

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. BEAUZAMY

Propriété de Banach-Saks et modèles étalés

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 3, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978__A2_0

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E S U R L A G E O M E T R I E
D E S E S P A C E S D E B A N A C H
1977-1978

PROPRIETE DE BANACH-SAKS ET
=====

MODELES ÉTALES
=====

B. BEAUZAMY

Soit (x_n) une suite bornée de points dans un espace de Banach E.

On dit qu'elle est de Banach-Saks si les sommes de Césaro $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ convergent dans E. Par exemple, dans ℓ^p ($1 < p < \infty$), la base canonique forme une suite de Banach-Saks : les sommes de Césaro convergent vers 0. Par contre, pour la base canonique (e_n) de ℓ^1 , on a, pour tout n :

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_k - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} e_k \right\|_{\ell^1} = \left\| \frac{1}{2n} \left(\sum_{k=1}^n e_k - \sum_{k=n+1}^{2n} e_k \right) \right\|_{\ell^1} = 1,$$

et la suite (e_n) n'est pas de Banach-Saks, non plus qu'aucune de ses sous-suites.

Une suite donnée (x_n) peut être de Banach-Saks sans que toutes ses sous-suites le soient : on peut en effet facilement imposer des conditions, par exemple sur les $(x_{2^k})_{k \in \mathbb{N}}$, telles que cette sous-suite ne soit pas de Banach-Saks, sans altérer le comportement des sommes de Césaro de la suite tout entière. Néanmoins, pour chaque suite bornée (x_n) , il y a une sous-suite qui a le même comportement que toutes ses sous-suites. C'est ce qu'établit la proposition ci-dessous, due à P. Erdős et M. Magidor [6] :

Proposition 1 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans un espace de Banach E. Il existe une sous-suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui possède l'une ou l'autre des deux propriétés suivantes :

- a) toute sous-suite de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Banach-Saks ;
- b) aucune sous-suite de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est de Banach-Saks.

Démonstration : Notons $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites infinies strictement croissantes d'entiers, identifié à un sous-ensemble de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit, et considérons :

$$A = \left\{ p \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}), \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{k_i} \text{ converge, } (k_i) = p \right\}.$$

Notons $B = \bigcap A$. Nous allons voir que A est un borélien :

Lemme : A est un borélien de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$.

Démonstration : On pose

$$A_{\varepsilon, m, n} = \{p \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) \text{ tels que } \left\| \frac{1}{n} \sum_1^n e_{k_j} - \frac{1}{m} \sum_1^m e_{k_j} \right\| < \varepsilon, \text{ si } p = (k_j)\}$$

$A_{\varepsilon, m, n}$ est ouvert : si $p \in A_{\varepsilon, m, n}$ et si p' coïncide avec p jusqu'à k_m , $p' \in A_{\varepsilon, m, n}$. Or l'ensemble des p' qui coïncident avec p jusqu'à un rang donné est un ouvert de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ pour la topologie choisie. Il suffit donc pour montrer que A est un borélien de remarquer que

$$A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{m, n \geq N} A_{\frac{1}{k}, m, n} .$$

D'après le théorème de Galvin-Prikry [7] (ou théorème de "Ramsey infini"), on peut trouver $p_0 \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tel que l'on ait :

- ou bien $\forall p \subset p_0, p \in A$,
- ou bien $\forall p \subset p_0, p \in B$.

La sous-suite $(x_k)_{k \in p_0}$ satisfait donc à la conclusion de la proposition.

Soit E un espace de Banach. On dira qu'il possède la propriété de Banach-Saks si de toute suite bornée on peut extraire une suite de Banach-Saks.

S. Kakutani a démontré dans [9] que tout espace uniformément convexe avait cette propriété ; c'est donc le cas pour tout espace super-réflexif, car il est clair qu'elle se conserve si on remplace la norme par une norme équivalente. Sans utiliser le résultat de Kakutani, nous obtiendrons cette propriété des espaces super-réflexifs comme corollaire des théorèmes de la suite de cet exposé.

La propriété de Banach-Saks est elle-même plus forte que la réflexivité : un résultat de R.C. James [8] (exposé par l'auteur dans [2]) dit que, si E n'est pas réflexif, on peut trouver un nombre θ avec $0 < \theta < 1$ et une suite bornée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E , avec, pour tout $k \geq 1$:

$$\text{dist}(\text{conv}(e_1, \dots, e_k), \text{conv}(e_{k+1}, \dots)) > \theta .$$

Il en résulte clairement que $\forall k_1, \dots, k_{2n}$ suite d'entiers :

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_i^n e_{k_i} - \frac{1}{2n} \sum_i^{2n} e_{k_i} \right\| = \left\| \frac{1}{2n} \left(\sum_i^n e_{k_i} - \sum_{n+1}^{2n} e_{k_i} \right) \right\| \geq \frac{\theta}{2}$$

et aucune sous-suite de la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut être de Banach-Saks.

