

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C. SAMUEL

**Exemples d'espaces de Banach ayant la propriété de projection uniforme**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1977-1978), exp. n° 27, p. 1-15

[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1977-1978\\_\\_A21\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978__A21_0)

© Séminaire Maurey-Schwartz  
(École Polytechnique), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L A   G E O M E T R I E  
D E S   E S P A C E S   D E   B A N A C H  
1977-1978

-----  
EXEMPLES D'ESPACES DE BANACH AYANT LA PROPRIÉTÉ  
-----  
DE PROJECTION UNIFORME  
-----

C. SAMUEL  
(U.E.R. de Marseille-Luminy)



## 1- Introduction

La propriété d'approximation uniforme a été introduite par A. Pełczyński et H.P. Rosenthal (cf [3]).

### Définition

Un espace de Banach  $X$  a la  $\lambda$ -propriété d'approximation uniforme si pour tout entier  $k$  il existe un entier  $N(k)$  tel que pour tout sous-espace  $E$  de  $X$  de dimension  $k$  il existe une application linéaire continue  $T : X \rightarrow X$  telle que  $\dim T(X) \leq N(k)$ ,  $\|T\| \leq \lambda$  et pour tout  $x \in E$ ,  $T(x) = x$ . Si de plus  $T$  peut être choisie parmi les projections de  $X$ , on dit que  $X$  a la  $\lambda$ -propriété de projection uniforme. Un espace de Banach  $X$  a la propriété d'approximation uniforme (resp. de projection uniforme) s'il a la  $\lambda$ -propriété d'approximation uniforme (resp.  $\lambda$ -propriété de projection uniforme) pour un réel  $\lambda$  convenable.

Dans [3] il est montré que tous les espaces  $\mathcal{L}_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) ont la propriété de projection uniforme et dans [2], J. Lindenstrauss et L. Tzafriri montrent que tout espace d'Orlicz réflexif a la  $(1 + \epsilon)$ -propriété d'approximation uniforme pour tout réel  $\epsilon > 0$ .

Rappelons que si  $X$  est un espace de Banach et  $q \in [1, \infty]$ ,  $(X \oplus X \oplus \dots)_q$  note l'ensemble des suites  $x = (x_i)_i$  d'éléments de  $X$  telles que  $(\|x_i\|)_i \in \ell_q$ , muni de la norme  $\|(x_i)_i\| = \|(\|x_i\|)_i\|$ .

Dans ce travail, nous démontrons que, pour tout réel  $\epsilon > 0$ , les espaces  $(L_p \oplus L_p \oplus \dots)_q$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  et  $1 \leq q \leq \infty$ , ont la  $(1 + \epsilon)$ -propriété de projection

uniforme. De ce résultat il est alors facile de déduire que, pour tout réel  $\epsilon > 0$ , les espaces  $(\ell_p \oplus \ell_p \oplus \dots)_q$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  et  $1 \leq q \leq \infty$ , ont la  $(1 + \epsilon)$ -propriété d'approximation uniforme.

2- La propriété de projection uniforme des espaces  $(L_p \oplus L_p \oplus \dots)_q$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  et  $1 \leq q \leq \infty$ .

On note pour chaque entier  $n$ ,  $I_n = [n-1, n]$ ; on note  $L_p(I_n)$  l'espace de Banach des classes de fonctions numériques Borel-mesurables sur  $I_n$  et de puissance  $p$ ème intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue. On note  $L_p = L_p([0, 1])$ .

Théorème: Pour tout réel  $\epsilon > 0$ , pour tout  $1 \leq p \leq \infty$  et pour tout  $1 \leq q \leq \infty$  l'espace  $(L_p \oplus L_p \oplus \dots)_q$  a la  $(1 + \epsilon)$ -propriété de projection uniforme.

