

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. BEAUZAMY

## Factorisation des propriétés de Banach-Saks

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1977-1978), exp. n° 5, p. 1-16

[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1977-1978\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978__A4_0)

© Séminaire Maurey-Schwartz  
(École Polytechnique), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L A   G E O M E T R I E  
D E S   E S P A C E S   D E   B A N A C H  
1977-1978

F A C T O R I S A T I O N   D E S   P R O P R I E T E S   D E   B A N A C H - S A K S

B. BEAUZAMY



Au cours de l'exposé III, nous avons étudié la propriété suivante, notée  $(\mathcal{P}_1)$ , d'un espace de Banach  $E$  :

$(\mathcal{P}_1)$  { Il existe un nombre  $\delta > 0$  et il existe, dans  $E$ , une suite bornée de points  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , telle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , tout choix de signes  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k = \pm 1$ , toute suite croissante de  $k$  entiers  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ , on ait :

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i e_{n_i} \right\| \geq \delta .$$

Nous avons examiné les liens entre  $(\mathcal{P}_1)$  et les propriétés de Banach-Saks et Banach-Saks-Rosenthal. En particulier, nous avons obtenu :

- Si  $E$  est réflexif,  $E$  possède B.S. si et seulement si  $E$  n'a pas  $(\mathcal{P}_1)$  (th. 1, b)).

- Si  $E$  ne contient pas  $\ell^1$ ,  $E$  possède B.S.R. si et seulement si  $E$  n'a pas  $(\mathcal{P}_1)$  (prop. 7).

Dans un premier paragraphe de cet exposé, nous allons décrire, au moyen d'une nouvelle version de la propriété de Banach-Saks, les espaces de Banach qui ne possèdent pas  $(\mathcal{P}_1)$ . Dans un second paragraphe, nous étendrons au cadre des opérateurs les définitions de ces différentes versions des propriétés de Banach-Saks, et nous obtiendrons des théorèmes de factorisation. Dans un troisième paragraphe, nous nous intéresserons à la factorisation de certaines classes d'opérateurs : les opérateurs uniformément convexifiants et les opérateurs de type Rademacher.

### § I. LES ESPACES DE BANACH QUI NE POSSEDENT PAS $(\mathcal{P}_1)$ : LA PROPRIÉTÉ DE BANACH-SAKS ALTERNEE.

Nous dirons qu'un espace  $E$  possède la seconde propriété de Banach-Saks (en abrégé B.S.<sub>2</sub>), si, pour toute suite bornée  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on peut trouver une sous-suite  $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et une suite infinie de signes  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ( $\varepsilon_n = \pm 1$ ), de telle façon que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k e'_k$  converge dans  $E$ .

Tout espace qui possède B.S. possède évidemment B.S.<sub>2</sub>. Cette propriété B.S.<sub>2</sub> va permettre de décrire exactement les espaces de Banach qui ne possèdent pas  $(\mathcal{P}_1)$  :

Théorème I.1 : Un espace de Banach ne possède pas B.S.<sub>2</sub> si et seulement si  $(P_1)$  y est satisfaite.

Démonstration :

a) Si  $(P_1)$  est satisfaite pour une suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on a, pour toute sous-suite de celle-ci, pour tout choix de signes :

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i e'_i - \frac{1}{2k} \sum_1^{2k} \varepsilon_i e'_i \right\| = \left\| \frac{1}{2k} \left( \sum_1^k \varepsilon_i e'_i - \sum_{k+1}^{2k} \varepsilon_i e'_i \right) \right\| > \delta ,$$

et les sommes  $\frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i e'_i$  ne peuvent donc converger.

b) Supposons que E n'ait pas B.S.<sub>2</sub>. On peut alors trouver une suite bornée  $(e_n)$  telle que, pour toute sous-suite  $(e'_n)$ , pour toute suite de signes  $(\varepsilon_n)$ , les sommes  $\frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k e'_k$  ne convergent pas. On peut, bien sûr, se restreindre à la "bonne sous-suite" de Brunel-Sucheston, extraite de la suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et encore notée  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On peut aussi supposer  $\|e_n\| \leq 1 \forall n$ .

Proposition 1 : Si la suite  $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k$  converge dans F, on peut trouver une sous-suite de la suite  $e_n$  dont toutes les sous-suites  $e'_n$  sont telles que  $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e'_k$  converge dans E.

Démonstration de la proposition 1 : Cette proposition est tout à fait analogue à la proposition 3 de Brunel-Sucheston [6], et nous la démontrerons en adaptant la méthode de [6]. La seule différence est qu'ici nous nous occupons de signes alternés, alors que dans [6] tous les signes sont +.

Supposons que  $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$  dans F. Nous allons d'abord montrer que  $y = 0$ .

Lemme 1 : Si, dans F,  $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ , on a  $y = 0$ .

