SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

Sur l'espace de Banach des séries de Fourier aléatoires presque sûrement continues

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 17 et 18, p. 1-33
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978____A13_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L A   G E O M E T R I E

D E S   E S P A C E S   D E   B A N A C H

1977-1978

SUR L'ESPACE DE BANACH DES SERIES DE FOURIER ALEATOIRES PRESQUE SUREMENT CONTINUES

G. PISIER

Exposés No XVII-XVIII

10-24 Mars 1978

PLAN DES EXPOSES XVII ET XVIII

----

§ 1. INTRODUCTION.

Les séries de Fourier aléatoires sont utilisées souvent en analyse harmonique ; elles permettent d'exhiber des exemples non triviaux de séries trigonométriques (voir [11]). Les diverses séries de Fourier aléatoires (avec coefficients de Rademacher, de Steinhaus, ou bien gaussiens) ont été étudiées et comparées par Billard, qui a complété des résultats de Paley, Zygmund, Salem et Kahane. (Les travaux de Billard sont présentés dans [10].) Ce n'est que récemment qu'un progrès décisif a été fait par Fernique [5] qui a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de Fourier aléatoire gaussienne soit presque sûrement continue. (On sait que cette condition est suffisante depuis Dudley [3].)

En fait, Fernique a caractérisé les processus gaussiens stationnaires (dont les séries de Fourier aléatoires sont un cas particulier) qui admettent une version à trajectoires presque sûrement continues.

Des articles récents (cf. [16] , [19]) -basés principalement sur le résultat de Fernique- montrent que l'espace des séries de Fourier aléatoires gaussiennes p.s. continues (pour une définition précise, voir ci-dessous) possède des propriétés remarquables ; en particulier (cf. [16]) une série de Fourier aléatoire gaussienne est p.s. continue si (et seulement si) la série de Fourier aléatoire de Rademacher associée est elle-même p.s. continue.

Dans cet exposé, nous énonçons sans démonstration, le théorème de Fernique (voir § 3) et nous démontrerons ensuite quelques uns des résultats plus récents.

§ 2. NOTATIONS.

Dans tout l'exposé, nous conserverons les notations suivantes : on note G un groupe abélien compact et Γ le groupe discret dual de G. On supposera pour simplifier que Γ est dénombrable (ou, ce qui revient au même, que G est métrisable). En fait, cela n'est pas vraiment une restriction, car la plupart des questions considérées ci-dessous se ramènent immédiatement au cas où Γ est dénombrable.

On notera m la mesure de Haar de G normalisée de sorte que $m(G) = 1$; soit $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de G. Si $1 \leq p \leq \infty$, on note simplement $L^p(G)$ l'espace $L^p(G,\mathcal{B};m)$ et on note $\| \ \|_p$ sa norme naturelle. On note C(G) l'espace de fonctions continues sur G et on note encore $\| \ \|_\infty$ la norme usuelle de C(G).

Soit f dans $L^1(G)$, la transformée de Fourier de f, notée $\hat{f}$, est définie par :

$$\forall \gamma \in \Gamma \qquad \hat{f}(\gamma) = \int f(g)\, \overline{\gamma}(g)\, m(dg) \quad .$$

Tout élément de $L^2(G)$ admet un développement de Fourier $f = \sum_{\gamma \in \Gamma} \hat{f}(\gamma)\, \gamma$ qui converge vers f dans $L^2(G)$.

§ 3. LE THEOREME DE DUDLEY-FERNIQUE.

Nous en venons à l'objet de cet exposé : soit $(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ une famille de variables aléatoires (en abrégé v.a.) gaussiennes, centrées, indépendantes, normalisées de sorte que $\mathbb{E}\,|g_\gamma|^2 = 1$.

Nous noterons $C_{p.s}(G)$ l'espace formé des éléments f de $L^2(G)$ tels que $\mathbb{E}\,\| \sum_{\gamma\in A} g_\gamma \hat{f}(\gamma)\,\gamma\|_\infty$ reste borné quand A décrit l'ensemble des parties finies de Γ. On munit cet espace de la norme :

$$[\![f]\!] = \sup\{\mathbb{E}\,\| \sum_{\gamma\in A} g_\gamma \hat{f}(\gamma)\,\gamma\|_\infty \mid A \subset \Gamma \quad A \text{ fini}\} \quad .$$

Il est clair que l'on a défini ainsi un espace de Banach.

Soient $A \subset B$ deux parties finies de Γ. Il est clair que :

$$\mathbb{E}\,\| \sum_{\gamma\in A} g_\gamma \hat{f}(\gamma)\,\gamma\|_\infty \leq \mathbb{E}\,\| \sum_{\gamma\in B} g_\gamma \hat{f}(\gamma)\,\gamma\|_\infty \quad .$$

Par conséquent, si f est un polynôme trigonométrique sur G (c'est-à-dire si $\hat{f}(\gamma) = 0$ hors d'un ensemble fini) alors on a simplement :

$$[\![f]\!] = \mathbb{E}\,\| \sum_{\gamma\in\Gamma} g_\gamma \hat{f}(\gamma)\,\gamma\|_\infty \quad .$$

Soit f dans $L^2(G)$; posons :

$$\forall\, x \in G \qquad \sigma(x) = \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} |\hat{f}(\gamma)|^2\, |\gamma(x) - 1|^2\Big)^{1/2}$$

$$\text{et} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \qquad m(\varepsilon) = m(\{x \in G \mid \sigma(x) < \varepsilon\}) \quad .$$

Noter que σ est une fonction continue sur G.
D'après le résultat fondamental de Dudley-Fernique, la condition $\int_0^1 \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{m(\varepsilon)}}\, d\varepsilon < \infty$ est nécessaire (cf. [5]) et suffisante (cf. [3]) pour que f soit dans $C_{p.s}(G)$.

En fait, on peut reformuler ce théorème sous forme d'une inégalité simple :

<u>Inégalité de Fernique</u> : Il existe deux constantes numériques α, β telles que, pour tout f dans $C_{p.s}(G)$ on a :

$$(3.1) \quad \frac{1}{\alpha}\Big(|\hat{f}(0)| + \int_0^\infty \sqrt{\operatorname{Log}\frac{1}{m(\varepsilon)}}\, d\varepsilon\Big) \le [\![f]\!] \le \beta\Big(|\hat{f}(0)| + \int_0^\infty \sqrt{\operatorname{Log}\frac{1}{m(\varepsilon)}}\, d\varepsilon\Big) \quad ,$$

(où on a noté 0 l'élément unité de Γ).

Avant de justifier cette formulation, faisons quelques remarques :

<u>Remarque 3.1</u> : Soient f, σ, m comme précédemment.

<u>a)</u> Posons :

$$(3.2) \quad \forall\, t \in G \qquad X_t = \sum_\Gamma g_\gamma \operatorname{Re}(\hat{f}(\gamma)\,\gamma(t)) + \sum_\Gamma g'_\gamma \operatorname{Im}(\hat{f}(\gamma)\,\gamma(t)) \quad ,$$

où $(g'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est une copie indépendante de la famille $(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$.
$(X_t)_{t\in G}$ est un processus gaussien <u>réel</u> et vérifie :

$$(3.3) \quad \forall\, s,t \in G \qquad \mathbb{E}|X_t - X_s|^2 = \sigma(t-s)^2$$

$$= \int |f(t+x) - f(s+x)|^2\, dm(x) \quad .$$

<u>b)</u> Signalons que pour chaque t dans G :

$$\|f\|_2 = (\mathbb{E}\,|\Sigma\, g_\gamma\, \hat{f}(\gamma)\,\gamma(t)|^2)^{1/2} \le \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\; \mathbb{E}|\Sigma\, g_\gamma\, \hat{f}(\gamma)\,\gamma(t)| \quad ,$$

donc :

$$\|f\|_2 \le \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\; [\![f]\!] \quad .$$

L'hypothèse $f \in L^2(G)$ n'était donc pas restrictive dans la définition de $C_{p.s}(G)$.
De plus, on a :

$$(3.4) \qquad \sup_{x\in G} \sigma(x) \leq 2\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} |\hat{f}(\gamma)|^2\Big)^{1/2} \leq \sqrt{2\pi}\, [\![f]\!] \quad .$$

c) Posons $d(s,t) = \sigma(t-s)$ pour s, t dans G. Il est clair que d est un écart sur G. Définissons, pour $\varepsilon > 0$, le nombre $N(\varepsilon)$ comme le nombre minimal de d-boules ouvertes de d-rayon ε suffisant pour recouvrir G. Comme d est invariant par translation on voit facilement que

$$N(2\varepsilon) \leq \frac{1}{m(\varepsilon)} \leq N(\varepsilon) \quad ,$$

de sorte que $\int_0^1 \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{m(\varepsilon)}} < \infty$ équivaut à la condition (dite "condition d'entropie") :

$$\int_0^1 \sqrt{\operatorname{Log} N(\varepsilon)}\, d\varepsilon < \infty \quad .$$

d) Signalons que, d'après (3.4), on a $m(\varepsilon) = 1$ pour ε assez grand, donc $\operatorname{Log} \frac{1}{m(\varepsilon)} = 0$ pour ε assez grand, c'est donc seulement le comportement à l'origine de l'intégrale $\int_0^\infty \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{m(\varepsilon)}}\, d\varepsilon$ qui est important.

e) Posons (suivant [8]) $\forall\, u \in [0,1]$

$$\bar{\sigma}(u) = \sup\{y \mid m(y) < u\} \quad .$$

Notons du la mesure de Lebesgue normalisée sur $[0,1]$. La fonction $\bar{\sigma} : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ est la réarrangée décroissante de $\sigma : G \to \mathbb{R}_+$. On vérifie facilement que la distribution de $\bar{\sigma}$ relative à $([0,1],du)$ est identique à celle de σ relative à (G,dm). Posons

$$\mathfrak{J} = \int_0^\infty \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{m(\varepsilon)}}\, d\varepsilon \quad .$$

Il est clair que :

$$\bar{\sigma}(u) \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{u}} \leq \int_0^{\bar{\sigma}(u)} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{m(\varepsilon)}}\, d\varepsilon \leq \mathfrak{J} \quad ,$$

donc :

$$\bar{\sigma}(u) \leq \Big(\operatorname{Log} \frac{1}{u}\Big)^{-1/2} \mathfrak{J} \quad .$$

Posons $\Lambda = \int_0^1 (\mathrm{Log}\,\frac{1}{u})^{-1/2}\,du$. Puisque σ et $\overline{\sigma}$ ont même distribution, on a :

$$\int \sigma \; dm = \int_0^1 \overline{\sigma}(u)\; du \leq \Lambda \mathcal{J} \;,$$

d'où

$$(3.5) \qquad (\sum_{\gamma\neq 0} |\hat{f}(\gamma)|^2)^{1/2} \leq \int \sigma \; dm \leq \Lambda \mathcal{J} \;.$$

Pour faciliter la tâche du lecteur, nous donnons maintenant les calculs (tout-à-fait élémentaires) qui font le lien entre (3.1) et les résultats énoncés explicitement par Fernique.