Fixons  $1 \leq p < \infty$  et  $1 \leq q < \infty$ ; le cas  $p = \infty$  ou  $q = \infty$  se traite de la même façon avec des modifications évidentes. Nous identifions isométriquement  $(L_p \oplus L_p \oplus \dots)_q$  avec :

$$E_{p,q} = \left\{ f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}; \forall n, f \in L_p(I_n) \text{ et } \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{I_n} |f(t)|^p dt \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

$$\text{muni de la norme } \|f\| = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{I_n} |f(t)|^p dt \right)^{q/p} \right)^{1/q}.$$

Si  $f \in E_{p,q}$  on définit, à un ensemble de mesure nulle près, le support de  $f$  :

$$S(f) = \{ t \in [0, \infty[; f(t) \neq 0 \}$$

Avant de prouver le théorème nous allons tout d'abord démontrer par récurrence que :

- Pour tout réel  $\epsilon > 0$  et pour tout entier  $k$  il existe un entier  $N(\epsilon, k)$  tel que si  $X_1, \dots, X_k$  sont des éléments de  $E_{p,q}$  dont les supports sont disjoints à un ensemble de mesure nulle près, alors il existe  $P : E_{p,q} \rightarrow E_{p,q}$  une projection qui a les propriétés suivantes :
- (R) {
- 1) pour tout  $f \in E_{p,q}$ ,  $S(P(f)) \subset \bigcup_{i=1}^k S(X_i)$ .
  - 2) pour tout  $f \in E_{p,q}$ ,  $\|P(f)\| \leq (1 + \epsilon) \|f\|_{\bigcup_{i=1}^k S(X_i)}$ .
  - 3) pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq k \Rightarrow \|P(X_i) - X_i\| \leq \epsilon \|X_i\|$ .
  - 4)  $\dim \text{Im}(P) \leq N(\epsilon, k)$ .

Le résultat est évident si  $k = 1$ , supposons-le établi jusqu'au rang  $k = m$ . Donnons-nous  $X_1, \dots, X_{m+1}$  des éléments normalisés de  $E_{p,q}$  dont les supports sont disjoints à un ensemble de mesure nulle près et donnons-nous un réel  $\epsilon > 0$ . Pour chaque entier  $n$  et  $1 \leq i \leq m+1$ , notons :

$$a_{n,i} = \left( \int_{I_n} |X_i(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Soit  $N$  le plus petit entier tel que  $N \geq \left( \frac{2m}{\epsilon} \right)^p$  et  $\left( 1 + \frac{1}{N} \right)^{\frac{1+q}{p}} \leq 1 + \epsilon$

Soit  $L_1, \dots, L_p$  une énumération des intervalles :

$$L_1 = \left[ 0, \frac{1}{N} \right], L_2 = \left[ \frac{1}{N}, \frac{1}{N-1 + \frac{N-1}{N}} \right], \dots,$$

$$\left[ \frac{1}{r + \frac{k}{N}}, \frac{1}{r + \frac{k-1}{N}} \right], r = 1, \dots, N-1 \text{ et } k = 1, \dots, N, \dots, \{1\}, \dots,$$

$$\left] r' + \frac{k'-1}{N}, r' + \frac{k'}{N} \right], r' = 1, \dots, N-1 \text{ et } k' = 1, \dots, N, \dots, L_{p-1} = \left] N-1 + \frac{N-1}{N}, N \right]$$

$$\text{et } L_p = ]N, \infty[.$$

On convient de noter  $\frac{0}{0} = 1$  et  $\frac{a}{0} = \infty$  si  $a \neq 0$ . Pour chaque m-uple d'entiers  $\{i_1, \dots, i_m\}$  appartenant à  $\{1, \dots, P\}$  on note :

$$A_{i_1, \dots, i_m} = \left\{ n ; \left( \frac{a_{n,1}}{a_{n,m+1}} \right)^p \in L_{i_1} \text{ et } \dots \text{ et } \left( \frac{a_{n,m}}{a_{n,m+1}} \right)^p \in L_{i_m} \right\} .$$

Fixons  $\{i_1, \dots, i_m\}$  un m-uple d'entiers appartenant à  $\{1, \dots, P\}$  .

Pour  $\ell = 1, \dots, m+1$  notons  $X_{\ell, i_1, \dots, i_m}$  l'élément de  $E_{p,q}$  défini par la relation :

$$\text{pour tout } t \in [0, \infty[ , X_{\ell, i_1, \dots, i_m}(t) = \begin{cases} X_{\ell}(t) & \text{si } t \in \bigcup_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} I_n \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Nous allons définir  $P_{i_1, \dots, i_m}$  et pour cela nous examinons plusieurs cas :

1er cas :  $A_{i_1, \dots, i_m} = \emptyset$ , on pose alors  $P_{i_1, \dots, i_m} = 0$  .