Démonstration du lemme 1 : On pose  $s_n = \frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k$ . On a  $s_n - s_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , si  $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ . Mais :

$$\begin{aligned} s_n - s_{2n} &= \frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k - \frac{1}{2n} \sum_1^{2n} (-1)^k e_k \\ &= \frac{1}{2n} \left( \sum_1^n (-1)^k e_k - \sum_{n+1}^{2n} (-1)^k e_k \right) \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} |s_n - s_{2n}| &= \left| \frac{1}{2n} \left( \sum_1^n (-1)^k e_k - \sum_{n+1}^{2n} (-1)^k e_{k+1} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2n} \left( \sum_1^{2n+1} (-1)^k e_k - (-1)^{n+1} e_{n+1} \right) \right| \end{aligned}$$

et donc

$$|s_n - s_{2n}| \geq \frac{2n+1}{2n} |s_{2n+1}| - \frac{1}{2n} ,$$

d'où il résulte que  $s_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , et  $y = 0$ , ce qui prouve le lemme.

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut donc trouver un entier  $P(\varepsilon)$  tel que si  $p \geq P(\varepsilon)$ ,

on ait :

$$\left| \frac{1}{p} \sum_1^p (-1)^k e_k \right| < \varepsilon .$$

D'après la construction du modèle étalé de Brunel-Sucheston, on en déduit qu'il existe, lorsque  $p \geq P(\varepsilon)$ , un entier  $N$  (dépendant de  $\varepsilon, p$ ), tel que : si  $N \leq n_1 < n_2 < \dots < n_p$ , on ait

$$\textcircled{1} \quad \left\| \frac{1}{p} \sum_1^p (-1)^k e_{n_k} \right\| < \varepsilon .$$

Choisissons maintenant par récurrence une suite d'entiers  $P_n$  avec :

$$\begin{cases} P_n \geq P\left(\frac{1}{2^n}\right) \\ P_n > n P_{n-1} . \end{cases}$$

Posons  $v(n) = N\left(\frac{1}{2^n}, P_n\right)$ , et  $r_n = \sum_{j=1}^n (v(j) + P_j)$ . Les  $r_n$  vérifient

$$\begin{cases} r_{n+1} > r_n + P_n \\ r_n \geq v(n) . \end{cases}$$

On a, d'après  $\textcircled{1}$ , si :

$$\textcircled{2} \quad \left\| \frac{1}{P_n} \sum_1^{P_n} (-1)^j e_{m_j} \right\| \leq \frac{1}{2^n} .$$

Considérons les termes  $(e_i)$  d'indices

$r_1+1, r_1+2, \dots, r_1+P_1, r_2+1, \dots, r_2+P_2, \dots, r_n+1, \dots, r_n+P_n, \dots$  rangés dans cet ordre, et appelons-les  $y_1, y_2, \dots$ . Soit  $(z_j)$  une sous-suite des  $(y_i)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $k$  l'entier défini par  $P_1 + \dots + P_k \leq n \leq P_1 + \dots + P_{k+1}$ .

Posons  $m = n - \sum_1^k P_i$ . On peut écrire les divisions :

$$m = d_k P_k + Q_k, \quad Q_k < P_k,$$

et à nouveau  $Q_k = d'_k P_{k-1} + Q'_k, \quad Q'_k < P_{k-1}$ .

On peut maintenant écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (-1)^j z_j = & [(-1)z_1 + \dots + (-1)^{P_1} z_{P_1}] + [(-1)^{P_1+1} z_{P_1+1} + \dots + (-1)^{P_1+P_2} z_{P_1+P_2}] \\ & + \dots + [(-1)^{P_1+\dots+P_{k-1}+1} z_{P_1+\dots+P_{k-1}+1} + \dots + (-1)^{P_1+\dots+P_k} z_{P_1+\dots+P_k}] \\ & + (-1)^{P_1+\dots+P_{k+1}} z_{P_1+\dots+P_{k+1}} + \dots + (-1)^n z_n. \end{aligned}$$

Pour les termes entre crochets, la relation (2) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \|(-1)z_1 + \dots + (-1)^{P_1} z_{P_1}\| & \leq P_1 \cdot 2^{-1} \\ \|(-1)z_{P_1+1} + \dots + (-1)^{P_2} z_{P_1+P_2}\| & \leq P_2 \cdot 2^{-2}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\|(-1)z_{P_1+\dots+P_{k-1}+1} + \dots + (-1)^{P_k} z_{P_1+\dots+P_k}\| \leq P_k \cdot 2^{-k}.$$

Il reste à considérer les  $m$  termes de la somme

$$(-1)z_{P_1+\dots+P_{k+1}} + \dots + (-1)^m z_{P_1+\dots+P_{k+m}}.$$

Pour les  $d_k P_k$  premiers, on les groupe en  $d_k$  blocs de longueur  $P_k$ , et, on a, pour chacun de ces blocs, en vertu de la relation (2), la majoration  $P_k \cdot 2^{-k}$ , soit au total  $d_k P_k 2^{-k}$ .

