G. Pisier

Ensembles de Sidon et espaces de cotype 2

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 14, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978____A11_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L A   G E O M E T R I E

D E S   E S P A C E S   D E   B A N A C H

1977-1978

ENSEMBLES DE SIDON ET ESPACES DE COTYPE 2

G. PISIER

Exposé No XIV   10 Février 1978

INTRODUCTION.

La plus grande partie de cet exposé est consacrée à la démonstration d'un théorème de Rider [7], basé sur des idées de Drury [1]. Il s'agit d'une caractérisation des ensembles de Sidon par des propriétés des séries de Fourier aléatoires à spectre dans l'ensemble considéré. A la fin de l'exposé, on donne une application généralisant certains résultats de [8] et [6]

Dans tout cet exposé, G est un groupe abélien compact de dual Γ. Rappelons la

Définition 1 : Un sous-ensemble Λ de Γ est dit "de Sidon" s'il existe une constante C telle que, pour toute famille $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ de scalaires dont au plus un nombre fini sont non nuls :

(1) $$\sum_{\gamma\in\Lambda} |\alpha_\gamma| \leq C \,\|\sum_{\gamma\in\Lambda} \alpha_\gamma \gamma\|_{C(G)}$$

où l'on a noté C(G) l'espace des fonctions continues sur G (et on a considéré les éléments de Γ comme des fonctions continues sur G). Si Λ vérifie (1), on dira que Λ est "de Sidon de constante C ".
Le lecteur qui s'intéresse aux ensembles de Sidon peut se référer à [3].
On note $\|\ \|_\infty$ la norme dans l'espace C(G) des fonctions continues sur G, et $\|\ \|_M$ la norme dans l'espace M(G) des mesures bornées sur G. Pour μ dans M(G) la transformée de Fourier de μ est notée : $\forall\, \gamma\in\Gamma$, $\hat{\mu}(\gamma) = \int \overline{\gamma(x)}\, d\mu(x)$, et pour φ dans C(G) $\hat{\varphi}(\gamma) = \int \overline{\gamma(x)}\, \varphi(x)\, dm(x)$.
Notons Ω l'espace $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$ et ε_n la n-ième coordonnée sur Ω ; on note $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. La suite $\{\varepsilon_n\}$ peut être considérée comme un ensemble de Sidon dans le dual du groupe abélien compact Ω puisque, pour toute suite finie dans $\mathbb{C}$, on a :

(2) $$\sum |\alpha_n| \leq 2 \max_{\omega\in\Omega} |\sum \varepsilon_n(\omega)\, \alpha_n| \ .$$

Cet ensemble de Sidon particulier joue un rôle fondamental dans la théorie.

Nous aurons besoin des deux lemmes élémentaires suivants :

Lemme 1 : Soient $\Lambda = \{\gamma_1,\dots,\gamma_n\} \subset \Gamma$ et C', δ des constantes positives avec $0 < \delta < 1$. Supposons que :
$\forall\, \omega \in \Omega \quad \exists\, \mu_\omega \in M(G)$ tel que

$$\|\mu_\omega\|_M \leq C' \quad \text{et} \quad |\mu_\omega(\gamma_i) - \varepsilon_i(\omega)| < \delta$$

alors Λ est de Sidon de constante $(\frac{2C'}{1-\delta})$.

Démonstration : Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, posons $f = \sum_1^n \alpha_k\, \gamma_k$ et soit ω dans Ω tel que $\varepsilon_i(\omega)$ est le signe de α_i. On peut écrire

$$\sum_1^n \varepsilon_k(\omega)\ \alpha_k = \langle\mu_\omega, f\rangle + \sum_1^n [\varepsilon_k(\omega) - \mu_\omega(\gamma_k)]\alpha_k$$

d'où
$$\sum_1^n |\alpha_k| \leq |\langle\mu_\omega, f\rangle| + \delta \sum |\alpha_k|$$

et comme
$$|\langle\mu_\omega, f\rangle| \leq \|\mu_\omega\|_M\ \|f\|_\infty \leq C'\ \|f\|_\infty \quad ,$$

on trouve
$$\sum_1^n |\alpha_k| \leq \frac{C'}{1-\delta}\ \|f\|_\infty \quad .$$

Si $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, on a donc :

$$\sum_1^n |\mathrm{Re}\ \alpha_k| \leq \frac{C'}{1-\delta}\ \|\Sigma\ (\mathrm{Re}\ \alpha_k)\ \gamma_k\|_\infty$$

$$\leq \frac{C'}{1-\delta}\ \|f\|_\infty$$

et de même : $\sum |\mathrm{Im}\ \alpha_k| \leq \frac{C'}{1-\delta}\ \|f\|_\infty$, d'où finalement $\sum_1^n |\alpha_k| \leq \frac{2C'}{1-\delta}\ \|f\|_\infty$, ce qui est le résultat annoncé.