Indications au sujet de (3.1).

Signalons tout d'abord que les expressions intervenant dans (3.1) dépendent de manière homogène de f. Pour démontrer (3.1), on peut supposer que $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ pour au plus un nombre fini de γ dans Γ. Les résultats de Fernique sont formulés pour des processus gaussiens, nous les appliquons au processus $(X_t)_{t\in G}$ défini par (3.2).

On voit facilement que $[\![f]\!]$ et $\mathbb{E} \sup_{t\in G} |X_t|$ sont tous deux supérieurs d'une part à $\mathbb{E}\,\|\Sigma\, g_\gamma\, \mathrm{Re}(\hat{f}(\gamma)\,\gamma)\|_\infty$ et d'autre part à $\mathbb{E}\,\|\Sigma\, g_\gamma\, \mathrm{Im}(\hat{f}(\gamma)\,\gamma)\|_\infty$

On a donc :

$$\frac{1}{2}\,[\![f]\!] \leq \mathbb{E} \sup_{t\in G} |X_t| \leq 2\,[\![f]\!] \;.$$

De plus, pour des raisons de symétrie, on a

$$\mathbb{E} \sup_G X_t \leq \mathbb{E} \sup_G |X_t| \leq 2\,\mathbb{E} \sup_G X_t \;.$$

Les deux dernières inégalités montrent qu'il suffit de démontrer (3.1) avec $\mathbb{E} \sup_{t\in G} X_t$ à la place de $[\![f]\!]$ puisque :

$$(3.6) \qquad \frac{1}{4}\,[\![f]\!] \leq \mathbb{E} \sup_G X_t \leq 2[\![f]\!] \;.$$

Le côté droit de (3.1) est une reformulation du résultat de Dudley. Nous le démontrerons au paragraphe suivant (cf. Remarque 4.3).
Pour le côté gauche, donnons quelques précisions : dans [5] (théorème 7.2.2) Fernique démontre la minoration suivante :

$$\forall\ \delta > 0 \qquad \frac{\delta}{8\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \sqrt{[\mathrm{Log}_2 K_\delta(n)]} \leq \mathbb{E} \sup_{t\in G} X_t \quad ,$$

où $[.]$ dénote la partie entière et $K_\delta(n)$ est le nombre maximal de d-boules ouvertes disjointes de rayon $\delta 4^{-n}$ centrées dans la boule ouverte ayant pour rayon $\delta 4^{-n+1}$ et pour centre l'élément unité de G.
Par un raisonnement élémentaire (cf. [5], 8.1.4) on voit que

$$K_\delta(n)\ m(2\delta 4^{-n}) \geq m(\delta 4^{-n+1}) \quad ,$$

et (en doublant δ) $K_{2\delta}(n)\ m(\delta 4^{-n+1}) \geq m(2\delta 4^{-n+1})$; d'où, en faisant le produit de ces inégalités :

$$\mathrm{Log}_2 \left(\frac{m(2\delta 4^{-n+1})}{m(2\delta 4^{-n})}\right) \leq \mathrm{Log}_2(K_\delta(n)\ K_{2\delta}(n)) \quad ;$$

d'où, en posant $a_n = -\mathrm{Log}_2\ m(2\delta 4^{-n})$, d'après la minoration de Fernique :

$$(3.7) \qquad \frac{\delta}{8\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \sqrt{[a_n - a_{n-1}]} \leq \frac{3}{2}\ \mathbb{E} \sup_G X_t + \frac{\delta}{8\sqrt{2\pi}} \sum_1^{\infty} 4^{-n} \quad .$$

mais :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \sqrt{[a_n - a_{n-1}]} &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\sqrt{a_n - a_{n-1}} - 1\right) \\
(3.8) \qquad &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}} - 1\right) \\
&\geq \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \sqrt{a_n} - \frac{1}{4}\sqrt{a_o} - \frac{1}{3} \quad .
\end{aligned}$$

Posons $\delta = \sup_G \sigma$. On peut écrire : (noter que $a_o = 0$)

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Log}\ 2}} \int_0^{2\delta} \sqrt{\mathrm{Log} \frac{1}{m(\varepsilon)}}\, d\varepsilon \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}\ 6.\delta.4^{-n} \text{ , d'où d'après (3.7) et (3.8)}$$

$$\leq 96\sqrt{2\pi}\ \mathbb{E} \sup X_t + \frac{16\delta}{3} \quad .$$

Supposons que $[\![f]\!] \leq 1$; on a alors d'après (3.6) $\mathbb{E} \sup X_t \leq 2$ et d'après (3.4) : $\delta \leq \sqrt{2\pi}$; on a donc :

$$\int_0^\infty \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{m(\varepsilon)}}\, d\varepsilon = \int_0^{2\delta} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{m(\varepsilon)}}\, d\varepsilon \le \frac{592}{3} \sqrt{2\pi \operatorname{Log} 2} \quad .$$

Par homogénéité, on obtient ainsi le côté gauche de (3.1) avec $\alpha \le \frac{592}{3} \sqrt{2\pi \operatorname{Log} 2}$.

Le corollaire suivant est important ; c'est une reformulation d'un résultat de Billard (cf. [10] p. 49), il est très lié au résultat classique de Belyaev [1].

<u>Corollaire 3.1</u> : Pour tout f dans $C_{p.s}(G)$, les sommes partielles $\sum_{\gamma\in A} \hat{f}(\gamma)\gamma$ convergent vers f dans $C_{p.s}(G)$ quand A tend vers Γ suivant l'ordonné filtrant des parties finies de Γ. La série $\sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{f}(\gamma)\gamma$ est donc sommable dans $C_{p.s}(G)$. On peut aussi l'énoncer : l'espace des polynômes trigonométriques (i.e. les combinaisons linéaires finies de caractères) est dense dans $C_{p.s}(G)$.

<u>Démonstration</u> : Soient f dans $C_{p.s}(G)$ et $\eta > 0$. Posons (exceptionnellement)

$$\sigma_f(x) = (\Sigma\ |\hat{f}(\gamma)|^2\ |\gamma(x) - 1|^2)^{1/2} \qquad \text{pour x dans G}$$

et

$$m_f(\varepsilon) = m(\{x \in G \mid \sigma_f(x) < \varepsilon\}) \qquad \text{pour } \varepsilon > 0 \quad .$$

Soit A une partie finie de Γ telle que

$$\sum_{\Gamma \dot{-} A} |\hat{f}(\gamma)|^2 < \frac{\eta^2}{4} \quad ;$$

on pose

$$h = \sum_{\Gamma \dot{-} A} \hat{f}(\gamma)\ \gamma \quad .$$

On a trivialement $\sigma_h \le \sigma_f$ donc $m_h \ge m_f$, et $m_h(\varepsilon) = 0$ si $\varepsilon > \eta$. On déduit donc de (3.1) :

$$[\![h]\!] \le \beta \int_0^\eta \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{m_f(\varepsilon)}}\, d\varepsilon \quad ; \tag{3.9}$$

on obtient ainsi le résultat annoncé puisque le second membre de (3.9) tend vers 0 avec η.

<u>Remarque 3.2</u> : i) Signalons le résultat suivant : soit f, h dans $C_{p.s}(G)$. Posons $\forall$ t,x $\in$ G, $f^t(x) = f(t + x)$. Supposons que : $\forall$ s,t $\in$ G

$$\|f^s - f^t\|_2 \leq \|h^s - h^t\|_2 \quad .$$

On a alors $$[\![f]\!] \leq 8 \, [\![h]\!] \quad .$$

Compte-tenu de (3.6) , ce résultat est une conséquence immédiate d'un principe de comparaison des processus gaussiens (cf. [5] Cor.2.1.3).

ii) Suivant la même idée que S. Chevet dans [2], on peut observer que si f et h sont dans $C_{p.s}(G) \cap C(G)$, alors le produit ponctuel fh est aussi dans $C_{p.s}(G) \cap C(G)$ et l'on a :

$$[\![fh]\!] + \|fh\|_\infty \leq A([\![f]\!] + \|f\|_\infty)([\![h]\!] + \|h\|_\infty) \tag{3.10}$$

où A est une constante numérique.

L'espace $C_{p.s}(G) \cap C(G)$ est donc une algèbre de Banach pour le produit ponctuel.

L'inégalité (3.10) résulte de la remarque précédente et du calcul suivant : $\forall\, s,t \in G$,

$$\begin{aligned} \|(fh)^s - (fh)^t\|_2 &\leq \|f^s(h^s - h^t)\|_2 + \|h^t(f^s - f^t)\|_2 \\ &\leq \|f\|_\infty \, \|h^s - h^t\|_2 + \|h\|_\infty \, \|f^s - f^t\|_2 \quad . \end{aligned}$$

§ 4. RESULTATS PRELIMINAIRES.

Le résultat suivant est extrait d'un article de Preston [20] où le lecteur trouvera des informations plus détaillées ; pour simplifier, nous ne présentons ci-dessous que la partie de [20] que nous utiliserons effectivement dans la suite. La méthode de Preston a pour origine des idées de Garsia.