2° cas : l'un des entiers  $i_1, \dots, i_m$  est égal à 1 ; supposons pour fixer les idées que :

$$(1) \quad n \in A_{i_1, \dots, i_m} \Rightarrow \left( \frac{a_{n,1}}{a_{n,m+1}} \right)^p < \frac{1}{N} .$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence à

$$X_{2, i_1, \dots, i_m}, \dots, X_{m+1, i_1, \dots, i_m} \text{ et } \epsilon/2 ;$$

notons  $P_{i_1, \dots, i_m}$  une projection vérifiant (R) et remarquons que (1) entraîne :

$$\|X_{1, i_1, \dots, i_m}\| < \frac{1}{N^{1/p}} \|X_{m+1, i_1, \dots, i_m}\| .$$

3° cas: l'un des entiers  $i_1, \dots, i_m$  est égal à  $P$ ; supposons pour fixer les idées que

$$(2) \quad n \in A_{i_1, \dots, i_m} \Rightarrow \left( \frac{a_{n,1}}{a_{n,m+1}} \right)^p > N.$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence à

$$X_{1, i_1, \dots, i_m}, \dots, X_{m, i_1, \dots, i_m} \text{ et } \epsilon/2; \text{ notons}$$

$P_{i_1, \dots, i_m}$  une projection vérifiant (R) et remarquons que (2)

entraîne

$$\|X_{m+1, i_1, \dots, i_m}\| < \frac{1}{N^{1/p}} \|X_{1, i_1, \dots, i_m}\|$$

4° cas: pour  $\ell = 1, \dots, m$ ,  $\frac{1}{N} \leq \left( \frac{a_{n,\ell}}{a_{n,m+1}} \right)^p \leq N$ . On ne perd pas de la

généralité en supposant qu'il existe deux entiers  $1 \leq i \leq j \leq m$  tels que

$$\frac{1}{N} \leq \left( \frac{a_{n,i}}{a_{n,m+1}} \right)^p, \dots, \left( \frac{a_{n,i}}{a_{n,m+1}} \right)^p < 1,$$

$$1 < \left( \frac{a_{n,i+1}}{a_{n,m+1}} \right)^p, \dots, \left( \frac{a_{n,j}}{a_{n,m+1}} \right)^p \leq N,$$

et 
$$1 = \frac{a_{n,i+1}}{a_{n,m+1}} = \dots = \frac{a_{n,m}}{a_{n,m+1}}.$$

On peut alors trouver des entiers  $r_1, \dots, r_j \in \{1, \dots, N-1\}$  et des entiers  $k_1, \dots, k_j \in \{1, \dots, N\}$  tels que :

$$(3) \quad \text{pour tout } \ell, 1 \leq \ell \leq i \Rightarrow r_\ell + \frac{k_\ell - 1}{N} < \left( \frac{a_{n,m+1}}{a_{n,\ell}} \right)^p \leq r_\ell + \frac{k_\ell}{N}.$$



$$(4) \quad \text{pour tout } \ell', i+1 \leq \ell' \leq J \Rightarrow r_{\ell'} + \frac{k_{\ell'-1}}{N} < \left( \frac{a_{n,\ell'}}{a_{n,m+1}} \right)^p \leq r_{\ell'} + \frac{k_{\ell'}}{N}.$$

Notons  $D = \prod_{\ell=1}^i (r_{\ell} N + k_{\ell} - 1)$ ; pour  $1 \leq \ell \leq i$  notons  $D_{\ell} = \frac{D}{r_{\ell} N + k_{\ell} - 1}$

et pour  $i+1 \leq \ell' \leq J$  notons  $D^{\ell'} = D(r_{\ell'}, N + k_{\ell'} - 1)$ . Avec ces notations (3) et

(4) entraînent alors

$$(5) \quad \text{pour tout } \ell, 1 \leq \ell \leq i \Rightarrow \frac{(a_{n,\ell})^p}{N^2 D_{\ell}} < \frac{(a_{n,m+1})^p}{ND} \leq \left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{(a_{n,\ell})^p}{N^2 D_{\ell}}$$

$$(6) \quad \text{pour tout } \ell', i+1 \leq \ell' \leq J \Rightarrow \frac{(a_{n,m+1})^p}{ND} < \frac{(a_{n,\ell'})^p}{D^{\ell'}} \leq \left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{(a_{n,m+1})^p}{ND}$$

Fixons  $\ell \in \{1, \dots, i\}$  (resp.  $\ell' \in \{i+1, \dots, J\}$ ), on peut trouver pour