Il reste  $Q_k$  termes. Les  $d'_k P_{k-1}$  premiers donnent de même la majoration  $d'_k P_{k-1} 2^{-k+1}$ . Il reste alors  $Q'_k$  termes, qu'on majore par inégalité triangulaire.

On obtient finalement, en divisant par  $n$  :

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_1^n z_j \right\| \leq \frac{\sum_{j=1}^k 2^{-j} P_j}{\sum_1 P_j} + 2^{-k} + 2^{1-k} + \frac{Q'_k}{P_k} ,$$

car  $\frac{d'_k P_k}{n} \leq 1$ , puisque  $d'_k P_k \leq m \leq n$ , et  $\frac{Q_{k-1}}{n} \leq \frac{Q_{k-1}}{P_k}$  puisque  $n \geq P_k$ .

Or si  $n \rightarrow +\infty$ ,  $k \rightarrow +\infty$ , et tous les termes du second membre tendent vers 0 (on a  $\frac{Q'_k}{P_k} < \frac{P_{k-1}}{P_k} < \frac{1}{k}$ ), et ceci achève la démonstration de la proposition.

Revenons à la démonstration du théorème. Si  $E$  ne possède pas B.S.<sub>2</sub>, les sommes  $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k$ , calculées sur la bonne sous-suite, ne peuvent converger : la proposition 1 implique donc que  $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k$  ne converge pas dans  $F$ .

**Lemme 2** : Si  $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k$  ne converge pas dans  $F$ , on peut trouver un nombre  $\delta > 0$  tel que  $\forall n$ ,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k \right| > \delta .$$

Ce lemme se démontre exactement comme le lemme 3 de l'exposé III.

**Lemme 3** : Si, pour tout  $n$ ,  $\left| \frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k \right| > \delta$ , on a, pour tout choix de signes  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = \pm 1$ ,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k e_k \right| > \frac{\delta}{4} .$$

**Démonstration du lemme 3** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$  un choix de  $n$  signes. On peut écrire :

$$\left| \varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_n e_n \right| = \left| \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_3 + \dots + \varepsilon_n e_{2n-1} \right|$$

et aussi

$$= \left| -\varepsilon_1 e_2 - \dots - \varepsilon_n e_{2n} \right| .$$

Par conséquent

$$|\varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_n e_n| \geq \frac{1}{2} |\varepsilon_1(e_1 - e_2) + \varepsilon_2(e_3 - e_4) + \dots + \varepsilon_n(e_{2n-1} - e_{2n})| .$$

Mais on sait que les différences consécutives  $e_{2k-1} - e_{2k}$  sont inconditionnelles, et, plus précisément, (Brunel-Sucheston [ 5 ], lemme 2.3) que :

$$|\varepsilon_1(e_1 - e_2) + \dots + \varepsilon_n(e_{2n-1} - e_{2n})| \geq \frac{1}{2} |e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + \dots + e_{2n-1} - e_{2n}| ;$$

le lemme en résulte aussitôt.

La démonstration de la proposition 3 de l'exposé III montre alors que la suite  $(e_n)$  est équivalente, dans  $F$ , à la base canonique de  $\ell^1$  ; le théorème 1 de l'exposé III implique alors que  $E$  possède la propriété  $(\mathcal{P}_1)$ . Ceci achève la démonstration du théorème.

Il est clair que la démonstration utilise seulement le fait que les sommes de Césaro alternées  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k e_k$  ne convergent pas. On en déduit :

**Proposition 2** : Les propriétés suivantes sont équivalentes, pour un espace de Banach  $E$  :

- pour toute suite bornée  $(e_n)$  de  $E$ , on peut trouver une sous-suite  $(e'_n)$  et une suite de signes  $(\varepsilon_n)$  telles que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k e'_k$  converge (propriété B.S.<sub>2</sub>).

- Pour toute suite bornée  $(e_n)$  de  $E$ , on peut trouver une sous-suite  $(e'_n)$  et une suite de signes  $(\varepsilon_n)$  telles que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k e'_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

- De toute suite bornée  $(e_n)$ , on peut extraire une sous-suite  $(e'_n)$  telles que les sommes de Césaro alternées  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k e'_k$  convergent.

- De toute suite bornée  $(e_n)$ , on peut extraire une sous-suite  $(e'_n)$  telle que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k e'_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Cette dernière propriété a été dénommée A.B.S. par Brunel-Sucheston (Alternate signs Banach-Saks), qui ont démontré qu'un espace la possédait dès qu'il ne contenait pas de  $\ell^1_{(n)}$  uniformément. Le théorème 1 améliore considérablement ce résultat, puisqu'il prouve que  $E$  a A.B.S. si et seulement s'il ne possède pas de modèle étalé isomorphe à  $\ell^1$ .