Théorème 4.1 : Soit d une métrique continue sur G. Soit $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction continue et soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe croissante. On suppose que l'intégrale

$$I = \iint \varphi\left(\left|\frac{f(s) - f(t)}{d(s,t)}\right|\right) m(ds)\, m(dt)$$

est finie, et aussi que :

$$\int_0^1 \varphi^{-1}\left(\frac{I}{\mu(\varepsilon)^2}\right) d\varepsilon < \infty \quad ,$$

où l'on a posé :

$\forall\ \varepsilon > 0, \qquad B_\varepsilon = \{x \in G \mid d(0,x) < \varepsilon\}$ et $\mu(\varepsilon) = m(B_\varepsilon)$.

Soit $r > 0$, posons $f_r = m(B_r)^{-1} \int_{B_r} f\, dm$. On a alors l'inégalité suivante :

$$(4.1) \qquad |f(0) - f_r| \leq 6 \int_0^{r/2} \varphi^{-1}\left(\frac{I}{\mu(\varepsilon)^2}\right) d\varepsilon \quad .$$

La démonstration part d'un lemme simple :

<u>Lemme 4.1</u> : Soient A, B des parties mesurables de G. Posons $f_A = m(A)^{-1} \int_A f\, dm$ et $f_B = m(B)^{-1} \int_B f\, dm$. On a :

$$(4.2) \qquad |f_A - f_B| \leq \delta(A,B)\ \varphi^{-1}\left(\frac{I}{m(A)m(B)}\right)$$

où l'on a posé $\delta(A,B) = \sup\{d(x,y) \mid x \in A,\ y \in B\}$.

<u>Démonstration</u> : Puisque φ est croissante, on a :

$$\frac{1}{m(A)m(B)} \int_{A\times B} \varphi\left(\left|\frac{f(s) - f(t)}{\delta(A,B)}\right|\right) dm(s)\ dm(t) \leq$$

$$\leq \int_{A\times B} \varphi\left(\left|\frac{f(s) - f(t)}{d(s,t)}\right|\right) \frac{m(ds)m(dt)}{m(A)m(B)} \leq \frac{I}{m(A)m(B)} \quad .$$

Puisque $\qquad f_A - f_B = \frac{1}{m(A)m(B)} \int_{A\times B} (f(s) - f(t))m(ds)\ m(dt) \quad ,$

la convexité de $x \to \varphi(|x|)$ montre que :

$$\varphi\left(\left|\frac{f_A - f_B}{\delta(A,B)}\right|\right) \leq \frac{I}{m(A)m(B)} \quad ,$$

ce qui implique immédiatement (4.2).

<u>Démonstration du théorème 4.1</u> : Il est clair que $f_r \to f(0)$ quand $r \to 0$ puisque l'on suppose f continue♦. On peut donc écrire pour tout $r > 0$:

♦ La méthode s'applique aussi sans supposer que f est continue, pour plus de détails voir Preston [20].

$$|f(0) - f_r| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_{r2^{-n-1}} - f_{r2^{-n}}| \quad , \text{ soit d'après (4.2) :}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} (r2^{-n} + r2^{-n-1}) \, \varphi^{-1}\left(\frac{I}{\mu(r2^{-n})\mu(r2^{-n-1})}\right) \quad , \text{ soit :}$$

$$\leq \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} r2^{-n} \, \varphi^{-1}\left(\frac{I}{\mu(r2^{-n-1})^2}\right)$$

$$\leq 6 \sum_{0}^{\infty} \int_{r2^{-n-2}}^{r2^{-n-1}} \varphi^{-1}\left(\frac{I}{\mu(\varepsilon)^2}\right) d\varepsilon = 6 \int_0^{r/2} \varphi^{-1}\left(\frac{I}{\mu(\varepsilon)^2}\right) d\varepsilon \quad .$$

Remarque 4.1 : Dans la situation du théorème 4.1, soit R assez grand pour que $B_R = G$; on a alors : $f_R = \int f \, dm = \hat{f}(0)$, donc :

$$(4.3) \qquad |f(0)| \leq |\hat{f}(0)| + 6 \int_0^{R/2} \varphi^{-1}\left(\frac{I}{\mu(\varepsilon)^2}\right) d\varepsilon \quad .$$

Supposons de plus que d est une métrique invariante par les translations de G, de sorte que les hypothèses du théorème 4.1 restent vérifiées par n'importe quelle translatée de la fonction f ; appliquant (4.3) aux translatées de f, on trouve :

$$(4.4) \quad \forall x \in G \qquad |f(x)| \leq |\hat{f}(0)| + 6 \int_0^{R/2} \varphi^{-1}\left(\frac{I}{\mu(\varepsilon)^2}\right) d\varepsilon \quad .$$

Remarque 4.2 : Soit f dans $L^2(G)$. Dans la situation considérée au § 3, l'écart

$$(4.5) \qquad d(s,t) = \left(\sum_{\Gamma} |\hat{f}(\gamma)|^2 \, |\gamma(s) - \gamma(t)|^2\right)^{1/2}$$

n'est pas nécessairement une métrique sur G. Néanmoins on peut aisément se ramener au cas où $d(s,t) = 0 \Leftrightarrow s = t$. En effet, soit Γ_1 le sous-groupe de Γ engendré par l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid \hat{f}(\gamma) \neq 0\}$. Γ_1 s'identifie au dual du groupe compact $G_1 = G/\{x \in G, d(0,x) = 0\}$. Il est clair que f s'identifie à un élément de $L^2(G_1)$; le lecteur vérifiera aisément que, pour le calcul de $[\![f]\!]$, il revient au même de se placer dans G ou dans G_1. Bien entendu, l'écart d définit une métrique sur G_1. On est ainsi ramené au cas séparé.

Remarque 4.3 : Nous pouvons maintenant démontrer le côté droit de l'inégalité (3.1) à partir du théorème 4.1. En effet, soit f un polynôme trigonométrique (i.e. $\hat{f}(\gamma) = 0$ sauf pour un nombre fini de γ dans Γ). Soient σ, d, $m(\varepsilon)$ comme au paragraphe 3. D'après la remarque 4.2, on peut supposer que d est une métrique sur G. On pose

$$Y_t = \sum_{\gamma\in\Gamma} g_\gamma \hat{f}(\gamma)\, \gamma(t)$$

pour t dans G. $(Y_t)_{t\in G}$ est un processus sur l'espace de probabilité, noté $(\Omega,\mathbb{P})$, sur lequel est défini $(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$.
Posons $\varphi(x) = \exp|x|^2$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. D'après les propriétés d'intégrabilité classiques des variables gaussiennes, on a :

$$(4.6)\qquad \forall\, s,t\in G \qquad \mathbb{E}\,\varphi\left(\left|\frac{Y_s - Y_t}{K\, d(s,t)}\right|\right) \le 2$$

où K est une constante numérique.
Posons, pour ω dans Ω :

$$I_\omega = \int \varphi\left(\left|\frac{Y_s(\omega) - Y_t(\omega)}{d(s,t)}\right|\right) m(ds)\, m(dt) \quad .$$

En intégrant (4.6), on obtient :

$$(4.7)\qquad \int I_\omega \, d\mathbb{P}(\omega) \le 2 \quad .$$

Posons : $D_\omega = \left(\sum_{\gamma\neq 0} |f(\gamma)|^2 \, |g_\gamma(\omega)|^2\right)^{1/2}$ et $\mathcal{J} = \int_0^\infty \sqrt{\operatorname{Log}\frac{1}{m(\varepsilon)}}\, d\varepsilon$.
D'après (4.4), on a :

$$\sup_{t\in G} |Y_t(\omega)| \le |\hat{f}(0)\, g_0(\omega)| + 6\int_0^{D_\omega} \sqrt{\operatorname{Log}\frac{I_\omega}{m(\varepsilon)^2}}\, d\varepsilon$$

$$\le |\hat{f}(0)\, g_0(\omega)| + 6\, D_\omega \sqrt{\operatorname{Log} I_\omega} + 6\sqrt{2}\, \mathcal{J} \,.$$

Par conséquent :

$$(4.8)\qquad [\![f]\!] \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, |\hat{f}(0)| + 6\int D_\omega \sqrt{\operatorname{Log} I_\omega}\, d\mathbb{P}(\omega) + 6\sqrt{2}\, \mathcal{J} \,.$$

Mais on a :

$$\int D_\omega \sqrt{\operatorname{Log} I_\omega}\, d\mathbb{P}(\omega) \le \left\{\int D_\omega^2\, d\mathbb{P}(\omega) \,.\, \int \operatorname{Log} I_\omega \, d\mathbb{P}(\omega)\right\}^2$$

$$\le \left\{\sum_{\gamma\neq 0} |\hat{f}(\gamma)|^2 \,.\, \int I_\omega \, d\mathbb{P}(\omega)\right\}^{1/2}$$

soit, d'après (4.7) et (3.5) $\le \Lambda \mathcal{J} \sqrt{2}$.

On déduit donc finalement de (4.8) :

$$[\![f]\!] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ |\hat{f}(0)| + 6\sqrt{2}(\Lambda + 1)\ \text{?} \quad ,$$

et on a ainsi établi le côté droit de (3.1) avec $\beta \leq 6\sqrt{2}\,(\Lambda + 1)$.

§ 5. LE DUAL DE $C_{p.s}(G)$.

Commençons par des notations supplémentaires.

