales qu'il est nécessaire de faire sur le schéma général défini en 2.2 pour pouvoir appliquer "en densité" le théorème 1 afin d'obtenir des résultats analogues à ceux du § 3, c'est-à-dire pour assurer que la fonction α définie sur Ω par : $v \in \Omega$, $\alpha(v) = \sup_{x\in X} f(x,v)$ possède en tout point u d'un ensemble dense dans son domaine effectif :

$$\text{dom eff. } \alpha = \{v \in \Omega / -\infty < \alpha(v) < +\infty\}$$

une majorante exacte en u et strictement dérivable en u.

Curieusement, une simple hypothèse de semi-continuité supérieure de α suffit, dans de nombreux espaces de Banach, pour assurer l'existence "en densité" de majorantes exactes strictement dérivables !

<u>Théorème 2</u> : Soit V un espace de Banach réflexif .

Toute fonction f de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, semi-continue inférieurement sur V et bornée inférieurement, admet, en tout point u d'un ensemble dense dans son domaine effectif

$$\text{dom eff. } f = \{v \in V \quad f(v) < +\infty\}$$

une minorante exacte en u et de type $\mathcal{C}^1$ sur V (continûment Fréchet-dérivable sur V).

<u>Remarque 1</u> : L'ensemble dense dans dom eff. f où f admet une minorante exacte de type $\mathcal{C}^1$ peut n'être que dénombrable ; il en est ainsi par exemple si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$V \in \mathbb{R} \qquad f(V) = \begin{cases} q & \text{si } x \in Q,\ x = \frac{p}{q} \text{ irréductible} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

même si on suppose f continue, voire localement lipschitzienne, l'existence d'une minorante exacte de type $\mathcal{C}^1$ n'est pas assurée sur un G_δ dense du domaine de f. En effet si toute fonction numérique f localement lipschitzienne sur un ouvert Ω de V admettait en tout point d'un G_δ dense dans Ω une minorante exacte de type $\mathcal{C}^1$, on montrerait en appliquant cette propriété à f et à -f que f est Fréchet-dérivable en tout point d'un G_δ dense de Ω ; f serait alors strictement dérivable en tout point d'un G_δ dense de Ω (cf. [10]) et on sait que, même lorsque $V = \mathbb{R}$, il existe des fonctions localement lipschitziennes dont le gradient généralisé n'est jamais singleton (cf. [10]).

Remarque 2 : Le théorème 2 montre, en particulier, que, dans tout espace réflexif , toute fonction semi-continue inférieurement admet, en tout point d'un ensemble dense dans son domaine effectif, un gradient généralisé (au sens de [13]) non vide ! En effet si f est semi-continue inférieurement sur V et finie en u, elle est minorée sur un voisinage de u et tout voisinage de u contient donc un point v, où f est finie, et tel qu'il existe une fonction φ, de type $\mathcal{C}^1$ sur V, qui minore f sur un voisinage de V et est exacte en V. La fonction $f-\varphi$ admet un minimum local en v, et, par suite $0 \in \partial(f-\varphi)(v) \subset \partial f(v) - \{\varphi'(v)\}$, soit $\varphi'(v) \in \partial f(v)$.

4.2 Démonstration du théorème 2 :

Lemme : Soit E un espace de Banach réflexif , X une partie fermée bornée de E et f une fonction semi-continue inférieurement de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, finie en au moins un point de X ; on considère la famille des problèmes de minimisation :

$$\mathcal{P}(v) \quad \inf_{x \in X} f(x) + v(x)$$

où v varie dans le dual $V = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ de E.

L'ensemble des v pour lesquels $\mathcal{P}(v)$ a au moins une solution est dense dans V pour la topologie forte de dual.

Preuve : Il résulte du travail de R.R Phelps ([11]) que, pour toute partie fermée bornée K de $E \times \mathbb{R}$, l'ensemble des formes linéaires continues sur $X \times \mathbb{R}$ qui exposent fortement un point de K est dense dans $E^* \times \mathbb{R}$ pour la topologie forte de dual, puisque, lorsque E est réflexif , $E \times \mathbb{R}$ aussi et, donc, $E \times \mathbb{R}$ est un espace de Radom-Nikodym ([5] ch. 6).

