F. Lust-Piquard

Propriétés géométriques des sous-espaces invariants par translation de $L^1(G)$ et $C(G)$

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 26, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978____A20_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L A   G E O M E T R I E

D E S   E S P A C E S   D E   B A N A C H

1977-1978

PROPRIETES GEOMETRIQUES DES SOUS-ESPACES INVARIANTS PAR TRANSLATION DE $L^1(G)$ et $C(G)$

F. LUST-PIQUARD

(Université d'Orsay)

Exposé No XXVI

2 Juin 1978

Soit G un groupe abélien compact, muni de sa mesure de Haar η. On note $L^1(G)$ l'espace $L^1(G, \eta)$, $L^\infty(G)$ son dual, $C(G)$ l'espace des fonctions continues sur G, $M(G)$ son dual.
Si Λ est un ensemble dans le groupe dual $\hat{G}$, si B est un sous-espace de $M(G)$, on note

$$B_\Lambda(G) = \{b \in B \mid \hat{b}(\gamma) = 0 \ \forall \gamma \in \hat{G} \setminus \Lambda\} .$$

Rappelons que tout sous-espace fermé invariant par translation de $L^1(G)$ ou $C(G)$ est de cette forme.

§ 1. LA PROPRIETE DE RADON-NIKODYM DANS LES SOUS-ESPACES INVARIANTS DE $L^1(G)$

Définition 1.1 [6] : Un espace de Banach B possède la propriété de Radon-Nykodym si tout opérateur linéaire continu

$$T : L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow B$$

(où μ est une mesure de probabilité) est représenté par une fonction fortement μ-mesurable et bornée, à valeurs dans B.

Théorème 1.1 : Soit Λ un ensemble dans un groupe discret $\hat{G}$. L'espace $L^1_\Lambda(G)$ possède la propriété de Radon-Nikodym si et seulement si $L^1_\Lambda(G) = M_\Lambda(G)$.

Démonstration : Vérifions d'abord que la condition est suffisante.
L'espace $L^1_\Lambda(G)$ possède la propriété de Radon-Nikodym dès que ses sous-espaces séparables la possèdent. Un tel sous-espace est inclus dans un $L^1_{\Lambda'}(G)$, où Λ' est un sous-ensemble dénombrable de Λ. Si $L^1_\Lambda(G) = M_\Lambda(G)$, tout espace $L^1_{\Lambda'}(G)$ est un dual séparable, donc a la propriété de Radon-Nikodym.

Réciproquement, considérons un élément $\mu \in M_\Lambda(G)$ comme un convoluteur de $L^1(G)$ dans $L^1_\Lambda(G)$:

$$\forall f \in L^1(G), \forall \theta \in C(G), \quad \langle \mu * f, \theta \rangle = \int_G f(g) \langle u * \delta_g, \theta \rangle \, dg .$$

Si $L^1_\Lambda(G)$ a la propriété de Radon-Nikodym, la fonction

$$g \rightsquigarrow \mu * \delta_g$$

est presque partout à valeurs dans $L^1_\Lambda(G)$, donc μ est dans $L^1_\Lambda(G)$.

<u>Définition 1.2</u> : Soit Λ un ensemble dans un groupe G discret. C'est un ensemble de Riesz si $L^1_\Lambda(G) = M_\Lambda(G)$.

<u>Théorème 1.2</u> : Le produit de deux ensembles de Riesz est un ensemble de Riesz. Plus précisément, si $L^1_{\Lambda_i}(G_i) = M_{\Lambda_i}(G_i)$ $(i=1,2)$, alors $L^1_{\Lambda_1\times\Lambda_2}(G_1\times G_2) = M_{\Lambda_1\times\Lambda_2}(G_1\times G_2)$.

<u>Démonstration</u> : On va vérifier les relations suivantes :

$$M_{\Lambda_1\times\Lambda_2}(G_1\times G_2) \subset M_{\Lambda_1\times\hat{G}_2}(G_1\times G_2) \cap M_{\hat{G}_1\times\Lambda_2}(G_1\times G_2)$$

$$(1) \qquad = M_{\Lambda_1}(G_1)\hat{\otimes} M(G_2) \cap M(G_1)\hat{\otimes} M_{\Lambda_2}(G_2)$$

$$= L^1_{\Lambda_1}(G_1)\hat{\otimes} M(G_2) \cap M(G_1)\hat{\otimes} L^1_{\Lambda_2}(G_2)$$