Pour suivre la terminologie de Brunel-Sucheston, nous adopterons désormais la notation A.B.S. plutôt que B.S.<sub>2</sub>.

On peut caractériser de façon analogue le fait que  $E$  ne contient pas de  $\ell^1_{(n)}$  uniformément. Cela a été fait par B. Maurey et G. Pisier [9] : cela se produit si et seulement si, pour toute suite bornée  $(x_n)$ , il existe une suite de signes  $\varepsilon_n$  telle que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k \rightarrow 0$  dans  $E$  (il n'y a pas de sous-suite à extraire).

En résumé, nous avons les implications suivantes :

$$\text{B.S.} \implies \text{A.B.S.} \implies \text{B.S.R.}$$

(la première est triviale, la seconde résulte de  $\text{Non B.S.R.} \Rightarrow (\mathcal{P}_1) \Rightarrow \text{non A.B.S.}$ ) et ces propriétés coïncident pour les espaces réflexifs.

$c_0$  est un exemple d'espace qui a A.B.S. (Brunel-Sucheston [5]) sans avoir B.S.,  $\ell^1$  est un exemple d'espace qui a B.S.R. sans avoir A.B.S.

Nous allons maintenant étendre la définition de ces trois propriétés au cadre des opérateurs entre espaces de Banach, et obtenir des théorèmes de factorisation.

## § II. PROPRIÉTÉS DE BANACH-SAKS POUR DES OPÉRATEURS ; LES THÉORÈMES DE FACTORISATION.

Soient maintenant  $E_1$  et  $E_2$  deux espaces de Banach, et  $T$  un opérateur linéaire continu de  $E_1$  dans  $E_2$ . Nous dirons que :

-  $T$  possède la propriété de Banach-Saks si de toute suite bornée dans  $E_1$  on peut extraire une sous-suite dont les images par  $T$  sont de Banach-Saks dans  $E_2$ .

-  $T$  possède B.S.<sub>2</sub> si, pour toute suite bornée  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E_1$ , on peut trouver une sous-suite  $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et une suite de signes  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de telle façon que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k T(e'_k)$  converge dans  $E_2$ .

-  $T$  possède A.B.S. si de toute suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée dans  $E_1$ , on peut extraire une sous-suite  $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k T(e'_k)$  converge dans  $E_2$ .

-  $T$  possède B.S.R. si de toute suite  $(e_n)$  faiblement convergente vers 0 dans  $E_1$ , on peut extraire une sous-suite dont les images par  $T$  sont de Banach-Saks dans  $E_2$ .

Nous dirons enfin que  $T$  se factorise par un espace  $Y$  s'il existe deux opérateurs  $U$ , de  $E_1$  dans  $Y$ , et  $V$ , de  $Y$  dans  $E_2$ , avec  $V \circ U = T$ .

Note but, dans ce paragraphe, sera d'établir les théorèmes qui suivent ; le premier a été publié par l'auteur dans [ 3 ].

Théorème 1 : Tout opérateur qui possède la propriété de Banach-Saks se factorise par un espace qui possède cette même propriété.

Théorème 2 : Pour un opérateur, les propriétés B.S.<sub>2</sub> et A.B.S. sont équivalentes. Tout opérateur qui les possède se factorise par un espace qui les possède.

Pour B.S.R., l'énoncé est moins satisfaisant :

Théorème 3 : Toute injection, partant d'un espace de contenant pas  $\ell^1$ , qui possède la propriété de Banach-Saks-Rosenthal, se factorise par un espace qui possède cette même propriété.

A quelques modifications de détail près, la démonstration suit celle donnée par l'auteur dans [ 3 ] ; l'espace construit pour la factorisation est un espace d'interpolation, construit par la méthode de Lions-Peetre [8]. Faisons quelques rappels sur cette construction.

Soient  $A_0$  et  $A_1$  deux espaces de Banach ; on suppose qu'il existe une injection continue  $i$  de  $A_0$  dans  $A_1$ . Les espaces d'interpolation réels de Lions-Peetre sont définis par :

$$(A_0, A_1)_{\theta, p} = \left\{ x \in A_1, \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = x, \text{ et } \max\left( \|e^{\xi_0 t} x(t)\|_{L^p(A_0)}, \|e^{\xi_1 t} x(t)\|_{L^p(A_1)} \right) < \infty \right\},$$

où  $\xi_0$  et  $\xi_1$  sont des nombres réels avec  $\xi_0 < 0$ ,  $\xi_1 > 0$  ;  $p$  est un réel avec  $1 < p < \infty$ . On pose  $\theta = \frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1}$ . La norme de  $(A_0, A_1)_{\theta, p} = A$  est définie par :

$$\textcircled{1} \quad \|x\|_A = \inf \left\{ \max\left( \|e^{\xi_0 t} x(t)\|_{L^p(A_0)}, \|e^{\xi_1 t} x(t)\|_{L^p(A_1)} \right) ; \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = x \right\}$$

et on a la formule dite "d'interpolation" :

$$\textcircled{2} \quad \|x\|_A = \inf \left\{ \|e^{\xi_0 t} x(t)\|_{L^p(A_0)}^{1-\theta} \circ \|e^{\xi_1 t} x(t)\|_{L^p(A_1)}^\theta ; \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = x \right\} .$$