Mais inversement la réflexivité n'implique pas la propriété de Banach-Saks (en abrégé P.B.S.) : A. Baernstein a construit dans [1] un exemple d'espace réflexif qui ne possède pas P.B.S. De même, P.B.S. n'implique pas la super-réflexivité : nous verrons que tout espace réflexif qui ne contient pas ℓ_n^1 uniformément a P.B.S., et un tel espace peut n'être pas super-réflexif. Mais même cette condition n'est pas nécessaire : nous verrons que l'espace d'interpolation $(L^\varphi([0,1],dt), L^1([0,1],dt))_{\frac{1}{2},2}$ (où φ est la fonction d'Orlicz

$\varphi(t) = t(1 + \text{Log}(1+t))$) possède la propriété de Banach-Saks, bien qu'il ne soit de type p-Rademacher pour aucun $p > 1$ (voir [3]).

La propriété de Banach-Saks est donc strictement intermédiaire entre la réflexivité et la super-réflexivité. Notre but dans cet exposé est l'étude de cette propriété ; l'outil que nous emploierons à cette fin est le procédé de Brunel-Sucheston, exposé par A. Brunel dans [4], qui permet d'obtenir des "modèles étalés".

Le théorème principal (th. 1) que nous obtiendrons a initialement été démontré par H.P. Rosenthal [11] par des méthodes complètement différentes ; l'idée d'utiliser le procédé de Brunel-Sucheston pour l'étude de ces questions est due à L. Tzafriri. Commençons par quelques rappels sur ce procédé :

Proposition 2 (extraction de "bonnes sous-suites", selon Brunel-Sucheston [5]) : Soit (x_n) une suite bornée dans un espace de Banach. On peut trouver une sous-suite (e_n) de la suite (x_n) (appelée "bonne sous-suite") et une application L, définie sur l'ensemble des suites réelles à support fini (noté S), à valeurs dans \mathbb{R}_+ , telles que

$$\forall a \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists v \in \mathbb{N}, v < n_1 < n_2 < \dots, \left| \left\| \sum_i a_i e_{n_i} \right\| - L(a) \right| \leq \varepsilon .$$

Pour la démonstration, on utilise le théorème combinatoire de Ramsey :

Théorème de Ramsey : Soit \mathcal{K} l'ensemble des k-uples $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ d'entiers distincts. Si $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}''$ est une partition de \mathcal{K} , on peut trouver une partie infinie de \mathbb{N} , I, telle que tous les \bar{n} dont les composantes sont dans I appartiennent au même sous-ensemble \mathcal{K}' ou \mathcal{K}'' .

La démonstration complète de la proposition 1 peut être

trouvée dans [5] ; donnons-en un résumé.

Soit $\Psi: \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{R}_+$, définie par $\Psi(\bar{n}) = \|\sum a_i x_{n_i}\|$, pour $a = (a_i)$ fixé dans S . Ψ est bornée. Posons

$$\mathcal{K}' = \{\bar{n}, 0 \leq \Psi(\bar{n}) \leq \frac{\alpha}{2}\} \quad , \quad \mathcal{K}'' = \{\bar{n}, \frac{\alpha}{2} < \Psi(\bar{n}) \leq \alpha\} \quad .$$

On peut alors trouver une suite croissante d'entiers $(i_n^1)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que par exemple $0 \leq \Psi(\bar{n}) \leq \alpha/2$ si les composantes de \bar{n} sont dans la suite $(i_n^1)_{n \in \mathbf{N}}$. On itère l'argument en partageant en deux l'intervalle $[0, \frac{\alpha}{2}] \dots$. La suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ pour la suite diagonale $(i_n^n)_{n \in \mathbf{N}}$ possède la propriété voulue pour a fixé dans S . On considère ensuite les $a \in S$ à coordonnées rationnelles, on les ordonne, et on utilise à nouveau une méthode diagonale. La démonstration s'achève par un argument de continuité.