$r = 1, 2, \dots, N^2 D_{\ell}$ , (resp.  $r' = 1, 2, \dots, D^{\ell'}$ ) des éléments  $X_{\ell}^r$  (resp.  $X_{\ell'}^{r'}$ )

appartenant à  $E_{p,q}$ , dont les supports sont deux à deux disjoints, tels que :

$$(7_{\ell}) \quad \text{pour tout } r = 1, 2, \dots, N^2 D_{\ell} \text{ et pour tout } n \in A_{i_1, \dots, i_m},$$

$$\|X_{\ell}^r\|_{I_n}^p = \frac{(a_{n,\ell})^p}{N^2 D_{\ell}}.$$

$$(7_{\ell'}) \quad \text{pour tout } r' = 1, 2, \dots, D^{\ell'} \text{ et pour tout } n \in A_{i_1, \dots, i_m},$$

$$\|X_{\ell'}^{r'}\|_{I_n}^p = \frac{(a_{n,\ell'})^p}{D^{\ell'}}.$$

$$(8_{\ell}) \quad \sum_{r=1}^{N^2 D_{\ell}} X_{\ell}^r = X_{\ell, i_1, \dots, i_m}.$$

$$(8_{\ell'}) \quad \sum_{r'=1}^{D^{\ell'}} X_{\ell'}^{r'} = X_{\ell', i_1, \dots, i_m}.$$

De même pour  $\ell'' \in \{j+1, \dots, m+1\}$  on peut trouver pour  $r'' = 1, 2, \dots, ND$  des éléments  $X_{\ell''}^{r''} \in E_{p,q}$  dont les supports sont deux à deux disjoints tels que :

(7 $_{\ell''}$ ) pour tout  $r'' = 1, 2, \dots, ND$  et pour tout  $n \in A_{i_1, \dots, i_m}$ ,

$$\|X_{\ell''}^{r''}\|_{I_n}^p = \frac{(a_{n, m+1})^p}{ND}$$

$$(8_{\ell''}) \quad \sum_{r''=1}^{ND} X_{\ell''}^{r''} = X_{\ell'', i_1, \dots, i_m}$$

Notons pour :

$$(9_{\ell'}) \quad \ell = 1, 2, \dots, i \quad \alpha_{\ell} = \frac{1}{(N^2 D_{\ell})^{1/p}} \left( \sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} (a_{n, \ell})^q \right)^{1/q}.$$

$$(9_{\ell'}) \quad \ell = i+1, \dots, j \quad \alpha_{\ell} = \frac{1}{(D^{\ell'})^{1/p}} \left( \sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} (a_{n, \ell})^q \right)^{1/q}.$$

$$(9_{\ell''}) \quad \ell'' = j+1, \dots, m+1 \quad \alpha_{\ell''} = \frac{1}{(ND)^{1/p}} \left( \sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} (a_{n, m+1})^q \right)^{1/q}.$$

Nous remarquons que (5) et (6) impliquent :

$$(10) \quad \text{pour } \ell = 1, 2, \dots, i \quad \alpha_{\ell} < \alpha_{m+1} \leq \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{p}} \alpha_{\ell}.$$

et (11) pour  $\ell' = i+1, \dots, J$   $\alpha_{m+1} < \alpha_{\ell'} \leq (1 + \frac{1}{N})^{\frac{1}{p}} \alpha_{m+1}$ .

Pour  $1 \leq i \leq m+1$  et  $t \in [0, \infty[$  on note  $\epsilon_i(t)$  le signe de  $X_i(t)$ . Donnons-nous  $f \in E_{p,q}$ .

Pour  $\ell = 1, 2, \dots, i$  et  $r = 1, 2, \dots, N^2 D_\ell$  on pose

$$\Phi_\ell^r(f) = \frac{1}{(\alpha_\ell)^q} \sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} \frac{(N^2 D_\ell)^{\frac{p-q}{p}}}{(a_{n,\ell})^{p-q}} \int_{I_n} |X_\ell^r(t)|^{p-1} \epsilon_\ell(t) f(t) dt,$$

pour  $\ell' = i+1, \dots, J$  et  $r' = 1, 2, \dots, D^{\ell'}$  on pose

$$\Phi_{\ell'}^{r'}(f) = \frac{1}{(\alpha_{\ell'})^q} \sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} \frac{(D^{\ell'})^{\frac{p-q}{p}}}{(a_{n,\ell'})^{p-q}} \int_{I_n} |X_{\ell'}^{r'}(t)|^{p-1} \epsilon_{\ell'}(t) f(t) dt,$$