Il résulte de cette formule qu'il existe une constante C telle que,  $\forall x \in A_0$ , on ait :

$$\textcircled{3} \quad \|x\|_A \leq C \|x\|_{A_0}^{1-\theta} \circ \|x\|_{A_1}^\theta .$$

Nous renvoyons à [ 4 ] pour une étude détaillée de ces espaces. Les espaces  $(A_0, A_1)_{\theta, p}$  sont intermédiaires entre  $A_0$  et  $A_1$  ; il en résulte que si  $A_0$  désigne l'espace  $E_2$  muni de la jauge de  $T(\beta_{E_1})$ , et si on pose  $A_1 = E_2$ , l'opérateur T se factorise par  $(A_0, A_1)_{\theta, p}$  ( $0 < \theta < 1$ ,  $1 < p < \infty$ ). Ce seront ces espaces qui posséderont les propriétés énoncées aux théorèmes 1, 2 et 3. Nous allons établir :

Proposition 1 : Si les espaces  $(A_0, A_1)_{\theta, p}$  possèdent la propriété  $(P_1)$ , on peut trouver dans  $A_0$  une suite bornée  $(e_n)$  et un nombre  $\delta' > 0$  tels que, pour tout k, tout choix de signes  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k = \pm 1$ , toute suite croissante de k entiers  $n_1 < \dots < n_k$ , on ait :

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i e_{n_i} \right\|_{A_1} \geq \delta' .$$

(On identifie, dans la notation, un point de  $A_0$  et son image par l'injection de  $A_0$  dans  $A_1$ .)

Comme cette condition est alors automatiquement satisfaite dans  $A_0$ , nous traduirons la conclusion de la proposition en disant que  $A_0$  et  $A_1$  possèdent  $(P_1)$  homothétique.

Démonstration de la proposition 1 : Nous avons vu, au cours de l'exposé III, que si  $(A_0, A_1)_{\theta, p}$  possédait  $(P_1)$ , on pouvait, pour tout  $\eta > 0$ , trouver une suite  $(e_n)$  avec :

$$\textcircled{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k = \pm 1, \forall n_1 < \dots < n_k : \\ 1 - \eta \leq \left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i e_{n_i} \right\|_A \leq 1 + \eta . \end{array} \right.$$

Soit  $\eta > 0$ , que nous choisirons par la suite. Choisissons, pour chaque n, en représentant  $e_n(t)$  de  $e_n$ , avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e_n(t) dt = e_n ;$$

$$\max(\|e^{\xi_0 t} e_n(t)\|_{L^p(A_0)}, \|e^{\xi_1 t} e_n(t)\|_{L^p(A_1)}) \leq 1 + 2\eta .$$

D'après (2) , on peut écrire :

$$1 - \eta \leq \left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i e_{n_i} \right\|_A \leq \|e^{\xi_0 t} \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i e_{n_i}(t)\|_{L^p(A_0)}^{1-\theta} \cdot \|e^{\xi_1 t} \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i e_{n_i}(t)\|_{L^p(A_1)}^\theta$$

et donc :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|e^{\xi_0 t} \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i e_{n_i}(t)\|_{L^p(A_0)} \geq \left( \frac{1-\eta}{(1+2\eta)^\theta} \right)^{1/1-\theta} \\ \|e^{\xi_1 t} \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i e_{n_i}(t)\|_{L^p(A_1)} \geq \left( \frac{1-\eta}{(1+2\eta)^{1-\theta}} \right)^{1/\theta} . \end{array} \right.$$

$$\text{Posons } \eta' = 1 - \min \left( \left( \frac{1-\eta}{(1+2\eta)^\theta} \right)^{1/1-\theta}, \left( \frac{1-\eta}{(1+2\eta)^{1-\theta}} \right)^{1/\theta} \right) ; \text{ on}$$

aura donc les estimations (5) avec  $1 - \eta'$  aux seconds membres. Choisissons  $\eta$  assez petit pour que

$$\eta' < \left(\frac{1}{20}\right)^p .$$

Lemme 1 : Il existe un nombre  $M > 0$  et un indice  $i$  tels que,  $\forall i \geq i_0$  , on ait à la fois

$$\left( \int_{-M}^{+M} \|e^{\xi_0 t} e_i(t)\|_{A_0}^p dt \right)^{1/p} \geq 1 - 2\eta'$$

(6)

$$\left( \int_{-M}^{+M} \|e^{\xi_1 t} e_i(t)\|_{A_1}^p dt \right)^{1/p} \geq 1 - 2\eta' .$$

Ce lemme signifie évidemment que les fonctions  $e_i(t)$  prennent presque toute leur masse sur un compact fixe, à la fois dans  $A_0$  et dans  $A_1$  .