$$(2) \qquad \subset L^1(G_1\times G_2) \quad .$$

Pour tout Λ dans $\hat{G}_1$, l'espace $M_\Lambda(G_1)\hat{\otimes} M(G_2)$ est fermé dans $M_{\Lambda\times\hat{G}_2}(G_1\times G_2)$, sa boule unité est dense dans la boule unité de $M_{\Lambda\times\hat{G}_2}(G_1\times G_2)$ pour la topologie de la convergence simple sur les caractères de $G_1\times G_2$. Si Λ_1 est un ensemble de Riesz, $M_{\Lambda_1}(G_1)\hat{\otimes} M(G_2)$ est le dual de $(C(G_1)/C_{\Lambda_1^c}(G_1))\hat{\hat{\otimes}} C(G_2)$, sa boule unité est fermée pour la topologie de la convergence simple sur les caractères de $G_1\times G_2$. Ceci entraîne l'égalité (1). Pour obtenir l'égalité (2), il suffit de vérifier que l'orbite par $G_1\times G_2$ d'un élément μ dans $L^1_{\Lambda_1}(G_1)\hat{\otimes} M(G_2) \cap M(G_1)\hat{\otimes} L^1_{\Lambda_2}(G_2)$ est compacte pour la norme de $M(G_1\times G_2)$.

<u>§ 2. LA PROPRIETE DE RADON-NIKODYM DANS LES SOUS-ESPACES INVARIANTS DE C(G)</u>

<u>Théorème 2.1</u> : Soit Λ un ensemble dans un groupe discret $\hat{G}$. L'espace $C_\Lambda(G)$ possède la propriété de Radon-Nikodym si et seulement si $C_\Lambda(G) = L^\infty_\Lambda(G)$.

La démonstration est analogue à celle du théorème 1.1, en considérant tout élément f dans $L^\infty_\Lambda(G)$ comme convoluteur de $L^1(G)$ dans $C_\Lambda(G)$.

Définition 2.1 : Un ensemble Λ dans un groupe discret $\hat{G}$ est un ensemble de Rosenthal si $C_\Lambda(G) = L^\infty_\Lambda(G)$.

On peut construire des exemples d'ensembles de Rosenthal à l'aide du théorème suivant :

Théorème 2.2 : Soit Λ un ensemble dans un groupe discret $\hat{G}$. Supposons qu'il existe un homomorphisme $\hat{h}$, injectif, d'image dense, de $\hat{G}$ dans un groupe compact $\hat{H}$, envoyant Λ dans un compact dénombrable E de $\hat{H}$. Alors Λ est un ensemble de Rosenthal.

Démonstration : Notons $I(E) = \{f \in \ell^1(H) \mid \hat{f}(E) = 0\}$.
L'espace $I(E)^\perp \subset \ell^\infty(H)$ est un dual séparable, d'après un théorème de Loomis [3] ; il a donc la propriété de Radon-Nikodym. Soit h l'homorphisme (injectif, d'image dense) transposé de h, envoyant H dans G. L'espace $C_\Lambda(G)$ est fermé dans $\ell^\infty(h(H))$, et s'identifie à un sous-espace fermé de $I(E)^\perp$. Le théorème 2.1 s'applique donc.

Les hypothèses du théorème 2.2 sont vérifiées, par exemple, dans le cas suivant : soit α un irrationnel dans $[0,1]$, soit h l'homorphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ n &\rightsquigarrow e^{2i\pi n\alpha} . \end{aligned}$$

Soit $\Lambda = \{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{Z}$ une suite telle que $e^{2i\pi n_k \alpha} \longrightarrow 1$.

Pour terminer ce paragraphe, citons deux problèmes ouverts :

1. Le produit de deux ensembles de Rosenthal est-il un ensemble de Rosenthal ?

(Notons que $L^\infty_{\Lambda_1 \times \Lambda_2}(G_1 \times G_2)$ est le dual de $(L^1(G_1)/L^1_{\Lambda_1^c}(G_1)) \hat{\otimes} (L^1(G_2)/L^1_{\Lambda_2^c}(G_2))$.

2. Si G est un groupe abélien compact métrisable, si $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$ ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à ℓ^1, l'espace $C_\Lambda(G)$ a-t-il la propriété de Radon-Nikodim ?

(Un problème analogue se pose pour $L^1_\Lambda(G)$. Dans ce cas, la réponse est positive.)

§ 3. LA PROPRIETE "$C_\Lambda(G)$ NE CONTIENT PAS DE SOUS-ESPACE FERME ISOMORPHE A c_o"

(On dira, pour abréger, "$C_\Lambda(G)$ ne contient pas c_o". Il s'agit là d'une propriété plus faible que la propriété de Radon-Nikodym

Théroème 3.1 : Soit Λ un ensemble dans un groupe discret $\hat{G}$. Si $C_\Lambda(G)$ ne contient pas c_o, alors Λ est un ensemble de Riesz.