et pour  $\ell'' = j+1, \dots, m+1$  et  $r'' = 1, 2, \dots, ND$  on pose

$$\Phi_{\ell''}^{r''}(f) = \frac{1}{(\alpha_{\ell''})^q} \sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} \frac{(ND)^{\frac{p-q}{p}}}{(a_{n,m+1})^{p-q}} \int_{I_n} |X_{\ell''}^{r''}(t)|^{p-1} \epsilon_{\ell''}(t) f(t) dt.$$

Il est immédiat de vérifier par une double application de l'inégalité de Hölder que les séries qui figurent au second membre sont absolument convergentes.

Notons alors :

$$P_{i_1, \dots, i_m}(f) = \sum_{\ell=1}^i \sum_{r=1}^{N^2 D_\ell} \Phi_\ell^r(f) X_\ell^r + \sum_{\ell'=i+1}^J \sum_{r'=1}^{D^{\ell'}} \Phi_{\ell'}^{r'}(f) X_{\ell'}^{r'} + \sum_{\ell''=j+1}^{m+1} \sum_{r''=1}^{ND} \Phi_{\ell''}^{r''}(f) X_{\ell''}^{r''}.$$

La disjonction des supports des fonctions  $X_{\ell}^r$ ,  $X_{\ell'}^{r'}$ ,  $X_{\ell''}^{r''}$ ,  $1 \leq \ell \leq i$  et .

$1 \leq r \leq N^2 D_{\ell}$ ,  $i + 1 \leq \ell' \leq J$  et  $1 \leq r' \leq D^{\ell'}$ ,  $J + 1 \leq \ell'' \leq m + 1$  et  $1 \leq r'' \leq ND$  montre que pour  $1 \leq k \leq m + 1$

$$P_{i_1, \dots, i_m} (X_{k, i_1, \dots, i_m}) = X_{k, i_1, \dots, i_m} .$$

Evaluons  $\|P_{i_1, \dots, i_m} (f)\|$  . Nous avons :

$$\|P_{i_1, \dots, i_m} (f)\|^q = \sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} \left[ \sum_{\ell=1}^i \sum_{r=1}^{N^2 D_{\ell}} |\Phi_{\ell}^r (f)|^p \frac{(a_{n, \ell})^p}{N^2 D_{\ell}} + \sum_{\ell'=i+1}^J \sum_{r'=1}^{D^{\ell'}} |\Phi_{\ell'}^{r'} (f)|^p \frac{(a_{n, \ell'})^p}{D^{\ell'}} \right. \\ \left. + \sum_{\ell''=J+1}^{m+1} \sum_{r''=1}^{ND} |\Phi_{\ell''}^{r''} (f)|^p \frac{(a_{n, m+1})^p}{ND} \right]^{q/p}$$

(5) et (6) impliquent alors :

$$(12) \quad \|P_{i_1, \dots, i_m} (f)\|^q \leq \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{\frac{q}{p}} \frac{1}{(ND)^{\frac{q}{p}}} \sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} (a_{n, m+1})^q \left[ \sum_{\ell=1}^i \sum_{r=1}^{N^2 D_{\ell}} |\Phi_{\ell}^r (f)|^p \right. \\ \left. + \sum_{\ell'=i+1}^J \sum_{r'=1}^{D^{\ell'}} |\Phi_{\ell'}^{r'} (f)|^p + \sum_{\ell''=J+1}^{m+1} \sum_{r''=1}^{ND} |\Phi_{\ell''}^{r''} (f)|^p \right]^{q/p}$$