Pour cette "bonne sous-suite", on a donc :

$$L(a) = \lim_{\substack{n_k \rightarrow \infty \\ \vdots \\ n_1 \rightarrow \infty}} \|a_1 e_{n_1} + \dots + a_k e_{n_k}\| \quad \text{si } a = (a_1 \dots a_k) \quad .$$

Le lemme suivant se trouve également dans [5] :

Lemme 1 : Si la suite $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas, L est une norme. Supposons en effet $L(a) = 0$ et soit $\varepsilon > 0$. Si $a = (a_1, \dots, a_k)$, et si v est assez grand, on a lorsque $v < n < p < n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$

$$\begin{cases} \|a_1 e_n + a_2 e_{n_1} + \dots + a_k e_{n_{k-1}}\| \leq \frac{\varepsilon}{2|a_1|} \\ \|a_1 e_p + a_2 e_{n_1} + \dots + a_k e_{n_{k-1}}\| \leq \frac{\varepsilon}{2|a_1|} \end{cases}$$

et donc $\|y_n - y_p\| \leq \varepsilon$.

Il est commode de considérer L comme une norme sur l'espace vectoriel engendré par les (x_n) ; on posera donc :

$$|a_1 e_1 + \dots + a_k e_k| = L(a) \quad , \quad \text{si } a = (a_1, \dots, a_k) \quad .$$

Cette norme est bien sûr invariante par étalement, en ce sens que :

$$\forall n_1 < n_2 < \dots < n_k,$$

$$|a_1 e_1 + \dots + a_k e_k| = |a_1 e_{n_1} + \dots + a_k e_{n_k}|.$$

On notera F le complété de l'espace normé ainsi construit sur les (e_n) avec la norme $|\cdot|$, et on dira qu'il s'agit du modèle étalé de l'espace E construit sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (en anglais "spreading model"). Une question très intéressante (et mal connue) est de savoir décrire sur F des propriétés de E ou de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et inversement. Le lemme suivant, qui sera utile, donne un exemple de cette situation :

Lemme 2 : Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans E , $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle de F .

Démonstration : Nous allons montrer que si P est la projection sur un nombre fini quelconque de coordonnées, on a :

$$|P(\sum a_i e_i)| \leq |\sum a_i e_i|.$$

Montrons par exemple que

$$|a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3| \geq |a_1 e_1 + a_3 e_3|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver un entier ν tel que, si $\nu < m < n_2 < n_3$, on a :

$$\begin{cases} \left| |a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3| - \|a_1 e_{n_1} + a_2 e_{n_2} + a_3 e_{n_3}\| \right| < \varepsilon \\ \left| |a_1 e_1 + a_3 e_3| - \|a_2 e_{n_1} + a_3 e_{n_3}\| \right| < \varepsilon. \end{cases}$$

Puisque $(e_n) \rightarrow 0$ faiblement dans E , on peut trouver une combinaison linéaire finie des e_n , à coefficients positifs rationnels,

$\frac{p_1}{N}, \dots, \frac{p_k}{N}$, avec :

$$\left\| \frac{1}{N} (p_1 e_{n_1+1} + p_2 e_{n_1+2} + \dots + p_k e_{n_1+k}) \right\| < \frac{\varepsilon}{|a_2|}$$

et $p_1 + \dots + p_k = N$.

On peut écrire :

$$|a_1 e_2 + a_2 e_2 + a_3 e_3| \geq \|a_1 e_{n_1} + a_2 e_{n_1+1} + a_3 e_{n_1+N+3}\| - \varepsilon$$

et aussi

$$\geq \|a_1 e_{n_1} + a_2 e_{n_1+2} + a_3 e_{n_1+N+3}\| - \varepsilon$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\geq \|a_1 e_{n_1} + a_2 e_{n_1+k} + a_3 e_{n_1+N+3}\| - \varepsilon .$$

On répète p_1 fois la première inégalité, p_2 fois la seconde, ..., p_k fois la dernière, et on somme. On obtient, après division par N :

$$\begin{aligned} |a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3| &\geq \|a_1 e_{n_1} + a_2 \left(\frac{p_1 e_{n_1+1} + \dots + p_k e_{n_1+k}}{N} \right) + a_3 e_{n_1+N+3}\| - \varepsilon \\ &\geq \|a_1 e_{n_1} + a_3 e_{n_1+N+3}\| - 2\varepsilon \\ &\geq |a_1 e_1 + a_3 e_3| - 3\varepsilon . \end{aligned}$$

Ce qui établit le lemme.

Il a été démontré par Brunel-Sucheston [5] que l'espace F ainsi construit était finiment représentable dans E . De plus, cet espace permet de caractériser le fait que la suite (x_n) ait toutes ses sous-suites de Banach-Saks : cela se produit dès que $\frac{1}{n} \sum_1^n e_k$ converge dans F [5].