Notations : Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction paire, convexe, croissante sur $\mathbb{R}_+$ et nulle à l'origine. La fonction φ définit un espace d'Orlicz -noté $L^{\varphi}(G)$- formé des fonctions mesurables $f : G \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe $c > 0$ tel que $\int \varphi\left(\frac{f(x)}{c}\right) dm(x) \leq 1$. Cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{\varphi} = \inf\{c > 0 \mid \int \varphi(\tfrac{f}{c})\ dm \leq 1\}$$

qui en fait un espace de Banach.
Pour plus de détails sur les espaces d'Orlicz, voir [12].
Dans la suite, la fonction ψ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \psi(x) = \exp|x|^2 - 1$$

jouera un rôle important. Posons : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\tilde{\psi}(x) = |x|(\mathrm{Log}(e + |x|))^{1/2}$. Il est classique (cf. [12]) que l'espace $L^{\psi}(G)$ s'identifie (avec la dualité usuelle) au dual de l'espace $L^{\tilde{\psi}}(G)$ et la norme du dual de $L^{\tilde{\psi}}(G)$ est équivalente à la norme de $L^{\psi}(G)$. (Dans une situation similaire, des calculs explicites sont donnés dans [5], ch. 5.) Il existe donc des constantes Δ_1, Δ_2 telles que : $\forall\, f \in L^{\psi}(G)$

$$\frac{1}{\Delta_1}\|f\|_{\psi} \leq \|f\|_{L^{\tilde{\psi}}(G)'} \leq \Delta_2 \|f\|_{\psi} \quad . \tag{5.1}$$

Soit $M_{2,\psi}$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de $L^2(G)$ dans $L^{\psi}(G)$ qui commutent avec les translations. Soit $T : L^2(G) \to L^{\psi}(G)$ un tel opérateur ; on vérifie classiquement l'existence de scalaires notés $\hat{T}(\gamma)$ (les "coefficients" de T) tels que

$$\forall \gamma \in \Gamma \qquad T(\gamma) = \hat{T}(\gamma)\gamma \quad .$$

En résumé, les éléments T de $M_{2,\psi}$ sont caractérisés par le fait que, pour tout f dans $L^2(G)$, la série $\sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{T}(\gamma)\ \hat{f}(\gamma)\gamma$ est la série de Fourier d'une fonction de $L^\psi(G)$.
Pour tout T dans $M_{2,\psi}$, on pose :

$$\|T\|_{2,\psi} = \sup\ \{\|Tf\|_\psi \mid \|f\|_2 \leq 1\} \quad .$$

Muni de cette norme, $M_{2,\psi}$ est évidemment un espace de Banach.
On note $K_{2,\psi}$ le sous-espace de $M_{2,\psi}$ formé des éléments de $M_{2,\psi}$ qui définissent un opérateur compact de $L^2(G)$ dans $L^\psi(G)$. On voit facilement que $K_{2,\psi}$ est la fermeture dans $M_{2,\psi}$ de l'ensemble des opérateurs de rang fini de $M_{2,\psi}$ (c'est-à-dire, l'ensemble des T tels que $\hat{T}(\gamma) = 0$ sauf pour un nombre fini de γ dans Γ).

Le théorème qui suit permet de mettre $M_{2,\psi}$ et $C_{p.s}(G)$ en dualité.

<u>Théorème 5.1</u> : Soient f dans $C_{p.s}(G)$ et T dans $M_{2,\psi}$. On a :

$$(5.2) \qquad \sum_{\gamma\in\Gamma} |\hat{f}(\gamma)\ \hat{T}(\gamma)| \leq C_o\ [\![f]\!]\ \|T\|_{2,\psi} \quad ,$$

où C_o est une constante numérique.

<u>Démonstration</u> : Par un argument de perturbation, on peut supposer que

$$\forall \gamma \in \Gamma \qquad \hat{f}(\gamma) \neq 0 \quad ,$$

de sorte que la formule (4.5) définit une métrique d sur G (on peut aussi appliquer la remarque 4.2).
On va appliquer le théorème 4.1 à la fonction

$$F = \sum_{\gamma\in A} |\hat{f}(\gamma)\ \hat{T}(\gamma)|\ \gamma$$

où A est une partie finie de Γ.
On pose $\forall\ x \in G$, $\forall\ s \in G$, $F^s(x) = F(x+s)$. Soit ω_γ de module 1 dans $\mathbb{C}$ tel que $|\hat{f}(\gamma)\ \hat{T}(\gamma)| = \omega_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \hat{T}(\gamma)$; on a $F = T(\sum \omega_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\gamma)$. La défini-

tion de $\|T\|_{2,\psi}$ montre donc : $\forall\ s,t \in G$

$$\|F^s - F^t\|_\psi \leq \|T\|_{2,\psi} \|f^s - f^t\|_2 = \|T\|_{2,\psi}\ d(s,t) \quad .$$

D'où

$$\int \psi\left(\frac{F^s(x) - F^t(x)}{\|T\|_{2,\psi}\ d(s,t)}\right) dm(x) \leq 1 \quad . \tag{5.3}$$

En intégrant (5.3) en s et t et en utilisant l'invariance par translation de d et m, on trouve :

$$\int \exp\left\{\left|\frac{F(s) - F(t)}{\|T\|_{2,\psi}\ d(s,t)}\right|\right\}^2 dm(s)\ dm(t) \leq 2 \quad .$$

Appliquant le théorème 4.1 (et la remarque 4.1), on en déduit :

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(0)}{\|T\|_{2,\psi}}\right| &\leq |\hat{f}(0)\ \hat{T}(0)| + 6 \int_0^{\|f\|_2} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{2}{m(\varepsilon)^2}}\, d\varepsilon \\ &\leq |\hat{f}(0)\ \hat{T}(0)| + 6\ \|f\|_2 \sqrt{\operatorname{Log} 2} + 6\sqrt{2} \int_0^\infty \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{m(\varepsilon)}}\, d\varepsilon \quad .\end{aligned} \tag{5.4}$$

On voit facilement que $|\hat{T}(0)| \leq \dfrac{\|T\|_{2,\psi}}{\|1\|_\psi} = \sqrt{\operatorname{Log} 2}\ \|T\|_{2,\psi}$. D'autre part, d'après (3.4), $|\hat{f}(0)| \leq \|f\|_2 \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ [\![f]\!]$.

On peut donc conclure : supposons $[\![f]\!] \leq 1$ et $\|T\|_{2,\psi} \leq 1$, on déduit de (5.4) et (3.1) :

$$\Sigma\ |\hat{f}(\gamma)\ \hat{T}(\gamma)| \leq 7 \sqrt{\frac{\pi}{2} \operatorname{Log} 2} + 6\sqrt{2}\,\alpha = C_0 \quad .$$

Par homogénéité, on a ainsi obtenu le résultat annoncé.

L'inégalité du théorème 5.1 permet de mettre $M_{2,\psi}$ et $C_{p.s}(G)$ en dualité : A tout élément T de $M_{2,\psi}$ est associée une forme linéaire continue notée abusivement T sur $C_{p.s}(G)$ par la formule

$$\langle T,f\rangle = \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{T}(\gamma)\ \hat{f}(\gamma) \quad .$$

On va voir que toute forme linéaire continue sur $C_{p.s}(G)$ est de cette forme.

L'espace $M_{2,\psi}$ s'identifie à l'espace des "multiplicateurs" de $L^2(G)$ dans $L^\psi(G)$. Par des calculs classiques sur les produits tensoriels, que nous ne reproduirons pas ici, on peut construire de manière

naturelle un prédual de $M_{2,\psi}$ qui sera noté $A_{2,\tilde{\psi}}$.
Pour plus de détails sur les assertions qui suivent, le lecteur peut se reporter à [13] ch. 5 § 5.6 où le cas des multiplicateurs de $L^p(G)$ dans $L^q(G)$ est traité en détail ; l'extension aux espaces d'Orlicz est purement formelle.
Soit $A_{2,\tilde{\psi}}$ l'espace formé des fonctions f de $L^2(G)$ qui admettent une représentation de la forme

$$(5.5) \qquad f = \sum_{n=1}^{\infty} h_n * k_n$$

avec
$$\sum_{1}^{\infty} \|h_n\|_2 \; \|k_n\|_{\tilde{\psi}} < \infty \quad .$$

On pose $|||f||| = \inf\{\sum_1^\infty \|h_n\|_2 \; \|k_n\|_{\tilde{\psi}}\}$ où l'infimum porte sur l'ensemble des représentations de f de la forme (5.5).
Si T est dans $M_{2,\psi}$ et f dans $A_{2,\tilde{\psi}}$, on voit facilement que

$$\sum |\hat{T}(\gamma)\; \hat{f}(\gamma)| \leq |||f||| \; \sup\{\|Th\|_{(L^{\tilde{\psi}})'} \mid \|h\|_2 \leq 1\}$$

soit, d'après (5.1) : $\qquad \leq \Delta_2 \; |||f||| \; \|T\|_{2,\psi}$.

Les espaces $A_{2,\tilde{\psi}}$ et $M_{2,\psi}$ sont donc mis en dualité par la forme bilinéaire

$$\langle T,f\rangle = \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{T}(\gamma)\; \hat{f}(\gamma) \quad .$$

Nous admettrons sans démonstration (voir [13] déjà cité) que $M_{2,\psi}$ s'identifie au dual de $A_{2,\tilde{\psi}}$ dans cette dualité. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que :

$$(5.6) \quad \forall\; T\in M_{2,\psi} \qquad \frac{1}{\Delta_1}\|T\|_{2,\psi} \leq \|T\|_{A'_{2,\tilde{\psi}}} \leq \Delta_2 \; \|T\|_{2,\psi} \quad .$$

Ces différents points étant précisés, on peut maintenant énoncer le

<u>Théorème 5.2</u> : Les espaces $C_{p.s}(G)$ et $A_{2,\tilde{\psi}}$ sont identiques et l'on a : $\forall\; f\in C_{p.s}(G)$

$$(5.7) \qquad \frac{1}{K_1} |||f||| \leq [\![f]\!] \leq K_2 \; |||f|||$$

où K_1 et K_2 sont des constantes numériques.

Pour le côté droit de (5.7), nous aurons besoin de deux lemmes ; le premier est élémentaire :

Lemme 5.1 : $\forall\ k \in L^{\tilde{\psi}}(G)$, $\forall\ k' \in L^{\psi}(G)$, $k * k' \in C(G)$ et $\|k * k'\|_\infty \leq \Delta_2\ \|k\|_{\tilde{\psi}}\ \|k'\|_\psi$.

Démonstration : Posons $\forall\ x,t \in G$, $R_x k(t) = k(x-t)$. Il est clair que $\|R_x k\|_{\tilde{\psi}} = \|k\|_{\tilde{\psi}}$. La fonction $x \to R_x k$ est continue de G dans $L^{\tilde{\psi}}(G)$, donc $x \to \langle R_x k, k'\rangle = k * k'(x)$ est continue sur G et, de plus :

$$|k * k'(x)| \leq \|R_x k\|_{\tilde{\psi}}\ \|k'\|_{(L^{\tilde{\psi}})'} \quad ,$$

d'où, d'après (5.1) : $\|k * k'\| \leq \Delta_2\ \|k\|_{\tilde{\psi}}\ \|k'\|_\psi$. c.q.f.d.

Le second lemme est très voisin d'un résultat classique de Paley-Zygmund (cf. [10] p. 44).