La réciproque de ce théorème est fausse. Par exemple $\mathbb{Z}^+$ est un ensemble de Riesz dans $\mathbb{Z}$, mais $C_{\mathbb{Z}^+}(\mathbb{T}) = A(D)$ contient c_o.

Démonstration : Considérons l'élément $\mu \in M(G)$ comme convoluteur de $C(G)$ dans $C_\Lambda(G)$. Si $C_\Lambda(G)$ ne contient pas c_o, μ est un convoluteur faiblement compact [5]. C'est aussi un convoluteur faiblement compact de $L^1(G)$ dans $L^1(G)$. D'après [6], il est représenté par une fonction fortement mesurable sur G, presque partout à valeurs dans $L^1(G)$. Comme dans la démonstration du théorème 1.1, on voit que μ est dans $L^1(G)$.

Nous allons maintenant indiquer une façòn de construire des sous-espaces fermés isomorphes à c_o dans les sous-espaces fermés de $C(G)$.

Soit K un espace topologique localement compact métrisable. Notons $C_o(K)$ l'espace des fonctions continues sur K, tendant vers zéro à l'infini, $C_o(K_d)$ l'espace, fermé pour la norme uniforme, engendré par les fonctions à support fini sur K. Tout élément de $C_o(K_d)$ définit un élément du bidual $C_o(K)''$, orthogonal aux mesures diffuses sur K.

Définition 3.1 [1] : Une suite (u_n) dans un espace de Banach B définit une série faiblement inconditionnellement convergente (ce qu'on notera f.i.c.) s'il existe une constante K telle que

$$\forall\, b' \in B', \ \forall\, N \qquad \sum_{n=1}^{n=N} |\langle u_n, b'\rangle| \le K\, \|b'\| \quad .$$

Rappelons [1] que si B contient une série f.i.c. non inconditionnellement convergente, alors B contient c_o.

Lemme 3.1 : Tout élément de $C_o(K_d)$ est la somme, pour $\sigma(C_o(K)'', M(K))$, d'une série f.i.c. d'éléments de $C_o(K)$.

<u>Démonstration</u> : Si f est la fonction caractéristique d'un point $k \in K$, il existe une suite (f_n) de fonctions de norme 1 dans $C_o(K)$, décroissante, et convergeant ponctuellement vers f. Alors

$$\text{(i)} \qquad f_1 + (f_2 - f_1) + \ldots + (f_N - f_{N-1}) \to f \ ; \ \sigma(C_o(K)'', M(K))$$

$$\text{(ii)} \quad \forall \mu \in M(K) \ \forall N \quad |\langle f_1, \mu\rangle| + |\langle f_2 - f_1, \mu\rangle| + \ldots + |\langle f_N - f_{N-1}, \mu\rangle| \leq 3 \|\mu\| .$$

Si f est une fonction à support fini, il existe de même une série f.i.c. (u_n) convergeant vers f pour $\sigma(C_o(K)'', M(K))$, avec

$$\forall \mu \in M(K) \ \forall N \qquad \sum_{n=1}^{n=N} |\langle u_n, \mu\rangle| \leq 3 \|\mu\| \, \|f\|_\infty .$$

Enfin, si f est dans $C_o(K_d)$, f est la somme d'une série Σf_k, normalement convergente dans $C_o(K_d)$, chaque f_k ayant un support fini, et les supports des f_k étant deux à deux disjoints. D'après ce qui précède, f est la somme d'une série f.i.c. d'éléments de $C_o(K)$:

$$\forall k \ \forall N \qquad \sum_{n=1}^{n=N} u_n^{(k)} \to f_k \quad , \qquad \sigma(C_o(K)'', M(K))$$

$$\forall N \qquad \sum_{n=1}^{n=N} \Big(\sum_{k=1}^{k=\infty} u_n^{(k)} \Big) \to f \quad ,, \ \sigma(C_o(K)'', M(K))$$

$$\forall \mu \in M(K) \ \forall N \quad \sum_{n=1}^{n=N} \Big|\Big\langle \sum_{k=1}^{k=\infty} u_n^{(k)}, \mu \Big\rangle\Big| \leq \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{n=1}^{n=N} |\langle u_n^{(k)}, \mu\rangle| \leq 3 \|\mu\| \sum_{k=1}^{k=\infty} \|f_k\| .$$

<u>Proposition 3.1</u> : Soit B un sous-espace fermé de $C_o(K)$. Supposons que $B^{\perp\perp} \subset C_o(K)''$ contienne un élément de $C_o(K_d)$ n'appartenant pas à $C_o(K)$. Alors B contient c_o.