Notons

$$\Theta = \left[ \sum_{\ell=1}^i \sum_{r=1}^{N^2 D_{\ell}} |\Phi_{\ell}^r (f)|^p + \sum_{\ell'=i+1}^J \sum_{r'=1}^{D^{\ell'}} |\Phi_{\ell'}^{r'} (f)|^p + \sum_{\ell''=J+1}^{m+1} \sum_{r''=1}^{ND} |\Phi_{\ell''}^{r''} (f)|^p \right]^{1/p}$$

et appliquons l'inégalité de Minkowski nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Theta \leq & \sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} \left[ \sum_{\ell=1}^i \frac{N^2 D_\ell}{(\alpha_\ell)^{pq}} \frac{(N^2 D_\ell)^{p-q}}{(a_{n, \ell})^{p^2-q}} \left| \int_{I_n} |X_\ell^r(t)|^{p-1} \varepsilon_\ell(t) f(t) dt \right|^p \right. \\ & + \sum_{\ell'=i+1}^J \frac{D^{\ell'}}{(\alpha_{\ell'})^{pq}} \frac{(D^{\ell'})^{p-q}}{(a_{n, \ell'})^{p^2-q}} \left| \int_{I_n} |X_{\ell'}^r(t)|^{p-1} \varepsilon_{\ell'}(t) f(t) dt \right|^p \\ & \left. + \sum_{\ell''=j+1}^{m+1} \frac{ND}{(\alpha_{\ell''})^{pq}} \frac{(ND)^{p-q}}{(a_{n, m+1})^{p^2-q}} \left| \int_{I_n} |X_{\ell''}^r(t)|^{p-1} \varepsilon_{\ell''}(t) f(t) dt \right|^p \right]^{1/p} \end{aligned}$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Hölder à chacune des intégrales figurant au second membre, d'après  $\gamma_\ell$ ,  $\gamma_{\ell'}$  et  $\gamma_{\ell''}$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Theta \leq & \sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} \left[ \sum_{\ell=1}^i \frac{1}{(\alpha_\ell)^{pq}} \left( \frac{(a_{n, \ell})^p}{N^2 D_\ell} \right)^{q-1} \int_{I_n \cap S(X_\ell)} |f(t)|^p dt \right. \\ & + \sum_{\ell'=i+1}^J \frac{1}{(\alpha_{\ell'})^{pq}} \left( \frac{(a_{n, \ell'})^p}{D^{\ell'}} \right)^{q-1} \int_{I_n \cap S(X_{\ell'})} |f(t)|^p dt \\ & \left. + \sum_{\ell''=j+1}^{m+1} \frac{1}{(\alpha_{\ell''})^{pq}} \left( \frac{(a_{n, m+1})^p}{ND} \right)^{q-1} \int_{I_n \cap S(X_{\ell''})} |f(t)|^p dt \right]^{1/p} . \end{aligned}$$

En utilisant (5), (6), (10) et (11) nous obtenons

$$\Theta \leq \frac{(1 + \frac{1}{N})^{q/p}}{(\alpha_{m+1})^q} \sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} \left( \frac{a_{n, m+1}}{(ND)^{1/p}} \right)^{q-1} \left( \int_{I_n \cap \bigcup_{k=1}^{m+1} S(X_k)} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

d'où en appliquant l'inégalité de Hölder :

$$\Theta \leq \frac{(1 + \frac{1}{N})^{q/p}}{\alpha_{m+1}} \left( \sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} \left( \int_{I_n \cap \bigcup_{k=1}^{m+1} S(X_k)} |f(t)|^p dt \right)^{q/p} \right)^{1/q}$$

Reportons cette dernière inégalité dans (12) nous obtenons alors :

$$\|P_{i_1, \dots, i_m}(f)\|^q \leq (1 + \frac{1}{N})^{\frac{q+q^2}{p}} \sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} \left( \int_{I_n \cap \bigcup_{k=1}^{m+1} S(X_k)} |f(t)|^p dt \right)^{q/p}.$$

L'application linéaire  $Q : E_{p, q} \rightarrow E_{p, q}$  définie pour tout  $f \in E_{p, q}$  par

$$Q(f) = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, P\}^m} P_{i_1, \dots, i_m}(f)$$

est une projection; nous allons établir qu'elle satisfait (R). Les propriétés (R-1) et (R-4) sont visiblement satisfaites. Notons :

$$\Lambda_1 = \{(i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, P\}^m \text{ tel que } A_{i_1, \dots, i_m} = \emptyset\},$$

$$\Lambda_2 = \{(i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, P\}^m \text{ tel que } 1 \in \{i_1, \dots, i_m\}\},$$

$$\Lambda_3 = \{(i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, P\}^m \text{ tel que } P \in \{i_1, \dots, i_m\}\},$$

et  $\Lambda_4 = \{1, \dots, P\}^m - (\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3).$