Lemme 5.2 : Pour tout polynôme trigonométrique h, on a :

$$\mathbb{E}\ \Big\|\sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{h}(\gamma)\ g_\gamma\ \gamma\Big\|_\psi \leq K'\ \|h\|_2 \quad ,$$

où K' est une constante numérique.

Démontration : D'après les propriétés d'intégrabilité des variables gaussiennes, il existe une constante numérique K telle que : $\forall\ t \in G$

$$\mathbb{E}\ \psi\left(\left|\frac{\sum \hat{h}(\gamma)\ g_\gamma\ \gamma(t)}{K\ \|h\|_2}\right|\right) \leq 1 \quad . \tag{5.8}$$

Posons $J(\omega) = \int \psi\left(\left|\frac{\sum \hat{h}(\gamma)\ g_\gamma(\omega)\ \gamma(t)}{K\ \|h\|_2}\right|\right) dm(t)$. En intégrant (5.8), on trouve $\mathbb{E}\, J \leq 1$.

Posons aussi $N(\omega) = \|\sum \hat{h}(\gamma)\ g_\gamma(\omega)\ \gamma\|_\psi$. On a par définition :

$$\int \psi\left(\left|\frac{\sum \hat{h}(\gamma)\ g_\gamma(\omega)\ \gamma}{N(\omega)}\right|\right) dm = 1.$$

On peut vérifier : $\forall\ a,b \geq 0$, $a\psi(b) \leq \psi(ab)$ si $a \geq 1$. D'où, si $N(\omega) \geq K\|h\|_2$:

$$\int \frac{N(\omega)}{K\|h\|_2}\ \psi\left(\frac{\sum \hat{h}(\gamma)\ g_\gamma(\omega)\ \gamma}{N(\omega)}\right) dm \leq J(\omega) \quad .$$

On a donc : $N(\omega) \leq K\|h\|_2\, J(\omega)$, si $N(\omega) \geq K\|h\|_2$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, N &\leq K\|h\|_2 + \mathbb{E}(N\, 1_{\{N \geq K\|h\|_2\}}) \\ &\leq K\|h\|_2(1 + \mathbb{E}\, J) \leq 2K\|h\|_2 \quad . \qquad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

<u>Démonstration du théorème 5.2</u> : Il suffit évidemment de démontrer (5.7) dans le cas où f est un polynôme trigonométrique. D'après le théorème (5.1), on a

$$\|f\|_{M'_{2,\psi}} \leq C_o[\![f]\!] \quad ,$$

mais d'après la version duale de (5.6), on a aussi :

$$\|f\|_{A''_{2,\tilde{\psi}}} \leq \Delta_1 \|f\|_{M'_{2,\psi}}$$

soit finalement :

$$|||f||| = \|f\|_{A''_{2,\tilde{\psi}}} \leq C_o\, \Delta_1[\![f]\!]$$

ce qui établit le côté gauche de (5.7).
Pour démontrer le côté droit, il suffit clairement d'établir l'inégalité :

$$(5.9) \qquad [\![h * k]\!] \leq K_2 \|h\|_2 \|k\|_{\tilde{\psi}}$$

pour k dans $L^{\tilde{\psi}}(G)$ et h polynôme trigonométrique.
D'après les lemmes 5.1 et 5.2, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, \|\Sigma\, \hat{h}(\gamma)\, \hat{k}(\gamma)\, g_\gamma\, \gamma\|_\infty &\leq \Delta_2\, \mathbb{E}\, \|\Sigma\, \hat{h}(\gamma)\, g_\gamma\, \gamma\|_\psi \|k\|_{\tilde{\psi}} \\ &\leq \Delta_2\, K' \|h\|_2 \|k\|_{\tilde{\psi}} \quad , \end{aligned}$$

ce qui établit (5.9) et termine la démonstration.

<u>Corollaire 5.1</u> : Dans la dualité décrite précédemment on a l'identification $C_{p.s}(G)' = M_{2,\psi}$ avec équivalence des normes correspondantes.

Ce corollaire résulte immédiatement de (5.6) et (5.7).

Remarque 5.1 : On peut aussi vérifier l'identification : $C_{p.s}(G) = K'_{2,\psi}$ avec équivalence des normes correspondantes.

§ 6. APPLICATIONS AUX ENSEMBLES DE SIDON.

Ce paragraphe fait suite aux exposés VII et XIV du présent volume, où le lecteur trouvera la définition et certaines propriétés des ensembles de Sidon.

Notation : Si $\mathcal{F}(G)$ est un espace de fonctions sur G (par exemple C(G), $L^2(G)$, $C_{p.s}(G)$, etc.) on note $\mathcal{F}_\Lambda(G)$ le sous-espace de $\mathcal{F}(G)$ formé des éléments f de $\mathcal{F}(G)$ tels que

$$\hat{f}(\gamma) = 0 \quad \text{si } \gamma \notin \Lambda \quad .$$

Rappelons tout d'abord un résultat classique dû à Rudin [22] :

Théorème 6.1 : Tout ensemble de Sidon $\Lambda \subset \Gamma$ possède la propriété suivante :

$$(6.1) \quad \begin{cases} \text{Il existe une constante } K \text{ telle que} \\ \\ \forall\, f \in L^2_\Lambda(G),\ \forall\, q > 2, \quad \|f\|_q \leq K\sqrt{q}\ \|f\|_2 \quad . \end{cases}$$

Démonstration : Soit $\Lambda = \{\gamma_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de Sidon de constante C. Le théorème 2.1 de l'exposé VII (de ce même séminaire) montre en particulier :

$$\forall\, q > 2 \qquad\qquad \|f\|_q \leq 2C\ (\mathbb{E}\,|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\ \hat{f}(\gamma_i)|^q)^{1/q}$$

pour tout f à spectre dans $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

D'après les inégalités K de l'exposé VII -c'est-à-dire d'après les inégalités de Khintchine- on a

$$\|f\|_q \leq 2C\ \sqrt{q-1}\ \|f\|_2$$

et cette dernière inégalité reste évidemment vérifiée pour tout f dans $L^2_\Lambda(G)$. cqfd.

Remarque 6.1 : Par des calculs élémentaires (développement en série de $\exp|x|^2$ et formule de Stirling) on peut montrer qu'il existe des constantes a, b telles que :

$$(6.2)\quad \forall f \in L^{\psi}(G) \qquad \frac{1}{a} \|f\|_{\psi} \leq \sup_{q>2} \left(\frac{\|f\|_q}{\sqrt{q}} \right) \leq b \|f\|_{\psi} \quad .$$

La propriété (6.1) équivaut donc à :

$$\exists K' \text{ tel que } \forall f \in L^2_{\Lambda}(G) \qquad \|f\|_{\psi} \leq K' \|f\|_2 \quad .$$

La réciproque du théorème 6.1 est restée un problème ouvert depuis l'article de Rudin [22] ; on la connaissait dans le cas particulier de groupes de la forme $\mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}}$ avec p premier, car dans ce cas elle résulte d'un théorème de [14]. Cette réciproque a été démontrée récemment dans [19] par une combinaison d'un théorème de Rider [21] et de l'inégalité de Fernique. La démonstration est particulièrement simple avec le matériel présenté au § 5 :

Théorème 6.2 : Tout ensemble Λ possédant la propriété (6.1) est un ensemble de Sidon.

Démonstration : Soit P la projection orthogonale de $L^2(G)$ sur $L^2_{\Lambda}(G)$. On a d'après (6.1) et (6.2)

$$\forall f \in L^2(G) \qquad \|Pf\|_{\psi} \leq aK \|Pf\|_2 \leq aK \|f\|_2 \quad .$$

Par conséquent : $P \in M_{2,\psi}$ et $\|P\|_{2,\psi} \leq aK$. D'après le théorème (5.1) on a :

$$\sum_{\gamma \in \Lambda} |\hat{f}(\gamma)| \leq aKC_o [\![f]\!] \quad .$$

D'après la proposition 1 de l'exposé XIV (basée sur Rider [21]), on conclut bien que Λ est de Sidon.

Remarque 6.2 : Notons $K(\Lambda)$ la borne inférieure des nombres K tels que Λ vérifie (6.1), et $H(\Lambda)$ la plus petite constante λ telle que $\forall f \in C_{p.s\Lambda}(G)$, $\sum_{\gamma \in \Lambda} |\hat{f}(\gamma)| \leq \lambda [\![f]\!]$. La démonstration précédente montre que :

$$H(\Lambda) \leq a\, C_o\, K(\Lambda) \quad ,$$

(où le coefficient a C_o est une constante numérique). Réciproquement, on peut montrer (laissé au lecteur) qu'il existe une constante numérique D telle que

$$K(\Lambda) \leq D\, H(\Lambda) \quad .$$

Les paramètres $K(\Lambda)$ et $H(\Lambda)$ sont donc essentiellement équivalents.
Soit $S(\Lambda)$ la constante "de Sidonicité" de Λ, c'est-à-dire la borne inférieure des C telle que Λ est de Sidon de constante C.
Il est bon de souligner que, contrairement à $H(\Lambda)$, la constante $S(\Lambda)$ n'est pas en général proportionnelle à $K(\Lambda)$. En effet, soit $\Lambda_n = \{1,\ldots,n\} \subset \mathbb{Z}$; les constantes $S(\Lambda_n)$ et $K(\Lambda_n)$ ne sont pas équivalentes quand $n \to \infty$: en effet, on peut vérifier qu'il existe $\delta > 0$ tel que : $\delta \sqrt{\frac{n}{\operatorname{Log} n}} \leq K(\Lambda_n) \leq \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{n}{\operatorname{Log} n}}$ mais $\delta \sqrt{n} \leq S(\Lambda_n) \leq \sqrt{n}$.

On obtient par la même méthode des renseignements sur les ensembles p-Sidon (cf. définition 6.1) qui sont étudiés dans [4] et [9]. Les résultats ci-dessous sont toutefois incomplets , faute d'une généralisation convenable du théorème de Rider [21] ; on ignore d'ailleurs, pour $p > 1$, si la réunion de deux ensembles p-Sidon est encore p-Sidon.