Nous allons maintenant déterminer l'espace F lorsque la suite (x_n) de départ n'est pas de Banach-Saks, non plus qu'aucune de ses sous-suites. On sait alors que la suite $\frac{1}{n} \sum_1^n e_k$ ne peut converger dans F .

Lemme 3 : Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne possède dans E aucune sous-suite de Banach-Saks, on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que, $\forall n$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_1^n e_k \right| \geq \delta .$$

Démonstration du lemme 3 : Puisque $\frac{1}{n} \sum_1^n e_k$ ne converge pas dans F , il existe un nombre $\delta_1 > 0$ et une suite (n_j) d'entiers, strictement croissante, tels que

$$\left| \frac{1}{n_j} \sum_1^{n_j} e_k \right| > \delta_1, \quad \forall j.$$

On va montrer que ceci implique, $\forall n$, $\left| \frac{1}{n} \sum_1^n e_k \right| > \frac{\delta_1}{2} = \delta$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Choisissons j assez grand pour que $\frac{n}{n_j} < \frac{\delta_1}{2}$.

La division euclidienne de $N = n_j$ par n donne :

$$N = nk + r, \quad r < n.$$

On a :

$$\begin{aligned} \delta_1 &\leq \frac{1}{N} |e_1 + \dots + e_N| \leq \frac{1}{N} |e_1 + \dots + e_{nk}| + \frac{1}{N} |e_{nk+1} + \dots + e_{nk+r}| \\ &\leq \frac{1}{N} |e_1 + \dots + e_{nk}| + \frac{r}{N} \leq \frac{1}{N} |e_1 + \dots + e_{nk}| + \frac{n}{N} \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{N} |e_1 + \dots + e_{nk}| \geq \frac{\delta_1}{2}$$

d'où

$$\frac{1}{nk} |e_1 + \dots + e_{nk}| \geq \frac{1}{N} |e_1 + \dots + e_{nk}| \geq \frac{\delta_1}{2} = \delta.$$

Mais comme :

$$|e_1 + \dots + e_n| = |e_{n+1} + \dots + e_{2n}| = \dots = |e_{n(k-1)+1} + \dots + e_{nk}|$$

le lemme en résulte. (Dans le calcul, nous avons supposé pour simplifier $\|e_n\| \leq 1 \quad \forall n$.)

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser l'espace F construit sur une suite bornée, faiblement convergente vers 0, dont aucune sous-suite n'est de Banach-Saks :

Proposition 3 : Si la suite x_n , bornée et faiblement convergente vers 0 n'a aucune sous-suite de Banach-Saks, la base (e_n) du modèle étalé F

est équivalente à la base canonique de ℓ^1 .

Démonstration : D'après le lemme 2, la suite (e_n) est une base inconditionnelle de F ; il résulte alors du lemme 3 que l'on peut trouver un nombre $\delta' > 0$ tel que $\forall n, \forall \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = \pm 1$, on ait

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k e_k \right| \geq \delta' .$$

Nous allons voir que l'on peut en déduire, pour toute suite finie de scalaires (c_i) :

$$\left| \sum c_i e_i \right| \geq \delta' \sum |c_i| .$$

Il suffit de le faire pour des c_i rationnels, et donc pour des c_i entiers. Soient donc $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k = \pm 1$; on a :

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon_1 p_1 e_1 + \dots + \varepsilon_k p_k e_k \right| &\geq \left| \varepsilon_1 (e_1 + \dots + e_{p_1}) + \varepsilon_2 (e_{p_1+1} + \dots + e_{p_1+p_2}) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_k (e_{p_1+\dots+p_{k-1}+1} + \dots + e_{p_1+\dots+p_k}) \right| \\ &\geq \delta' (p_1 + p_2 + \dots + p_k) , \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Considérons maintenant la propriété suivante d'une suite bornée (x_n) dans E , analogue à "non-Banach-Saks" :

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{On peut trouver un nombre } \delta > 0 \text{ tel que, pour toute sous-suite} \\ \text{(y}_n \text{) de (x}_n \text{), pour tout n, tout choix de } \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = \pm 1, \text{ on ait} \\ \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i \right\| > \delta . \end{array} \right.$$

Il est clair que la suite (e_n) , dans F , possède la même propriété : on a, pour tout n et tout choix de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i \right| > \delta .$$

Une démonstration analogue à celle du théorème précédent montre alors que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la base canonique de ℓ^1 . Nous avons donc obtenu :

Proposition 4 : Si la suite bornée (x_n) possède la propriété (P_1) , la base (e_n) de modèle étalé F est équivalente à la base canonique de ℓ^1 .