Remarquons alors que le problème $\mathcal{P}(v)$ est équivalent au problème

$$\inf_{(x,t)\in S} [v(x) + t]$$

où S est l'épigraphe de f "au-dessus de X" :

$$S = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,/\, t \geq f(x)\}$$

qui est fermé dans $E \times \mathbb{R}$.
On est alors conduit à considérer la famille des problèmes

$$\mathcal{P}(w,s) : \inf_{(x,t)\in S} [w(x) + st]$$

indexée par les éléments (w,s) de $E^* \times \mathbb{R}$; lorsque (w,s) reste dans un voisinage de $(v,1)$, la fonction α définie par $\alpha(x,s) = \inf_{(x,t)\in S} [w(x) + st]$ reste dans un intervalle borné et, par suite, les suites minimisantes (x_n, t_n) des problèmes $\mathcal{P}(w,s)$ restent dans une même partie bornée de S. Au voisinage d'un point $(v,1)$, les problèmes $\mathcal{P}(w,s)$ sont donc équivalents à la maximisation de la forme linéaire continue $(-w,-s)$ sur une partie bornée K de S. Il en résulte que les problèmes $\mathcal{P}(w,s)$ ont une solution pour tout (w,s) dans un ensemble dense de l'ouvert $\Omega = E^* \times]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ de $E^* \times \mathbb{R}$ (avec $\varepsilon \in]0,1[$) (en fait, pour tout point d'un G_δ dense de Ω). On en déduit le lemme en remarquant que, pour tout $(w,s) \in \Omega$, $\mathcal{P}(w,s)$ est équivalent au problème : $\inf_{(x,t)\in S} [s^{-1}w(x) + t]$ et, donc, au problème : $\inf_{x\in X} [s^{-1}w(x) + f(x)]$, et que l'application continue : $(w,s) \to s^{-1}w$ de Ω dans E^* est surjective.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2 ; soient donc V un espace de Banach réflexif et f une fonction semi-continue inférieurement et bornée inférieurement de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Supposons que f est finie au point u ; nous allons montrer l'existence d'une minorante de f de type $\mathcal{C}^1$, exacte en un point de la boule de centre u et de rayon $\varepsilon > 0$ dans V. Pour cela, supposons $M = f(u) - \inf_{v\in V} f(v)$ et choisissons une constante C telle que $C^2 > \frac{16(M+1)}{\varepsilon^2}$

Considérons alors la famille des problèmes de minimisation :

$$\mathcal{P}(\ell) \quad \inf_{v\in V} [f(v) + \ell(v) + c^2\|v - u\|^2]$$

indexée par les éléments ℓ du dual $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ de V. La fonction α

définie sur V^* par $\alpha(\ell) = \inf_{v\in V} [f(v) + \ell(v) + c^2\|v - u\|^2\}$ est majorée par $f(u) + \ell(u)$ pour tout $\ell \in V^*$; lorsque ℓ reste dans la "couronne" : $0 < r/2 \leq \|\ell\| \leq r$, on a :

$$f(v) + \ell(v) + C^2\|v - u\|^2 < \alpha(\ell) + 1$$

$$\Longrightarrow \ell(v - u) + C^2\|v - u\|^2 < f(u) - \inf_{V\in V} f(v) + 1 = M + 1$$

$$\Longrightarrow \|\ell\|\ \|v - u\| \leq \ell(v - u) + C^2\|v - u\|^2 + \frac{1}{C^2}\ \|\ell\|^2 < M + 1 + \frac{1}{C^2}\ \|\ell\|^2$$

$$\Longrightarrow \|u - v\| \leq \frac{2}{r}\ (M + 1 + \frac{r^2}{C^2}) = K(r)$$

pour $0 < \frac{r}{2} \leq \|\ell\| \leq \|r\|$, les problèmes $\mathcal{P}(\ell)$ sont donc équivalents aux problèmes : $\inf_{v\in B(K(r),u)} [f(v) + \ell(v) + C^2\|v - u\|^2]$, où $B(K(r),u)$ est la boule de centre u et de rayon $K(r)$ dans V. Puisque $B(K(r),u)$ est <u>fermée bornée</u> et que la fonction $v \to f(v) + C^2\|v - u\|^2$ est semi-continue inférieurement et bornée inférieurement sur V, on déduit du lemme précédent que l'ensemble des ℓ pour lesquels le problème $\mathcal{P}(\ell)$ admet (au moins) une solution est dense dans la "couronne" (ouverte)
$\{\ell \in V^* / 0 < \frac{r}{2} < \|\ell\| < r\}$. De plus la solution éventuelle appartient alors nécessairement à $B(K(r),u)$.
Soit alors ℓ tel que $0 < \frac{2(M+1)}{\varepsilon} < \|\ell\| < \frac{4(M+1)}{\varepsilon}$ et V solution du problème $\mathcal{P}(\ell)$; $K(\frac{4(M+1)}{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{8(M+1)}{\varepsilon C^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Le point v appartient donc à la boule de centre u et de rayon ε et :

$$\forall\ w \in V \quad , \quad f(v) + \ell(v) + C^2\|v - u\|^2 \leq f(w) + \ell(w) + C^2\|w - u\|^2$$

soit : $\forall\ w \in V \quad , \quad f(v) + \ell(v - w) + C^2\|v - u\|^2 - C^2\|w - u\|^2 \leq f(w)$.