<u>Définition 6.1</u> : Soit p dans $[1,2[$ et $\Lambda \subset \Gamma$. On dit que Λ est p-Sidon s'il existe une constante C telle que : $\forall f \in C_\Lambda(G)$:

$$\Big(\sum_{\gamma \in \Lambda} |\hat{f}(\gamma)|^p\Big)^{1/p} \leq C\, \|f\|_\infty \quad .$$

Pour $p = 1$, on retrouve la notion usuelle d'ensemble de Sidon.

D'après la proposition 1 et la remarque 2 de l'exposé XIV du même séminaire, les ensembles de Sidon $\Lambda \subset \Gamma$ sont caractérisés par l'inclusion $C_{p.s\Lambda}(G) \subset C_\Lambda(G)$. Il est donc naturel d'examiner la classe des ensembles Λ qui vérifient l'inclusion inverse :

<u>Définition 6.2</u> : Un ensemble $\Lambda \subset \Gamma$ est dit stationnaire si $C_\Lambda(G) \subset C_{p.s\Lambda}(G)$, ce qui équivaut (par le théorème du graphe fermé) à :
Il existe une constante B telle que :

$$(6.4) \quad \forall f \in C_\Lambda(G) \qquad [\![f]\!] \leq B\, \|f\|_\infty \quad .$$

Nous verrons au paragraphe suivant (cf. Remarque 7.3) une autre formulation de la propriété précédente qui explique le choix de l'adjectif "stationnaire".

On peut généraliser en partie le théorème 6.2 :

<u>Théorème 6.3</u> : Soit $\Lambda \subset \Gamma$. On suppose qu'il existe une constante $K \geq 1$ et k réel ≥ 1 tels que :

$$(6.3) \quad \forall\, q > 2,\ \forall\, f \in L^2_\Lambda(G) \qquad \|f\|_q \leq K\, q^{k/2}\, \|f\|_2 \quad .$$

On a alors : $\forall\, f \in C_{p.s\Lambda}(G)$

$$(6.4) \qquad (\Sigma\, |\hat{f}(\gamma)|^p)^{1/p} \leq \Delta\, K\, [\![f]\!]$$

où $p = \frac{2k}{k+1}$ et Δ est une constante numérique.

<u>Démonstration</u> : Soit $(a_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ des scalaires tels que $\Sigma\, |a_\gamma|^{p'} \leq 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Fixons $q > 2$. Posons $a'_\gamma = a_\gamma$ si $|a_\gamma| \leq q^{(1-k)/2}$ et $a'_\gamma = 0$ sinon ; posons aussi $a''_\gamma = a_\gamma - a'_\gamma$. Un calcul simple montre que $\sum_{\gamma\in\Gamma} |a''_\gamma|^2 \leq q$. On a donc : $\forall\, f \in L^2(G)$

$$\Big\| \sum_{\gamma\in\Lambda} a_\gamma\, \hat{f}(\gamma)\, \gamma \Big\|_q \leq \|\Sigma\, a'_\gamma\, \hat{f}(\gamma)\, \gamma\|_q + \|\Sigma\, a''_\gamma\, \hat{f}(\gamma)\, \gamma\|_q$$

soit, d'après (6.3) :

$$\leq K\, q^{1/2}\, \|f\|_2 + \Sigma\, |a''_\gamma\, \hat{f}(\gamma)|$$

$$\leq K\, q^{1/2}\, \|f\|_2 + (\Sigma\, |a''_\gamma|^2)^{1/2}\, \|f\|_2$$

$$\leq (K+1)\sqrt{q}\, \|f\|_2 \quad .$$

On en déduit, d'après (6.2) :

$$\Big\| \sum_{\gamma\in\Lambda} a_\gamma\, \hat{f}(\gamma)\, \gamma \Big\|_\psi \leq a(K+1)\|f\|_2 \quad ,$$

d'où, d'après (5.2) :

$$\sum_{\gamma\in\Lambda} |a_\gamma\, \hat{f}(\gamma)| \leq a(K+1)\, C_o [\![f]\!] \quad ,$$

on obtient finalement (6.4) (avec $\Delta \leq 2a\, C_o$) puisque $(a_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ est un point arbitraire dans la boule unité de $\ell^{p'}(\Lambda)$.

Corollaire 6.1 : Si un ensemble $\Lambda \subset \Gamma$ vérifie (6.3) et si Λ est stationnaire, alors Λ est p-Sidon avec $p = \frac{2k}{k+1}$.

Démonstration : Evidente.

Il serait intéressant de développer la théorie des ensembles stationnaires et de les comparer aux différentes classes d'ensembles "fins" considérés en analyse harmonique ; la proposition suivante montre en effet que les ensembles stationnaires sont plutôt "minces" :

Proposition 6.1 : Un sous-ensemble stationnaire de $\mathbb{Z}$ ne peut pas contenir de progressions arithmétiques arbitrairement longues.

Démonstration : Considérons une progression arithmétique $E_N = \{\ell + m, \ell + 2m, \ldots, \ell + Nm\}$ de N termes. D'après une construction classique due à Rudin et Shapiro (cf. [11] p. 134), il existe un choix de signes $\varepsilon_j = \pm 1$, $1 \leq j \leq N$, tel que :

$$\sup_{t\in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} \left| \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j\, e^{2\pi i(\ell + jm)t} \right| \leq 16\sqrt{N} .$$

Notons f la fonction définie sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par : $\forall\, t \in \mathbb{T}$

$$f(t) = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j\, e^{2\pi i(\ell + jm)t} .$$

Le lecteur vérifiera que

$$[\![f]\!] \geq \delta \sqrt{N \operatorname{Log} N}$$

où $\delta > 0$ est une constante indépendante de N. Par conséquent, si $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ vérifie (6.4) et si $E_N \subset \Lambda$ on doit avoir $\delta\sqrt{N \operatorname{Log} N} \leq 16\, B\sqrt{N}$, d'où $N \leq \exp(16\, B/\delta)^2$, ce qui est bien la propriété annoncée.

Les ensembles de Sidon sont évidemment des exemples d'ensembles stationnaires, mais il y en a d'autres :

Proposition 6.2 : Soit $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble de Sidon. Pour tout entier

$N \geq 1$, l'ensemble Λ^N est un sous-ensemble stationnaire du groupe produit Γ^N.

Soulignons que, si $N \geq 2$ et si Λ est infini, alors Λ^N n'est pas un ensemble de Sidon. On voit facilement que l'on peut identifier $C_{\Lambda^N}(G^N)$ au produit tensoriel $\underbrace{C_\Lambda(G) \hat{\otimes}_\varepsilon \dots \hat{\otimes}_\varepsilon C_\Lambda(G)}_{N \text{ fois}}$; par conséquent, si Λ est de Sidon, $C_{\Lambda^N}(G^N)$ s'identifie à $\ell^1(\Lambda) \hat{\otimes}_\varepsilon \dots \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^1(\Lambda)$. Compte-tenu de cette identification, la proposition 6.2 résulte immédiatement des deux lemmes suivants ; pour simplifier, nous ne démontrons que le cas $N = 2$.

<u>Lemme 6.1</u> : Soit j un entier avec $1 \leq j \leq N$. Pour tout λ dans Λ, on pose :

$$B_\lambda^j = \Lambda^{j-1} \times \{\lambda\} \times \Lambda^{N-j} \subset \Lambda^N \quad .$$

On a alors, si Λ est de Sidon :

$$\forall\, f \in C_{\Lambda^N}(G^N) \qquad \sum_{\lambda \in \Lambda} \Big(\sum_{\gamma \in B_\lambda^j} |\hat{f}(\gamma)|^2 \Big)^{1/2} \leq M \, \|f\|_\infty$$

où M est une constante ne dépendant que de N.

<u>Démonstration</u> : Posons $S = \{-1,+1\}^\Lambda$, notons $\varepsilon_\lambda(s)$ la coordonnée d'indice λ d'un point s de S et Q la probabilité uniforme sur S. Si Λ est de Sidon de constante C, on a immédiatement :

$\forall\, f \in C_{\Lambda^N}(G^N)$,

$$\sup_{s \in S} \sum_{\lambda' \in \Lambda} \Big| \sum_{\lambda \in \Lambda} \varepsilon_\lambda(s) \, \hat{f}(\lambda,\lambda') \Big| \leq C^2 \, \|f\|_\infty$$

et a fortiori :

$$\sum_{\lambda' \in \Lambda} \int \Big| \sum_{\lambda \in \Lambda} \varepsilon_\lambda(s) \, \hat{f}(\lambda,\lambda') \Big| \, dQ(s) \leq C^2 \, \|f\|_\infty$$

soit, d'après les inégalités de Khintchine (cf. exposé VII),

$$\sum_{\lambda' \in \Lambda} \Big(\sum_{\lambda \in \Lambda} |\hat{f}(\lambda,\lambda')|^2 \Big)^{1/2} \leq C^2 \, K_{1,2} \, \|f\|_\infty \quad .$$

Ce qui démontre le résultat annoncé pour $N = 2$ et $j = 2$; le cas $j = 1$ s'obtient en inversant les rôles de λ et λ'. Pour $N > 2$, la démonstration est tout-à-fait similaire.

Lemme 6.2 : Soient $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble de Sidon, $N \geq 1$ et f dans $L^2_{\Lambda^N}(G^N)$.
f appartient à $C_{p.s_{\Lambda^N}}(G^N)$ si et seulement si

$$\forall\ j = 1,\dots,N \qquad \sum_{\lambda\in\Lambda} \Big(\sum_{\gamma\in B^j_\lambda} |\hat{f}(\gamma)|^2\Big)^{1/2} < \infty ,$$

(où B^j_λ est comme au Lemme 6.1).

Modulo l'identification de $C_{\Lambda^N}(G^N)$ avec $\ell^1(\Lambda)\hat{\otimes}_\varepsilon \dots \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^1(\Lambda)$ ce lemme se démontre en suivant une idée due à Simone Chevet [2] ; pour plus de détails le lecteur peut se référer à l'exposé XIX de ce séminaire.