Nous allons maintenant étudier les réciproques : comment caractériser sur la suite de départ (x_n) le fait que (e_n) soit équivalente à la base canonique de ℓ^1 dans F ? Il est clair que la caractérisation ne peut porter sur la suite (x_n) tout entière, mais, au mieux, sur la bonne sous-suite (e_n) dans E , ou, plus vraisemblablement, sur une sous-suite de celle-ci. En outre, comme nous chercherons à améliorer certaines estimations, nous serons conduits à prendre des blocs de la suite (e_n) :

Proposition 5 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans E , $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une bonne sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, F le modèle étalé construit sur $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente, dans F , à la base canonique de ℓ^1 , on peut trouver, pour tout nombre $\eta > 0$, une sous-suite $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'une suite de blocs sur la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que :

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} \forall k, \text{ si } k \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{2^k}, \text{ on a, pour toute suite de scalaires} \\ c_1, \dots, c_{2^k} : \\ (1 - \eta) \sum_1^{2^k} |c_i| \leq \left\| \sum_1^{2^k} c_i e'_{n_i} \right\| \leq (1 + \eta) \sum_1^{2^k} |c_i| . \end{array} \right.$$

Démonstration : Par hypothèse, les (e_n) vérifient :

$$m \sum |c_i| \leq \left| \sum c_i e_i \right| \leq M \sum |c_i| .$$

Nous allons commencer par améliorer ces estimations, au moyen d'un procédé dû à R.C. James. C'est ici particulièrement facile, car la norme de F est invariante par étalement sur la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Posons $K = \inf \{ \left| \sum \alpha_i e_i \right|, \sum |\alpha_i| = 1 \}$. On a $K \geq m$. Soit $\eta > 0$,

et choisissons $f_1 = \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i^0 e_i$, combinaison linéaire finie des e_i , avec

$\sum_1^{n_0} |\alpha_i^0| = 1$, et $K \leq |f_1| \leq K(1 + \frac{\eta}{4})$. Puisque la norme est invariante par

étalement, on a aussi :

$$K = \inf \left\{ \left| \sum_{i > n_0} \alpha_i e_i \right|, \sum |\alpha_i| = 1 \right\}$$

et ainsi de suite : $f_k = \sum_{i=0}^{n_0} \alpha_i^0 e^{(k-1)n_0+i}$ vérifie

$$K \leq |f_k| \leq K(1 + \frac{\eta}{4}) .$$

Si (c_i) est une suite finie de scalaires avec $\sum |c_i| = 1$, on aura

$$K \leq |\sum c_i f_i| \leq K(1 + \frac{\eta}{4}) .$$

Notons $f'_i = \frac{f_i}{K}$; on aura, pour toute suite finie de scalaires (c_i) :

$$\sum |c_i| \leq |\sum c_i f'_i| \leq (1 + \frac{\eta}{4}) \sum |c_i| .$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Choisissons un $\frac{\eta}{8}$ -net dans la sphère unité de $\ell^1_{(2^k)}$, c'est-à-dire une suite finie $(c_1^{(\ell)}, \dots, c_{2^k}^{(\ell)})_{\ell=1 \dots L}$ de 2^k -uples scalaires, avec $\sum_{i=1}^{2^k} |c_i^{(\ell)}| = 1 \forall \ell$, telle que tout élément de la sphère unité de $\ell^1_{(2^k)}$ se trouve à distance au plus égale à $\frac{\eta}{8}$ de l'un des $(c_i^{(\ell)})_{\ell=1 \dots L}$.

On peut trouver un entier ν_k tel que si

$$\nu_k \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{2^k} ,$$

on ait, pour $\ell = 1, \dots, L$:

$$| \left\| \sum_{i=1}^{2^k} c_i^{(\ell)} f'_{n_i} \right\| - \left| \sum_{i=1}^{2^k} c_i^{(\ell)} f'_i \right| | < \frac{\eta}{8}$$

(car la somme $\sum_{i=1}^{2^k} c_i^{(\ell)} f'_{n_i}$ "commence" à $(n_1 - 1)n_0 + 1 \geq \nu_k$) et donc :

$$1 - \frac{\eta}{8} \leq \left\| \sum_{i=1}^{2^k} c_i^{(\ell)} f'_{n_i} \right\| \leq 1 + \frac{3\eta}{8} .$$