Démonstration du lemme 1 : Il suffit clairement de montrer séparément, pour  $A_0$  et  $A_1$ , l'existence de  $M$  et  $i_0$ . Montrons-la pour  $A_0$ . Si la conclusion (6) était en défaut, on pourrait trouver une suite de réels positifs  $M_k$ , strictement croissante et tendant vers l'infini, et une suite d'entiers  $i_k$ , strictement croissante, avec :

$$(7) \quad \left( \int_{-M_k}^{M_k} \|e^{\xi_0 t} e_{i_k}(t)\|_{A_0}^p dt \right)^{1/p} < 1 - 2\eta'$$

$$(8) \quad \left( \int_{|t| > M_{k+1}} \|e^{\xi_0 t} e_{i_k}(t)\|_{A_0}^p dt \right)^{1/p} < \eta'/2 .$$

Notons  $e'_{i_k}(t) = e_{i_k}(t)$  si  $M_k \leq |t| < M_{k+1}$ ,

= 0 sinon ,

et  $e''_{i_k}(t) = e_{i_k}(t) - e'_{i_k}(t)$  .

Les  $e'_{i_k}(t)$  sont par construction à supports disjoints, et les  $e''_{i_k}$  satisfont :

$$\|e''_{i_k}(t) e^{\xi_0 t}\|_{L^p(A_0)} < 1 - 2\eta' + \frac{\eta'}{2} = 1 - \frac{3\eta'}{2} .$$

On en déduit que, pour tout  $n$  :

$$\begin{aligned} 1 - \eta' &\leq \left\| \frac{e^{\xi_0 t}}{n} \sum_1^n e_{i_k}(t) \right\|_{L^p(A_0)} \\ &\leq e^{\xi_0 t} \frac{1}{n} \sum_1^n \|e'_{i_k}(t)\|_{L^p(A_0)} + \left\| e^{\xi_0 t} \frac{1}{n} \sum_1^n e''_{i_k}(t) \right\|_{L^p(A_0)} \\ &\leq \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}} (1 + 2\eta) + 1 - \frac{3\eta'}{2} \end{aligned}$$

et il est impossible que ceci se produise lorsque  $n$  est assez grand ; cette contradiction prouve le lemme.

On élimine les  $i_0$  premiers termes de la suite  $(e_i)$  et on renu-  
mérote : on aura donc la conclusion du lemme avec  $i_0 = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Posons } f_k(t) &= e_k(t) \text{ si } |t| \leq M, \\ &= 0 \text{ sinon,} \end{aligned}$$

$$\text{et } g_k(t) = e_k(t) - f_k(t) .$$

Posons enfin :

$$f_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t) dt, \quad g_k = \int_{-\infty}^{+\infty} g_k(t) dt .$$

Lemme 2 : Les points  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont dans  $A_0$ , et leur norme est bornée dans  $A_0$ .

Démonstration du lemme 2 : Il suffit bien sûr de calculer

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t) dt \right\|_{A_0} . \text{ On a :}$$

$$\begin{aligned} \|f_k\|_{A_0} &= \left\| \int_{-M}^M e_k(t) dt \right\|_{A_0} \leq \int_{-M}^M e^{-\xi_0 t} \|e^{\xi_0 t} e_k(t)\|_{A_0} dt \\ &\leq \left( \int_{-M}^M e^{-\xi_0 q t} dt \right)^{1/q} \cdot \left( \int_{-M}^M \|e^{\xi_0 t} e_k(t)\|_{A_0}^p dt \right)^{1/p} \\ &\leq (1 + 2\eta) \left( \int_{-M}^M e^{-\xi_0 q t} dt \right)^{1/q} \quad (\text{on a noté } q = \frac{p}{p-1}) \end{aligned}$$

et ceci prouve le lemme.

Nous allons maintenant calculer la norme, dans  $A$ , de la différence  $e_k - f_k$ .