Remarque : En se reportant éventuellement à l'exposé VII, le lecteur vérifiera que l'ensemble Λ^N considéré à la proposition 6.2 vérifie les hypothèses du théorème 6.3 avec $k = N$; par conséquent (cf. corollaire 6.1) Λ^N est un ensemble $\frac{2N}{N+1}$- Sidon.
On peut voir par ailleurs que Λ^N n'est pas p-Sidon si $p < \frac{2N}{N+1}$ sauf si Λ est un ensemble fini.
On retrouve ainsi les résultats de [4] et [9] : pour tout p de la forme $\frac{2k}{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$, il existe un ensemble p-Sidon qui n'est pas q-Sidon si $q < p$. Ce n'est que tout récemment que R. Blei a généralisé ce résultat pour p quelconque dans l'intervalle $1 < p < 2$ (cf. R. Blei, Fractional cartesian products of sets).

§ 7. COMPARAISON DES SERIES DE FOURIER ALEATOIRES.

Les résultats de cette section paraîtront dans un article [16] en collaboration avec M. Marcus.

On va voir que la norme $||| \ |||$ (qui est équivalente à la norme initiale de $C_{p.s}(G)$ d'après le théorème 5.2) possède des propriétés remarquables.
Le premier résultat est très proche de celui de [15] (cf. aussi [6]).

Proposition 7.1 : Soit $(\xi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ une famille quelconque de v.a. définie sur un espace de probabilité auxiliaire $(\Omega',\mathcal{A}',\mathbb{P}')$. Notons $\mathbb{E}'$ l'espérance relative à $\mathbb{P}'$ ♦.

On a alors, pour tout polynôme trigonométrique f :

$$(7.1)\qquad (\mathbb{E}' |||\Sigma\, \xi_\gamma\, \hat{f}(\gamma)\,\gamma|||^2)^{1/2} \le \sup_{\gamma\in\Gamma} (\mathbb{E}' |\xi_\gamma|^2)^{1/2}\, |||f||| \quad .$$

Démonstration : Soit $f = \sum_1^\infty h_n * k_n$ une représentation de f telle que $\sum_1^\infty \|h_n\|_2\, \|k_n\|_{\tilde\psi} < \infty$. On peut supposer que h_n est un polynôme trigonométrique.

Posons $H_n(\omega') = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma(\omega')\, \hat{h}_n(\gamma)\,\gamma$, de sorte que :

$$\forall\, \omega' \in \Omega' \qquad \sum_1^\infty H_n(\omega') * k_n = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma(\omega')\, \hat{f}(\gamma)\,\gamma \quad ,$$

et :

$$\mathbb{E}' \|H_n\|_2^2 \le \|h_n\|_2^2 \sup \mathbb{E}' |\xi_\gamma|^2 \quad ,$$

donc :

$$|||\Sigma\, \xi_\gamma(\omega')\, \hat{f}(\gamma)\,\gamma||| \le \sum_1^\infty \|H_n(\omega')\|_2\, \|k_n\|_{\tilde\psi} \quad .$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}' |||\Sigma\, \xi_\gamma\, \hat{f}(\gamma)\,\gamma|||^2)^{1/2} &\le \sum_1^\infty (\mathbb{E}' \|H_n\|_2^2)^{1/2}\, \|k_n\|_{\tilde\psi} \\ &\le \sum_1^\infty \|h_n\|_2\, \|k_n\|_{\tilde\psi} \sup(\mathbb{E}'|\xi_\gamma|^2)^{1/2}\end{aligned}$$

et (7.1) en résulte immédiatement.

Corollaire 7.1 : Soit $f_1,\dots,f_N$ dans $C_{p.s}(G)$ et soit f tel que :

$$\forall\, \gamma \in \Gamma \qquad |\hat{f}(\gamma)| = (\sum_{j=1}^N |\hat{f}_j(\gamma)|^2)^{1/2} \quad .$$

On a alors :

$$(7.2)\qquad (\sum_1^N |||f_j|||^2)^{1/2} \le |||f||| \quad .$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer (7.1) pour des variables ξ_γ de la forme :

$$\xi_\gamma(\omega') = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1_{A_j}(\omega')}{\mathbb{P}'(A_j)^{1/2}}\right) \frac{\hat{f}_j(\gamma)}{\hat{f}(\gamma)}$$

♦ Pour la distinguer du signe $\mathbb{E}$ représentant l'espérance relative à l'espace $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ sur lequel est définie la famille $(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$.

où $A_1,\ldots,A_N$ sont des parties mesurables disjointes de Ω' de probabilité positive.

Compte-tenu du théorème 5.2, un argument général (cf. [17] théorème 3) permet de déduire le

<u>Corollaire 7.2</u> : Soit (g_n) une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes de variance 1, on a :

$\forall\, f_1,\ldots,f_N \in C_{p.s}(G)$

$$(7.3) \qquad \left(\sum_1^N |||f_j|||^2\right)^{1/2} \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \mathbb{E}\ \left|\left|\left|\sum_1^N g_j\ f_j\right|\right|\right| .$$

Par conséquent, l'espace $C_{p.s}(G)$ est de cotype 2.

Pour plus de détails sur les espaces de cotype 2, voir [18].

<u>Démonstration</u> : Noter l'identité évidente

$$(7.4) \quad \forall\, f \in C_{p.s}(G) \qquad |||f||| = \left|\left|\left|\sum |\hat{f}(\gamma)|\ \gamma\right|\right|\right| .$$

Soit f comme au corollaire précédent. On a :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ |||f||| = \left\|\ \mathbb{E}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} \left|\sum_1^N g_j\ \hat{f}_j(\gamma)\right| \cdot \gamma\right)\right|\!\Big\|$$

$$\le \mathbb{E}\ \left|\left|\left|\sum_\gamma \left|\sum_1^N g_j\ \hat{f}_j(\gamma)\right|\ \gamma\right|\right|\right|$$

soit, d'après (7.4) :

$$\le \mathbb{E}\ \left|\left|\left|\sum_1^N g_j\ f_j\right|\right|\right| ,$$

et (7.3) apparaît donc comme une conséquence de (7.2).

<u>Remarque 7.1</u> : Les résultats de [15] sur le théorème limite central sont intimement liés au fait que l'espace $C_{p.s}(G)$ est de cotype 2 ; (pour plus de détails, voir [7], theorem 5).

Rappelons quelques remarques élémentaires :

<u>Remarque 7.2</u> : Soit $(\xi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ une famille symétrique de v.a., c'est-à-dire telle que, pour tout choix de signes $\theta_\gamma = \pm 1$, la famille $(\theta_\gamma\ \xi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ a la même distribution que $(\xi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$.

Posons $s_\gamma =$ signe (ξ_γ). Il est clair que $(s_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est une famille de v.a. indépendantes prenant les valeurs +1 et -1 avec probabilité 1/2. De plus, si $\mathcal{S}$ est la tribu engendrée par $(s_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, on vérifie facilement que :

$$\mathbb{E}'\,(\xi_\gamma|\mathcal{S}) = s_\gamma\ \mathbb{E}'\,|\xi_\gamma| \quad .$$

Par conséquent, pour toute v.a. intégrable Z à valeurs dans un espace de Banach quelconque, on a :

$$\mathbb{E}'\,\|\mathbb{E}'(Z|\mathcal{S})\| \leq \mathbb{E}'\,\|Z\| \quad .$$

Dans le cas particulier considéré ici, on a donc, pour tout polynôme trigonométrique f :

$$(7.5) \qquad \mathbb{E}'\,\|\Sigma\ s_\gamma\ \mathbb{E}'|\xi_\gamma|\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma\|_\infty \leq \mathbb{E}'\,\|\Sigma\ \xi_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma\|_\infty \quad .$$

Posons $\varepsilon_\gamma = \text{signe}\ (g_\gamma)$ et appliquons (7.5), on trouve :

$$(7.6) \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathbb{E}\,\|\Sigma\ \varepsilon_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma\|_\infty \leq \mathbb{E}\,\|\Sigma\ g_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma\|_\infty = [\![f]\!] \quad .$$

On déduit alors de (7.6), (7.1) et (5.7) :

$$\mathbb{E}\,\mathbb{E}'\,\|\Sigma\ \varepsilon_\gamma\ \xi_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ K_1\ K_2\ \sup(\mathbb{E}'\,|\xi_\gamma|^2)^{1/2}\ [\![f]\!]$$

et si $(\xi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est une famille symétrique, on peut écrire simplement :

$$(7.7) \qquad \mathbb{E}'\,\|\Sigma\ \xi_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ K_1\ K_2\ \sup(\mathbb{E}'\,|\xi_\gamma|^2)^{1/2}\ [\![f]\!] \quad .$$

Nous pouvons maintenant démontrer le principal résultat de [16] :

<u>Théorème 7.1</u> [16] : Il existe une constante L telle que pour tout polynôme trigonométrique f :

$$(7.8) \qquad \mathbb{E}\,\|\Sigma\ g_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma\|_\infty \leq L\ \mathbb{E}\,\|\Sigma\ \varepsilon_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma\|_\infty \quad ,$$

(où $(\varepsilon_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est une famille de v.a. indépendantes égales à -1 et +1 avec probabilité 1/2).

Démonstration : Posons $\chi = K_1\ K_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Soit c assez grand pour que

(7.9) $$\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{E}\,(|g_\gamma|^2\ 1_{\{|g_\gamma|>c\}}) \le \frac{\chi}{2} \ .$$

Posons $g'_\gamma = g_\gamma\ 1_{\{|g_\gamma|\le c\}}$ et $g''_\gamma = g_\gamma - g'_\gamma$. Par un argument de symétrie, on voit facilement que :

$$\mathbb{E}\,\|\Sigma\ g'_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma\|_\infty \le c\ \mathbb{E}\,\|\Sigma\ \varepsilon_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma\|_\infty \ .$$

D'autre part, puisque $(g''_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est une famille symétrique, on peut appliquer (7.7) et on en tire :

$$\mathbb{E}\,\|\Sigma\ g''_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma\|_\infty \le \chi\ \sup(\mathbb{E}\,|g''_\gamma|^2)^{1/2}\ [\![f]\!]$$

soit, d'après (7.9) : $$\le \frac{1}{2}\ [\![f]\!] \ .$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} [\![f]\!] &\le \mathbb{E}\,\|\Sigma\ g'_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma\|_\infty + \mathbb{E}\,\|\Sigma\ g''_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma\|_\infty \\ &\le c\ \mathbb{E}\,\|\Sigma\ \varepsilon_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma\|_\infty + \frac{1}{2}\ [\![f]\!] \ , \end{aligned}$$

d'où finalement (7.8) avec $L = 2c$.