D'où l'on déduit, pour toute suite finie de scalaires $(c_i)_{i=1 \dots 2^k}$ avec $\sum_{i=1}^{2^k} |c_i| = 1$,

$$1 - \frac{3\eta}{8} \leq \left\| \sum_{i=1}^{2^k} c_i f'_{n_i} \right\| \leq 1 + \frac{5\eta}{8} .$$

Il suffit donc de choisir la suite $e'_k = f'_{\nu_k}$ pour établir le théorème : on aura, pour tout k , pour toute suite $c_1 \dots c_{2^k}$ de scalaires, pour tous $n_1 \dots n_{2^k}$ avec $k \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{2^k}$:

$$\left(1 - \frac{3\eta}{8}\right) \sum_i^{2^k} |c_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{2^k} c_i e'_{n_i} \right\| \leq \left(1 + \frac{5\eta}{8}\right) \sum_i^{2^k} |c_i| .$$

Remarque : Si on ne souhaite pas améliorer les estimations pour obtenir des ℓ^1 (2^k) presque isométriques, il n'est pas nécessaire de prendre des blocs des (e_n) : on obtient le résultat, pour un certain $\delta > 0$ (au lieu de $1 - \eta$), sur une sous-suite de la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$: c'est le résultat démontré par H.P. Rosenthal dans [11].

Nous allons maintenant étudier la réciproque du théorème 3 :

Proposition 6 : Soit x_n une suite bornée de points dans E . Si la bonne sous-suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la base canonique de ℓ^1 dans F , on peut, pour tout $\eta > 0$, trouver une suite de blocs sur la suite (e_n) , notée (e'_n) , avec, pour tout n , $\|e'_n\| \leq 1 + \eta$, possédant la propriété (P_1) avec δ remplacé par $1 - \eta$.

Démonstration : Les f'_i sont ceux construits précédemment. Ils vérifient donc

$$\sum |c_i| \leq \left| \sum c_i f'_i \right| \leq \left(1 + \frac{\eta}{4}\right) \sum |c_i| .$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Choisissons l'entier ν_k de telle façon que si $\nu_k \leq n_1 < \dots < n_{2^k}$, on ait, si $\varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_{2^k}$ valent $-1, 0$ ou $+1$ (non tous nuls),

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^{2^k} \varepsilon'_i f'_{n_i} \right\| - \left| \sum_{i=1}^{2^k} \varepsilon'_i f'_i \right| \right| \leq \frac{\eta}{8} \sum_{i=1}^{2^k} |\varepsilon'_i| .$$

On aura donc :

$$\left\| \sum_{i=1}^{2^k} \varepsilon'_i f'_{n_i} \right\| \geq \left(1 - \frac{\eta}{8}\right) \sum_{i=1}^{2^k} |\varepsilon'_i| .$$

Pour simplifier les notations, nous prendrons η sous la forme $\eta = \frac{1}{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}$. La sous-suite cherchée des f'_i sera

$$e'_n = f'_{\nu_{2^{\alpha n}}} .$$

Considérons en effet une somme $\frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_j e'_j$, avec $\varepsilon_j = \pm 1$. On a, en posant $n' = \lfloor \frac{1}{2\alpha} \log_2(n) \rfloor$,

$$\sum_1^n \varepsilon_j e'_j = \sum_1^{n'} \varepsilon_j e'_j + \sum_{n'+1}^n \varepsilon_j e'_j .$$

La seconde somme contient moins de n termes, qui sont placés après l'entier $\nu_{2^{2\alpha(n')}} \geq \nu_n$ et donc :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} \sum_{n'+1}^n \varepsilon_j e'_j \right\| &\geq (1 - \frac{\eta}{8}) \frac{n - n'}{n} \\ &\geq (1 - \frac{\eta}{8}) \frac{n - \frac{1}{2\alpha} \log_2(n)}{n} . \end{aligned}$$

Pour la première, on a la majoration

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} \sum_1^{n'} \varepsilon_j e'_j \right\| &\leq \frac{1}{n} n' \\ &\leq \frac{1}{2\alpha n} \log_2(n) . \end{aligned}$$

Finalemnt

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_j e'_j \right\| \geq (1 - \frac{\eta}{8}) (1 - \frac{1}{2\alpha n} \log_2(n)) - \frac{1}{2\alpha n} \log_2(n) .$$

Mais

$$(1 - \frac{\eta}{8}) (1 - \frac{\eta}{2n} \log_2(n)) - \frac{\eta}{2n} \log_2(n) \geq 1 - \eta \quad \forall n ,$$

comme on vérifie aisément. Ce calcul vaut a foriori pour les sous-suites de e'_n , ce qui démontre le théorème.