<u>Démonstration</u> : D'après le lemme 3.1, cet élément est la somme, pour $\sigma(C_o(K)'', M(K))$, d'une série f.i.c. à termes dans $C_o(K)$. D'après un lemme de [4] et un lemme de [7], il est aussi la somme d'une série f.i.c. à termes dans B. De plus, cette série n'est pas inconditionnellement convergente.

Nous allons maintenant démontrer le

<u>Théorème 3.1</u> : Si Λ est un ensemble de $\mathbb{Z}$, si $C_\Lambda(\mathbb{T})$ ne contient pas c_o, la densité supérieure uniforme de répartition $\Delta^+(\Lambda)$ est nulle. Rappelons que $\Delta^+(\Lambda) = \overline{\lim_n} \sup_k \dfrac{\mathrm{Card}\{\Lambda \cap [-n+k, n+k]\}}{2n+1}$.

Définition 3.2 : Soit G un groupe localement compact abélien. Une moyenne m sur $L^\infty(G)$ est une forme linéaire sur $L^\infty(G)$, invariante par translation, telle que

$$<m,1> = \|m\| = 1 \quad .$$

(L'ensemble des moyennes sur $L^\infty(G)$ est compact pour la topologie $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$.)

Lemme 3.2 : Soit Λ un ensemble de $\mathbb{Z}$. Alors

$$\Delta^+(\Lambda) = \sup <1_\Lambda, m>$$

lorsque m parcourt l'ensemble des moyennes sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.
(1_Λ désigne la fonction caractéristique de Λ.)

Démonstration : Posons $\nu_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{k=+n} \delta_k$. C'est un élément de $\ell^1(\mathbb{Z})$, positif, de norme 1. Par définition,

$$\Delta^+(\Lambda) = \overline{\lim} \; \|1_\Lambda * \nu_n\|_\infty \quad ,$$

et il existe une suite croissante d'entièrs (n_j) telle que

$$\Delta^+(\Lambda) = \lim_j 1_\Lambda * \nu_{n_j}(k_j) = \lim_j <1_\Lambda, \nu_{n_j} * \delta_{k_j}> \quad .$$

Toute valeur d'adhérence de la suite $(\nu_{n_j} * \delta_{k_j})$ (suivant un filtre plus fin que le filtre des sections de $\mathbb{N}$), pour $\sigma(\ell^1(\mathbb{Z})'', \ell^\infty(\mathbb{Z}))$ est une moyenne, car

$$\forall\, x \in \mathbb{Z} \qquad \|\nu_n * \delta_x - \nu_n\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \longrightarrow 0$$

$$\forall\, x \in \mathbb{Z} \qquad \|\nu_{n_j} * \delta_{k_j} * \delta_x - \nu_{n_j} * \delta_{k_j}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \longrightarrow 0 \quad .$$

On en déduit

$$\Delta^+(\Lambda) \leq \sup_m <1_\Lambda, m> \quad .$$

Inversement, pour toute moyenne m sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$,

$$\forall n \qquad \langle 1_\Lambda, m\rangle = \langle 1_\Lambda * \nu_n, m\rangle \leq \|1_\Lambda * \nu_n\|_\infty$$

$$\sup_m \langle 1_\Lambda, m\rangle \leq \underline{\lim} \|1_\Lambda * \nu_n\|_\infty \leq \Delta^+(\Lambda) \quad . \quad \blacksquare$$

Avant de démontrer le théorème 3.1, rappelons les résultats suivants :

\- Sur les fonctions de $C(\overline{\mathbb{Z}})$ (où $\overline{\mathbb{Z}}$ désigne le dual du groupe $\mathbb{T}$ muni de la topologie discrète), toutes les moyennes m sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ coïncident avec la mesure de Haar η de $\overline{\mathbb{Z}}$: en effet, toute $f \in C(\overline{\mathbb{Z}})$ a une orbite par $\mathbb{Z}$ relativement compacte pour la norme, il en est de même pour son enveloppe convexe ; la fermeture de cette enveloppe convexe contient la constante $\langle f,\eta\rangle$; alors

$$\langle m,f\rangle = \langle m,\langle f,\eta\rangle\rangle = \langle f,\eta\rangle \quad .$$

\- Lemme 3.3 : Soit μ une mesure diffuse sur $\mathbb{T}$. Alors, pour toute moyenne m sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, on a $\langle m, |\hat{\mu}|^2\rangle = 0$.