Corollaire 7.3 : Soit $(\xi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ une famille symétrique de v.a. telle que :

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{E}'\ |\xi_\gamma|^2 < \infty \quad \text{et} \quad \inf_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{E}'\ |\xi_\gamma| > 0 \ ,$$

et soit f dans $L^2(G)$.
Dans ces conditions, la série $\Sigma\ \xi_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma$ est convergente dans $L^1(d\mathbb{P}';C(G))$ si et seulement si la série $\Sigma\ \varepsilon_\gamma\ \hat{f}(\gamma)\ \gamma$ est elle-même convergente dans $L^1(d\mathbb{P};C(G))$.

La démonstration résulte de (7.7) et (7.8) d'une part, et de (7.5) d'autre part.

Remarque 7.3 : En fait on peut remplacer dans l'énoncé précédent la convergence dans $L^1(d\mathbb{P}';C(G))$ par la convergence presque sûre dans C(G) cf. [16].

Remarque 7.4 : Le théorème 7.1 montre que les ensembles $\Lambda \subset \Gamma$ que l'on a appelés stationnaires (cf. définition 6.2) sont caractérisés par la propriété suivante :
Soit f dans $L^2_\Lambda(G)$, s'il existe un choix de signes $\varepsilon_\gamma = \pm 1$ tel que la série $\sum \varepsilon_\gamma \hat{f}(\gamma)\, \gamma$ est la série de Fourier d'une fonction continue sur G, alors en fait presque tout choix de signes $\varepsilon_\gamma = \pm 1$ a la même propriété.

Remarque 7.4 : La remarque précédente et l'étude des exemples de la proposition 6.2 conduisent au résultat suivant :
Soit N un entier ≥ 1. Notons $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonique de ℓ^1 et considérons des scalaires $(\alpha_{j_1 \dots j_N})$ indexés par $\mathbb{N}^N$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) il existe un choix de signes $\varepsilon_{j_1\dots j_N} = \pm 1$ tel que la suite $S_n = \sum_{j_1\leq n \dots j_N \leq n} \varepsilon_{j_1\dots j_N} \alpha_{j_1\dots j_N} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_N}$ est bornée dans $\ell^1 \hat{\otimes}_\varepsilon \dots \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^1$.

ii) pour presque tout choix de signes $\varepsilon_{j_1\dots j_N} = \pm 1$ la suite S_n est convergente dans $\ell^1 \hat{\otimes}_\varepsilon \dots \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^1$.

iii) $\forall\, k = 1,2,\dots,N \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{(j_1,\dots,j_N)\in B_j^k} |\alpha_{j_1\dots j_N}|^2 \Big)^{1/2} < \infty$

où l'on a posé $B_j^k = \mathbb{N}^{k-1} \times \{j\} \times \mathbb{N}^{N-k}$.
Ce résultat est étroitement lié à certaines estimations de [23] que l'on peut retrouver en dualisant l'énoncé ci-dessus.

§ 8. REMARQUES FINALES.

Définition 8.1 : Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. scalaires sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Nous dirons que $(\varphi_n)_n$ est une suite "pseudo-gaussienne" s'il existe une constante K telle que

$$(8.1) \quad \forall\, (\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \qquad \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{|\sum \alpha_n \varphi_n|^2}{K \sum |\alpha_n|^2} \right\} \leq 2 .$$

Définition 8.2 : Soit T un ensemble. Un processus $(Y_t)_{t\in T}$ dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ sera dit pseudo-gaussien s'il existe une constante K telle que :

$$\forall\ (s,t) \in T \times T \qquad \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{|Y_t - Y_s|^2}{K\ \mathbb{E}\, |Y_t - Y_s|^2} \right\} \leq 2 \quad .$$

En liaison avec les méthodes de cet exposé, le problème suivant semble ouvert :

<u>Problème 8.1</u> : Existe-t-il une constante C vérifiant la propriété suivante : pour toute suite pseudo-gaussienne $(\varphi_n)_n$ vérifiant (8.1) et pour toute suite $(x_1,\ldots,x_n,\ldots)$ dans un espace de Banach quelconque X, on a :

$$(*) \quad \forall\ n \geq 1 \qquad \mathbb{E} \left\|\sum_1^n \varphi_i\ x_i\right\| \leq C\ K\ \mathbb{E} \left\|\sum_1^n g_i\ x_i\right\| \quad ?$$

(Rappelons que (g_n) est une suite de v.a. gaussiennes indépendantes orthonormales.)

Dans le cas particulier où $X = C(G)$ (G groupe abélien compact) et où x_i est de la forme $x_i = \alpha_i\ \gamma_i$ -avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $\gamma_i \in \Gamma$- l'inégalité (*) est vraie pour une certaine constante C. En effet cela résulte d'une part de la minoration de Fernique (i.e. le côté gauche de (3.1)) et d'autre part de la démonstration donnée à la remarque 4.3 (cette démonstration basée sur l'inégalité (4.6) s'adapte facilement au cas où $Y_t = \sum_1^n \varphi_i\ \alpha_i\ \gamma_i(t)$ avec $(\varphi_n)_n$ quasi-gaussienne).

Le lecteur notera que c'est cette inégalité (*) -dans le cas particulier $x_i = \alpha_i\ \gamma_i$ - qui joue le rôle fondamental dans tout cet exposé. La condition d'entropie apparaît uniquement comme un moyen pour établir (*), elle est nécessaire pour la continuité d'un processus <u>gaussien stationnaire</u> mais elle est suffisante pour une classe de processus plus générale que celle des processus gaussiens : les processus pseudo-gaussiens. Le fait que le théorème de Dudley (i.e. la suffisance de la condition d'entropie) s'applique aux processus pseudo-gaussiens est connu des spécialistes depuis longtemps, mais semble être resté implicite. La notion de variable "sous-gaussienne " (cf. [8]) ne paraît pas suffire aux besoins du présent exposé.

Pour finir, signalons les très nombreux liens existant entre les questions précédentes et la théorie des applications radonifiantes (cf. Séminaire L. Schwartz 1969/70, Ecole Polytechnique, Paris).

Par exemple, la remarque 4.1 peut s'interpréter comme une factorisation de Pietsch d'un opérateur φ-sommant : l'injection de l'espace des fonctions d-lipschitziennes dans l'espace des fonctions continues.

Enfin, le problème 8.1 est équivalent à la question suivante : si un opérateur linéaire borné $u : \ell^2 \to X$ radonifie la probabilité cylindrique de Gauss, est-il $(\varphi, 0)$-radonifiant pour $\varphi(t) = \exp |t|^2$?
Le problème 8.1 est aussi lié au problème de l'existence de mesures majorantes au sens de Fernique (cf. [5] ch. 6) ; pour plus de détails sur la méthode des mesures majorantes appliquée aux processus "pseudo-gaussiens" le lecteur peut se référer à la thèse de 3ème cycle de C. Nanopoulos et P. Nobelis : "Etude de la régularité des fonctions aléatoires et de leurs propriétés limites" (Strasbourg 1977).

* * * *

REFERENCES

[1] Y. Belyaev, Continuity and Hölder's conditions for sample functions of stationary Gaussian processes, Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. 2, 1960.

[2] S. Chevet, Un résultat sur les mesures gaussiennes, C.R. Acad. Sc. Paris A 284 (1977) 441-444.

[3] R Dudley, The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes, J. Funct. Analysis 1 (1967) 290-330.

[4] R.E. Edwards and K. Ross, p-Sidon sets, J. Funct. Analysis 15 (1974) 404-427.

[5] X. Fernique, Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes, Springer Lecture Notes No 480.

[6] X. Fernique, Continuité et théorème central limite pour les transformées de Fourier des mesures aléatoires du second ordre, Z. f. Wahrshein. 42 (1978) p. 57.

[7] N. Jain, Central limit theorem and related questions in Banach space, Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. Vol. XXXI (1977) 55-66.

[8] N. Jain et M. Marcus, Sufficient conditions for the continuity of stationary Gaussian processes and applications to random series of functions, Ann. Inst. Fourier 24 (1974) 117-141.

[9] G.W. Johnson et G.S. Woodward, On p-Sidon sets, Indiana U. Math. J. 24 (1974) 161-167.

[10] J.P. Kahane, Some random series of functions, HMM. Lexington Press (1968).

[11] J.P. Kahane et R. Salem, Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Hermann Paris 1963 .

[12] M.A. Krasnoselskii et Y. Rutickii, Convex functions and Orlicz spaces, Noordhof, 1961 (Groningen).

[13] R. Larsen, An introduction to the theory of multipliers, Springer (Die Grundlehren ... No 175).

[14] M.P. Malliavin-Brameret et P. Malliavin, Caractérisation arithmétique d'une classe d'ensembles de Helson, C.R. Acad. Sc. Paris 164 A (1967) 192-193.

[15] M.B. Marcus, Continuity and the central limit theorem for random trigonometric series, Z. f. Wahrshein. 42 (1978) 35-56.

[16] M. Marcus et G. Pisier. En préparation.

[17] B. Maurey, Type et cotype dans les espaces munis de structure locale inconditionnelle, Exposé No 24-25, Séminaire Maurey-Schwartz 1973-74, Ecole Polytechnique Paris.

[18] B. Maurey et G. Pisier, Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, Studia Math. 58 (1976) 45-90.

[19] G. Pisier, Ensembles de Sidon et processus gaussiens, et, Lacunarité et processus gaussiens, deux notes à paraître aux C.R. Acad. Sc. Paris.

[20] C. Preston, Banach spaces arising from some integral inequalities, Indiana U. Math. J. 20 (1971) 997-1015.

[21] D. Rider, Randomly continuous functions and Sidon sets, Duke Math. J. 42 (1975) 759-764.

[22] W. Rudin, Trigonometric series with gaps, Journal of Maths. and Mechanics 9 (1960) 203-227.

[23] N. Th. Varopoulos, On an inequality of Von Neumann and an application of the theory of tensor products to operator theory, J. Funct. Analysis 16 (1974) 83-100.