Remarquons enfin qu'il est clair que la propriété (P_2) implique (P_1) : si $n \in \mathbb{N}$, on a, si (e'_n) possède (P_2) :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_i e'_i \right\| &\geq \left\| \frac{1}{n} \sum_{[\log_2(n)]}^n \varepsilon_i e'_i \right\| - \frac{1}{n} \log_2(n) (1 + \eta) \\ &\geq \frac{1}{n} (1 - \eta) (n - \log_2(n)) - \frac{1+\eta}{n} \log_2(n) \\ &\geq 1 - \eta - \frac{2 \log_2(n)}{n} . \end{aligned}$$

Pour $n \geq 5$, on a : $\frac{2 \log_2 n}{n} \leq \frac{2 \log_2 5}{5} > 0$, et donc, si η a été choisi assez petit :

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_i e'_i \right\| \geq \delta > 0 .$$

Pour $n = 1$, la propriété est claire. Pour $n = 2$, elle résulte de (P_2) .
 Pour $n = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left\| \varepsilon_1 e'_{n_1} + \varepsilon_2 e'_{n_2} + \varepsilon_3 e'_{n_3} \right\| &\geq \frac{1}{3} \left\| \varepsilon_2 e'_{n_2} + \varepsilon_3 e'_{n_3} \right\| - \frac{1+\eta}{3} \\ &\geq \frac{2}{3}(1-\eta) - \frac{1+\eta}{3} > 0 \end{aligned}$$

si η a été choisi assez petit.

Pour $n = 4$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left\| \varepsilon_1 e'_{n_1} + \varepsilon_2 e'_{n_2} + \varepsilon_3 e'_{n_3} + \varepsilon_4 e'_{n_4} \right\| \\ \geq \frac{3}{4} \left\| \frac{1}{3} (\varepsilon_2 e'_{n_2} + \varepsilon_3 e'_{n_3} + \varepsilon_4 e'_{n_4}) \right\| - \frac{1}{4} (1+\eta) \\ > 0 \text{ pour } \eta \text{ assez petit.} \end{aligned}$$

En résumé, nous avons obtenu :

Théorème 1 : a) Soit E un espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{cases} (P_2) \left\{ \begin{array}{l} - E \text{ admet } \ell^1 \text{ pour modèle étalé.} \\ - \text{ Pour tout } \eta > 0, \text{ il existe dans } E \text{ une suite } (e'_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ telle} \\ \text{ que } \forall k, k \leq n_1 < \dots < n_k, \forall c_1 \dots c_k \text{ scalaires,} \\ (1-\eta) \sum_1^{2^k} |c_i| \leq \left\| \sum_1^{2^k} c_i e'_{n_i} \right\| \leq (1+\eta) \sum_1^{2^k} |c_i| . \end{array} \right. \\ (P_1) \left\{ \begin{array}{l} - \text{ Pour tout } \eta > 0, \text{ il existe dans } E \text{ une suite } (e'_n) \text{ telle que} \\ \forall k, \forall \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k = \pm 1, \forall n_1 < n_2 < \dots < n_k , \\ 1 - \eta \leq \left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i e'_{n_i} \right\| \leq 1 + \eta . \end{array} \right. \end{cases}$$

b) Ces conditions sont satisfaites s'il existe dans E une suite (x_n) tendant faiblement vers 0 dont aucune sous-suite n'est

de Banach-Saks ; les suites (e'_n) vérifiant (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) tendent alors faiblement vers 0.

Corollaire : Si E est réflexif et ne contient pas ℓ_n^1 uniformément, E a la propriété de Banach-Saks. C'est le cas en particulier si E est super-réflexif.

En effet, on pourrait sinon trouver une suite tendant faiblement vers 0 vérifiant (\mathcal{P}_2) : E contient alors ℓ_n^1 uniformément.

Remarque : La propriété (\mathcal{P}_1) est strictement plus faible que le fait de contenir ℓ^1 , et strictement plus forte que le fait de contenir ℓ_n^1 uniformément.

Nous allons maintenant introduire une nouvelle version de la propriété de Banach-Saks et examiner ses liens avec la propriété usuelle. Cette définition a été introduite par H.P. Rosenthal dans [11].