Lemme 3 : On a, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\|e_k - f_k\|_A \leq 8(\eta')^{1/p} .$$

Démonstration du lemme 3 : Le point  $e_k - f_k$ , dans  $A$ , admet  $g_k(t)$  pour représentant, et donc :

$$\|e_k - f_k\|_A \leq \max \left( \|e^{\xi_0 t} g_k(t)\|_{L^p(A_0)}, \|e^{\xi_1 t} g_k(t)\|_{L^p(A_1)} \right) .$$

Mais

$$\|e^{\xi_0 t} g_k(t)\|_{L^p(A_0)} = \left( \int_{|t| > M} \|e^{\xi_0 t} e_k(t)\|_{A_0}^p dt \right)^{1/p}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \|e^{\xi_0 t} e_k(t)\|_{A_0}^p dt - \int_{|t| \leq M} \|e^{\xi_0 t} e_k(t)\|_{A_0}^p dt \right]^{1/p} \\
 &\leq [(1 + 2\eta)^p - (1 - 2\eta')^p]^{1/p} \\
 &\leq [(1 + 2\eta')^p - (1 - 2\eta')^p]^{1/p} \leq [p2^{p-1}(4\eta')]^{1/p} \leq 8(\eta')^{1/p} .
 \end{aligned}$$

Et de même :

$$\|e^{\xi_1 t} g_k(t)\|_{L^p(A_1)} \leq 8(\eta')^{1/p} ,$$

d'où :

$$\|e_k - f_k\|_A \leq 8(\eta')^{1/p} .$$

Nous allons en déduire que, dans A, les  $f_k$  satisfont aux estimations voulues. Soient  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k$  des choix de signes,  $n_1 < \dots < n_k$  des entiers. On a :

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i f_{n_i} \right\|_A &\geq \left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i e_{n_i} \right\|_A - \frac{1}{k} \sum_1^k \|e_{n_i} - f_{n_i}\|_A \\
 &\geq 1 - \eta - (8\eta')^{1/p} \geq 1/2 ,
 \end{aligned}$$

d'après le choix qui a été fait de  $\eta$ , puis de  $\eta'$ .

Puisque les points  $f_k$  sont dans  $A_0$ , la formule (3) et le lemme 2 permettent d'écrire :

$$\frac{1}{2} \leq \left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i f_{n_i} \right\|_A \leq C \left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i f_{n_i} \right\|_{A_0}^{1-\theta} \cdot \left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i f_{n_i} \right\|_{A_1}^\theta$$

et comme  $\|f_i\|_{A_0} \leq C_1$ , on obtient pour un certain  $\delta' > 0$ ,  $\left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i f_{n_i} \right\|_{A_1} \geq \delta'$ , ce qui démontre la proposition.

Nous allons déduire de la proposition 1 la démonstration des trois théorèmes mentionnés :

Démonstration du théorème 1 : Supposons que T, de  $E_1$  dans  $E_2$ , soit de Banach-Saks ; on vérifie immédiatement qu'il en est de même de i, de  $A_0$  dans  $A_1$ . L'injection i est alors faiblement compacte, et  $(A_0, A_1)_{\theta, p}$  est réflexif d'après [1]. Par ailleurs,  $A_0$  et  $A_1$  ne peuvent pas posséder  $(\mathcal{P}_1)$  homothétique : la suite  $(e_n)$  qui donne  $(\mathcal{P}_1)$  dans  $A_0$  et  $A_1$  est une

suite bornée dont on ne peut extraire aucune sous-suite de Banach-Saks. D'après la proposition,  $(A_0, A_1)_{\theta, p}$  ne possède pas non plus  $(\mathcal{P}_1)$ . Donc  $(A_0, A_1)$  possède la propriété de Banach-Saks, d'après l'exposé III.

Démonstration du théorème 2 : Supposons que T ait B.S.<sub>2</sub> : il en est de même de i, et  $A_0$  et  $A_1$  ne peuvent avoir  $(\mathcal{P}_1)$  homothétique. Il résulte de la proposition 1 que  $(A_0, A_1)_{\theta, p}$  n'a pas  $(\mathcal{P}_1)$ , donc a A.B.S. De ce fait, l'opérateur T, qui se factorise par  $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ , a aussi A.B.S.

Démonstration du théorème 3 : Si  $(A_0, A_1)_{\theta, p}$  ne possède pas B.S.R., il possède  $(\mathcal{P}_1)$ , et donc  $A_0$  et  $A_1$  ont  $(\mathcal{P}_1)$  homothétique, d'après la proposition 1. Soit  $(e_n)$  la suite de points réalisant  $(\mathcal{P}_1)$  dans  $A_0$  et  $A_1$ . Puisque  $A_0$  ne contient pas  $\ell^1$ , il existe une sous-suite des  $(e_n)$  qui est de Cauchy faible, d'après H.P. Rosenthal [10]. En prenant les différences consécutives sur cette sous-suite,  $e'_{2n+1} - e'_{2n}$ , on obtient une suite tendant faiblement vers 0 dans  $A_0$ , dont les images dans  $A_1$  possèdent encore la propriété  $(\mathcal{P}_1)$ , ce qui contredit le fait que l'injection i, de  $A_0$  dans  $A_1$ , soit de Banach-Saks-Rosenthal.

Nous avons supposé, dans l'énoncé du théorème 3, que T était une injection, car il n'est pas clair que i possède la propriété B.S.R. si T la possède.