Démonstration : $|\hat{\mu}|^2$ est la transformée de Fourier de la mesure diffuse $\sigma = \mu * \check{\mu}$ (pour tout borélien E dans $\mathbb{T}$, $\check{\mu}(E) = \overline{\mu(-E)}$. D'après [2], toutes les moyennes coïncident sur les transformées de Fourier des mesures. Il reste à voir que, pour une moyenne m,

$$\langle m,\hat{\sigma}\rangle = 0 \quad .$$

Soit (v_n) une base de voisinages de $\{1\}$ dans $\mathbb{T}$, soit (ν_n) une suite d'éléments positifs de norme 1 dans $\ell^1(\mathbb{Z})$, chaque $\hat{\nu}_n$ ayant son support dans v_n. Toute valeur d'adhérence de (ν_n) pour $\sigma(\ell^1(\mathbb{Z})'',\ell^\infty(\mathbb{Z}))$ est une moyenne, et

$$\langle \nu_n,\hat{\sigma}\rangle = \langle \hat{\nu}_n,\sigma\rangle \longrightarrow 0 \quad .$$

Démonstration du théorème 3.1 : Nous allons montrer que, si $\Delta^+(\Lambda)$ est positif, l'espace $C_\Lambda^{\perp\perp}(\mathbb{T})$ contient un élément non nul de $C_o(\mathbb{T}_d)$. Le lemme 3.1 entraînera alors le théorème.
Soit m une moyenne sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ telle que $\langle 1_\Lambda,m\rangle$ soit non nul, et soit (ν_α) une famille d'éléments de $\ell^1(\mathbb{Z})$, positifs, de norme 1, convergeant vers m pour $\sigma(\ell^1(\mathbb{Z})'',\ell^\infty(\mathbb{Z}))$. La famille $\widehat{1_\Lambda \nu_\alpha}$ est dans $C_\Lambda(\mathbb{T})$ et converge sur tout élément de $M(\mathbb{T})$. En effet, en tout point $t \in \mathbb{T}$,

$$\widehat{1_\Lambda \nu_\alpha}(t) = \langle e^{-int} 1_\Lambda, \nu_\alpha\rangle \longrightarrow \langle e^{-int} 1_\Lambda, m\rangle$$

et pour toute mesure diffuse $\mu \in M(\mathbb{T})$,

$$\lim_\alpha |\langle \widehat{1_\Lambda \nu_\alpha}, \mu\rangle| = \lim_\alpha |\langle 1_\Lambda \nu_\alpha, \hat{\mu}\rangle| \leq \lim_\alpha \langle \nu_\alpha, |\hat{\mu}|\rangle = \langle m, |\hat{\mu}|\rangle$$

$$\leq \langle m, |\hat{\mu}|^2\rangle = 0 \quad ,$$

d'après le lemme 3.2.

Il reste à vérifier que la fonction $\varphi(t)$ définie par

$$t \rightsquigarrow \langle e^{-int} 1_\Lambda, m\rangle$$

est dans $C_o(\mathbb{T}_d)$. Or c'est la transformée de Fourier d'une forme linéaire sur $C(\overline{\mathbb{Z}})$ définie par

$$f \rightsquigarrow \langle f\, 1_\Lambda, m\rangle \quad .$$

Si f est dans $C(\overline{\mathbb{Z}})$,

$$|\langle f\, 1_\Lambda, m\rangle| \leq \langle |f|, m\rangle = \langle |f|, \eta\rangle = \|f\|_{L^1(\overline{\mathbb{Z}})} \leq \|f\|_{L^2(\overline{\mathbb{Z}})} \quad ,$$

la fonction φ est dans $\ell^2(\mathbb{T}_d)$, ce qui achève la démonstration.

***

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Bessaga et A. Pełczynski, On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, Studia Math. vol. 17 (1958).

[2] W.F. Eberlein, Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions, Trans. A.M.S. vol. 67 (1949) (theorem 11.2).

[3] Y. Katznelson, An introduction to harmonic analysis, New-York-Wiley (1968).

[4] E. Odell, H.P. Rosenthal, A double dual characterization of separable Banach spaces containing ℓ^1, Israël J. Math. Vol. 20 (1975) (Lemma 1).

[5] A. Pełczynski, Banach spaces on which every w.u.c. operator is weakly compact, C. R. Acad. Polon. des Sciences, vol. X.12 (1962).

[6] L. Schwartz, Exposés IV, V, VI, Séminaire Maurey-Schwartz 1974-75, Ecole Polytechnique.

[7] I. Singer, Bases in Banach spaces, Springer Verlag (1970) (chapitre II, 15.7).