Nous dirons que E a la propriété de Banach-Saks-Rosenthal (en abrégé B.S.R.) si de toute suite faiblement convergente vers 0 on peut extraire une sous-suite dont les sommes de Césaro convergent. Les remarques suivantes sont claires :

- la propriété B.S. implique B.S.R.
- Si E n'a pas B.S.R., les trois conditions équivalentes du théorème 1, a) sont satisfaites.
- Si E est réflexif, B.S. et B.S.R. sont équivalentes.
- Si E ne contient pas ℓ_n^1 uniformément, E a B.S.R.
- L'espace ℓ^1 a B.S.R. (puisque toute suite faiblement convergente vers 0 y est convergente en norme).

Nous allons voir une classe d'espaces pour lesquels les trois propriétés du théorème 1 a) caractérisent non-B.S.R.

Proposition 7 : Pour les espaces ne contenant pas ℓ^1 , les propriétés B.S.R. et non- (\mathcal{P}_1) sont équivalentes.

Démonstration : Nous avons vu que dans tous les espaces, si B.S.R. fait défaut, (\mathcal{P}_1) est satisfaite. Inversement, supposons (\mathcal{P}_1) satisfaite par une suite (e_n) . Si E ne contient pas ℓ^1 , la suite (e_n) contient, d'après un résultat de H.P. Rosenthal [10], une sous-suite de Cauchy faible : pour tout $\xi \in E'$, la limite $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi(e_{n_k})$ existe, si e_{n_k} est

cette sous-suite. Il en résulte que $\frac{1}{2}(e_{n_{2k-1}} - e_{n_{2k}}) \rightarrow 0$ faiblement ; on pose $e'_k = \frac{1}{2}(e_{n_{2k-1}} - e_{n_{2k}})$. La suite e_{n_k} vérifiait encore (\mathcal{P}_1) , donc e'_k vérifie aussi (\mathcal{P}_1) , puisque

$$1 + \eta \geq \left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i e'_i \right\| = \left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i \frac{1}{2}(e_{n_{2i-1}} - e_{n_{2i}}) \right\| \geq 1 - \eta \quad ,$$

ainsi que pour toutes les sous-suites de e'_i . Nous allons voir que la suite e'_i n'est pas de Banach-Saks ; le raisonnement vaudra aussi pour les sous-suites. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_1^k e'_i - \frac{1}{2k} \sum_1^{2k} e'_i \right\| = \left\| \frac{1}{2k} \left(\sum_1^k e'_i - \sum_{k+1}^{2k} e'_i \right) \right\|$$

et les sommes $\frac{1}{k} \sum_1^k e'_i$ ne peuvent donc converger fortement lorsque $k \rightarrow +\infty$.

La propriété (\mathcal{P}_1) occupe entre "contenir ℓ^1 " et "contenir ℓ^1_n uniformément" une place analogue à B.S. entre "réflexif" et "super-réflexif". C'est cette propriété qui nous sera utile à l'exposé V pour obtenir des théorèmes de factorisation.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Baernstein, On reflexivity and summability, *Studia Math.* 42, p. 91-94 (1972).
- [2] B. Beauzamy, Espaces de Banach uniformément convexifiables, Exposés XIII et XIV, Séminaire Maurey-Schwartz 1973/74, Ecole Polytechnique, Paris.
- [3] B. Beauzamy, Opérateurs uniformément convexifiants, *Studia Math.* 57, 2, p. 103-159 (1976).
- [4] A. Brunel, Espaces associés à une suite bornée dans un espace de Banach, Exposés Nos XV, XVI et XVIII, Séminaire Maurey-Schwartz 1973/74, Ecole Polytechnique, Paris.
- [5] A. Brunel et L. Sucheston, On B-convex spaces, *Math. System Theory*, vol. 7.
- [6] P. Erdős et M. Magidor, A note on regular methods of summability and the Banach-Saks property, *Proc. of the A.M.S.*, 59, 2 (1976).

- [7] F. Galvin et K. Prikry, Borel sets and Ramsey's theorem, J. of Symbolic logic, 38, p. 193-198 (1973).
- [8] R.C. James, Weak compactness and reflexivity, Israel J. of Maths. 2, p. 101-119 (1964).
- [9] S. Kakutani, Weak convergence in uniformly convex Banach spaces, Tohoku Math. J. 45, p. 188-193 (1938).
- [10] H.P. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing ℓ_1 , Proceedings N.A.S. des U.S.A., vol. 71, 6, p. 2411-2413. (June 1974).
- [11] H.P. Rosenthal, Weakly independent sequences and the Banach-Saks property, Proceedings of the Durham Symposium on the relations between infinite dimensional and finite-dimensional convexity, (July 1975).