Donnons nous  $f \in E_{p,q}$  ; nous avons alors :

$$\|Q(f)\|^q = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4} \|P_{i_1, \dots, i_m}(f)\|^q \leq \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4} (1+\epsilon)^q \|f_{m+1} \big| \bigcup_{k=1}^{m+1} S(X_{k, i_1, \dots, i_m})\|^q$$

d'après la construction de  $P_{i_1, \dots, i_m}$  donc

$$\|Q(f)\| \leq (1+\epsilon) \|f_{m+1} \big| \bigcup_{k=1}^{m+1} S(X_k)\|$$

ce qui établit (R-2). Pour établir (R-3) fixons  $k \in \{1, \dots, m+1\}$ ; nous avons alors :

$$\|Q(X_k) - X_k\|^q = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4} \|P_{i_1, \dots, i_m}(X_k) - X_{k, i_1, \dots, i_m}\|^q.$$

Remarquons tout d'abord que, par construction, pour  $(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_4$

$$P_{i_1, \dots, i_m}(X_k) = X_{k, i_1, \dots, i_m}.$$

Deux cas sont à envisager :

1er cas :  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Par construction nous avons pour  $(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_3$

$$\|P_{i_1, \dots, i_m}(X_k) - X_{k, i_1, \dots, i_m}\| \leq \frac{\epsilon}{2} \|X_{k, i_1, \dots, i_m}\|,$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned}
 \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_2} \|P_{i_1, \dots, i_m}(X_k) - X_{k, i_1, \dots, i_m}\|^q &= \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_2 \\ i_k = 1}} \|P_{i_1, \dots, i_m}(X_k) - X_{k, i_1, \dots, i_m}\|^q \\
 &+ \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_2 \\ i_k \neq 1}} \|P_{i_1, \dots, i_m}(X_k) - X_{k, i_1, \dots, i_m}\|^q \\
 &\leq \frac{1}{N^{q/p}} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_2 \\ i_k = 1}} \|X_{m+1, i_1, \dots, i_m}\|^q \\
 &+ \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_2 \\ i_k \neq 1}} \|X_{k, i_1, \dots, i_m}\|^q
 \end{aligned}$$

donc  $\|Q(X_k) - X_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{N^{1/p}} \leq \varepsilon$  d'après le choix de  $N$ .

2° cas:  $k = m+1$ . Par construction nous avons pour  $(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_2$

$$\|P_{i_1, \dots, i_m}(X_{m+1}) - X_{m+1, i_1, \dots, i_m}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|X_{m+1, i_1, \dots, i_m}\| ;$$



Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_3} \|P_{i_1, \dots, i_m} (X_{m+1}) - X_{m+1, i_1, \dots, i_m}\|^q &\leq \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_3 \\ i_k = P}} \|P_{i_1, \dots, i_m} (X_{m+1}) - X_{m+1, i_1, \dots, i_m}\|^q \\ &\leq \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_3 \\ i_k = P}} \frac{1}{N^{q/p}} \|X_{k, i_1, \dots, i_m}\|^q \\ &\leq \frac{m}{N^{q/p}} . \end{aligned}$$

$$\text{donc } \|Q(X_{m+1}) - X_{m+1}\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{m}{N^{1/p}} \leq \epsilon \text{ d'après le choix de } N,$$

ce qui achève la démonstration par récurrence.

Le théorème se déduit alors de la propriété établie par récurrence, de la proposition 3 de [2] et des méthodes de perturbation (cf. lemme 2-4 de [1]) .

Puisque  $(\ell_p \oplus \ell_p \oplus \dots)_q$  est l'image d'une projection de norme 1 de

$(L_p \oplus L_p \oplus \dots)_q$  on a:

Corollaire : Pour tout réel  $\epsilon > 0$ , pour tout  $1 \leq p \leq \infty$  et pour tout  $1 \leq q \leq \infty$ ,

l'espace  $(\ell_p \oplus \ell_p \oplus \dots)_q$  a la  $(1+\epsilon)$ -propriété d'approximation uniforme.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. B. Johnson, H.P. Rosenthal et M. Zippin. On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces. Israel J. Math. 9. (1971) p. 488-506 .
- [2] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri. The uniform approximation property in Orlicz spaces. Israel J. Math. 23(1976) p. 142-155 .
- [3] A. Pełczyński et H. P. Rosenthal. Localization techniques in  $L^p$  spaces. Studia Math. 52 (1975) p. 263-289 .

(Ce texte doit paraître dans Colloquium Mathematicum.)

-----