Nous allons maintenant étudier la factorisation de certaines d'opérateurs.

### § III. FACTORISATION DES OPERATEURS UNIFORMEMENT CONVEXIFIANTS ET DE TYPE RADEMACHER.

Nous renvoyons à [ 1 ] pour l'étude des opérateurs uniformément convexifiants. Rappelons simplement que T, de  $E_1$  dans  $E_2$ , n'est pas uniformément convexifiant si, pour un certain  $\varepsilon > 0$ , on peut, pour tout n, trouver  $2^n$  points dans la boule unité de  $E_1$  dont les images par T forment une  $(n, \varepsilon)$  branche dans  $E_2$ . Il est clair que les opérateurs uniformément convexifiants sont faiblement compacts, et il a été démontré par l'auteur [ ] qu'ils ne se factorisent pas nécessairement par un espace super-réflexif. On peut donc se demander s'il est possible d'obtenir pour eux un certain résultat de factorisation. De même, on dit que l'opérateur  $T: E_1 \rightarrow E_2$  est de type Rademacher si l'on ne peut pas trouver, uniformément dans  $E_1$  et  $E_2$ , de  $\ell^1_{(n)}$  liés par T. (Ces opérateurs ont été introduits et étudiés par l'auteur dans [ 2 ].) Cela se produit si et seulement

si la suite de nombres réels

$$a_n(T) = \sup_{\substack{x_1 \dots x_n \in E_1 \\ \|x_i\|_{E_1} \leq 1}} \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t) T(x_i) \right\|_{E_2} dt$$

tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

On sait qu'un opérateur de type Rademacher ne se factorise pas nécessairement par un espace B-convexe [ 2 ]. Là encore, on peut donc se demander quelle type de factorisation on peut obtenir pour cette classe d'opérateurs. Le théorème qui suit donne une réponse à cette question.

Théorème 1 : Tout opérateur de type Rademacher possède la propriété A.B.S., et se factorise donc par un espace qui possède cette propriété.

Démonstration : On peut se ramener au cas de l'injection  $i$ , de  $A_0$  dans  $A_1$ . Si  $(A_0, A_1)_{\theta, p}$  ne possédait pas A.B.S.,  $A_0$  et  $A_1$  auraient  $(\mathcal{P}_1)$  homothétique : il est facile de voir, en prenant dans la définition de  $a_n(T)$  les  $n$  premiers points qui donnent  $(\mathcal{P}_1)$ , que  $a_n(T)$  ne peut tendre vers 0 :  $T$  n'est pas de type Rademacher.

Théorème 2 : Tout opérateur faiblement compact de type Rademacher est de Banach-Saks, et se factorise donc par un espace ayant cette propriété.

Démonstration : L'espace  $(A_0, A_1)_{\theta, p}$  ne possède pas  $(\mathcal{P}_1)$  et il est réflexif : il a donc la propriété de Banach-Saks.

Théorème 3 : Tout opérateur uniformément convexifiant est de Banach-Saks, et se factorise donc par un espace ayant cette propriété.

Démonstration : Un opérateur uniformément convexifiant est faiblement compact [ 1 ] et de type Rademacher [ 2 ] (on peut aussi remarquer directement que si une suite  $(e_n)$  possède la propriété  $(\mathcal{P}_1)$ , ses  $2^n$  premiers points forment une  $(n, 2\delta)$  branche

## BIBLIOGRAPHIE

- 
- [1] B. Beauzamy, Opérateurs uniformément convexifiants, *Studia Math.* t. 57, 2 (1977).
  - [2] B. Beauzamy, Opérateurs de type Rademacher, Séminaire Maurey-Schwartz 1975/76, Exposés 6-7, Ecole Polytechnique, Palaiseau.
  - [3] B. Beauzamy, Propriété de Banach-Saks, à paraître dans *Studia Math.* t. 66, 3.
  - [4] B. Beauzamy, Espaces d'interpolation réels : topologie et géométrie, à paraître.
  - [5] A. Brunel et L. Sucheston, On J-convexity and ergodic super-properties of Banach-spaces, *Trans. A.M.S.*
  - [6] A. Brunel et L. Sucheston, On B-convex Banach spaces, *Math. Syst. Th.* vol. 7, 4 (1973) p. 294-299.
  - [7] A. Brunel, Espaces associés à une suite bornée, Séminaire Maurey-Schwartz 1973/74, exposé 15, Ecole Polytechnique, Paris.
  - [8] J.L. Lions et J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Pub. I.H.E.S.* No 19.
  - [9] B. Maurey et G. Pisier, Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, *Studia Math.* t. 58 (1976).
  - [10] H.P. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing  $\ell_1$ , *Proceedings of the N.A.S. U.S.A.*, vol. 71, 6 (June 1974) p. 2411-2413.
-