Ainsi la fonction φ définie sur V par :

$$w \in V, \qquad \varphi(w) = f(v) + \ell(v - w) + C^2\|v - u\|^2 - C^2\|w - u\|^2$$

est une minorante de f sur V, exacte au point v ; il reste à vérifier que φ est de type $\mathcal{C}^1$ mais ceci est assuré dès que la norme de V est Fréchet-dérivable en tout point différent de 0. Le théorème 2 résulte

donc du fait que tout espace de Banach réflexif
possède une norme équivalente Fréchet-dérivable en tout point différent de 0 (cf. [5], ch. 5 § 9).

4.3 Applications à l'optimisation.

Dans l'optique des applications à l'optimisation, la juxtaposition des théorèmes 1 et 2 précédents conduit à énoncer :

Théorème 3 : Soient E un espace de Banach et X une partie fermée de E, V un espace de Banach réflexif et Ω
un ouvert de V ; soit enfin f une fonction semi-continue supérieurement de $X \times \Omega$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On suppose que :

i) la fonction α définie sur Ω par :

$$v \in \Omega, \qquad \alpha(v) = \sup_{x \in X} f(x,v)$$

est semi-continue supérieurement sur Ω et finie en tout point ;

ii) pour toutes suites u_n convergeant vers u dans Ω, x_n dans X et $\ell_n \in -\partial(-f_{x_n})(u_n)$ telles que : $f(x_n,u_n) \to \alpha(u)$ et ℓ_n converge en norme vers ℓ dans le dual $V^* = \mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ de V, la suite x_n a (au moins) un point d'adhérence dans X ;

alors, il existe un ensemble dense de points u dans Ω tels que toutes les suites maximisantes du problème $\mathcal{P}(u)$: $\sup_{x \in X} f(x,u)$ ont des points d'adhérence, nécessairement solutions du problème $\mathcal{P}(u)$ et toutes les solutions x du problème $\mathcal{P}(u)$ vérifient la condition nécessaire d'optimalité : $\ell \in -\partial(-f_x)(u)$ où ℓ est un élément fixé de $\partial\alpha(u)$. En outre l'ensemble des solutions de $\mathcal{P}(u)$ est une partie compacte de X.

Preuve : La fonction α est semi-continue supérieurement sur Ω et finie en tout point de Ω, donc majorée sur un voisinage de chaque point de Ω. On peut donc appliquer, au voisinage de chaque point de Ω le théorème 2, puis le théorème 1. Le théorème 3 repose alors entièrement sur l'hypothèse ii).

Exemple : Soient E un espace de Banach réflexif, X une partie fermée de E, faiblement relativement compacte, f une fonction semi-continue inférieurement de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, finie en au moins un point de X , et bornée inférieurement sur X, et φ une fonction localement lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le gradient généralisé ne contient jamais 0, sauf peut-être en 0 ; on suppose, en outre, que la norme de E vérifie la condition (**) de 3.2 (proposition 1). Alors la famille des problèmes de minimisation

$$\mathcal{P}(v) \quad \inf_{x \in X} f(x) + \varphi(\|x - v\|)$$

admet des solutions en tout point v d'un ensemble dense dans E.

REFERENCES

[1] E. Asplund, Farthest points in locally uniformly rotund Banach spaces, Israel J. Math. 4 (1966) 213-216.

[2] J. Baranger and R. Temam, Nonconvex optimization problems depending on a parameter, SIAM J. Control 13 (1974).

[3] J.M. Borwein, Weak local supportability, generic Gâteaux differentiability and applications to approximation in a weakly compactly generated space, Dalhousie University, September 1977.

[4] F.H. Clarke, A new approach to Lagrange multipliers, Math. of operations research, May 1976 vol. 1 No 2.

[5] J. Diestel, Geometry of Banach spaces, Lectrue Notes in Math. vol. 485, Springer Verlag, 1975.

[6] M. Edelstein , Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces, Israel J. Math. 4 (1966) 171-176.

[7] M. Edelstein, On nearest points of sets in uniformly convex Banach spaces, J. London Math. Soc. 43 (1968) 375-377.

[8] I. Ekeland, On the variational principle, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974) 324-353.

[9] I. Ekeland and G. Lebourg, Generic Fréchet-differentiablity and perturbed optimization problems in Banach spaces, Trans. A.M.S. 224 No 2 (1976).

[10] G. Lebourg, Differentiability of locally lipschitzian functions, (to appear).

[11] R.R. Phelps, Dentability and extreme points in Banach spaces, J. of Funct. Analysis 16 (1974) 79-80.

[12] I. Namioka and R.R. Phelps, Banach spaces which are Asplund spaces, Duke Math. J. Vol. 42 No 4 (1975).

[13] R.T. Rockafellar, Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions, (to appear).

[14] R.T. Rockafellar, Directionally lipschitzian functions and subdifferential calculus", (to appear).

[15] R.E. Huff, The Radon-Nikodym property for Banach spaces, in "Measure theory", Lecture Notes in Math. Vol. 541 Springer Verlag (1976).