Notation : Soit $\varphi \in C(G)$ et $x \in G$, on pose $\forall\, y \in G$, $\varphi_x(y) = \varphi(x+y)$.

Lemme 2 : Soient $\varphi^1,\dots,\varphi^n$ dans $C(G)$ et $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ dans Γ. On a :

$$\int \|\sum_1^n \varepsilon_k\ \widehat{\varphi_k}(\gamma_k)\ \gamma_k\|_\infty\ d\mathbb{P} \leq 2\int \|\sum_1^n \varepsilon_k\ \varphi^k\|_\infty\ d\mathbb{P} \quad .$$

Démonstration : Fixons d'abord x dans G.
D'après le lemme 2.1 ii) de l'exposé VII de ce même séminaire, on a :

$$\int \|\sum_1^n \varepsilon_k\ \overline{\gamma_k(x)}\ \varphi^k\|_\infty\ d\mathbb{P} \leq 2\int \|\sum_1^n \varepsilon_k\ \varphi^k\|_\infty\ d\mathbb{P} \quad ; \tag{3}$$

d'autre part, on a évidemment $\forall\, \varphi \in C(G)$, $\|\varphi_x\|_\infty = \|\varphi\|_\infty$, donc

$$(4) \qquad \int \|\sum_1^n \varepsilon_k \overline{\gamma_k(x)}\, \varphi_x^k\|_\infty \, d\mathbb{P} = \int \|\sum_1^n \varepsilon_k \overline{\gamma_k(x)}\, \varphi^k\|_\infty \, d\mathbb{P} \; .$$

En combinant (3) et (4) et en intégrant en x, on trouve :

$$(5) \qquad I = \iint \|\sum_1^n \varepsilon_k \overline{\gamma_k(x)}\, \varphi_x^k\|_\infty \, d\mathbb{P}\, dm(x) \leq 2\int \|\sum_1^n \varepsilon_k\, \varphi^k\|_\infty \, d\mathbb{P} \; .$$

La convexité de $\|\cdot\|_\infty$ montre alors :

$$(6) \qquad \int \|\sum_1^n \varepsilon_k\, \widehat{\varphi^k}(\gamma_k)\, \gamma_k\|_\infty \, d\mathbb{P} = \int \|\int \{\sum_1^n \varepsilon_k \overline{\gamma_k(x)}\, \varphi_x^k\} m(dx)\|_\infty \, d\mathbb{P}$$

$$\leq I \leq 2\int \|\sum_1^n \varepsilon_k\, \varphi^k\|_\infty \, d\mathbb{P} \; ,$$

ce qui est le résultat annoncé.

<u>Notation</u> : Soit $\mathcal{A}_n$ la tribu engendrée sur $\Omega = \{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$ par les n-premières coordonnées. Pour $A \subset \{1,\ldots,n\}$ on pose $w_A = \prod_{k\in A} \varepsilon_k$ avec la convention $w_\emptyset = 1$, et on note $|A|$ le cardinal de A. A l'indexation près, le système $\{w_A\}$ n'est autre que le système dit de Walsh ou de Fourier-Walsh. Les fonctions $\{w_A | A \subset \{1,\ldots,n\}\}$ forment clairement une base orthonormale♦ dans $L^2(\Omega,\mathcal{A}_n,\mathbb{P})$. Par conséquent, pour tout espace de Banach X, tout élément ξ de $L^\infty(\Omega,\mathcal{A}_n,\mathbb{P};X)$ admet un développement unique sous la forme

$$\xi = \sum_{A\subset\{1\ldots n\}} \xi_A\, w_A \qquad \text{avec} \quad \xi_A \in X \; .$$

Noter que, comme $\mathcal{A}_n$ est finie, toute préoccupation de mesurabilité est ici sans objet.

On peut maintenant démontrer le théorème suivant, dû à Rider [7] ; la démonstration s'inspire des idées de Drury [1] et, d'ailleurs, on peut retrouver -comme une conséquence- le résultat fondamental de Drury : la réunion de deux ensembles de Sidon est un ensemble de Sidon.

♦ C'est le système de Fourier du groupe $\{-1,+1\}^n$!

Théorème 1 ([7]) : Soit $\Lambda = \{\gamma_n | n \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable de Γ. On suppose qu'il existe une constante K telle que :

$$\forall n \ \forall (\alpha_i)_{i\leq n} \in \mathbb{C}^n \qquad \sum_1^n |\alpha_i| \leq K \int \|\sum_1^n \varepsilon_i \ \alpha_i \ \gamma_i\|_\infty \ d\mathbb{P} \ .$$

Alors Λ est un ensemble de Sidon (de constante $24\sqrt{3K^3}$).

Démonstration : Il suffit évidemment de le démontrer pour Λ fini, disons $\Lambda = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$. On va chercher à construire une mesure μ_ω vérifiant les hypothèses du lemme 1. D'après le lemme 2, sous les hypothèses du théorème 1, on a : $\forall \ \varphi^1, \ldots, \varphi^n \in C(G)$

$$|\sum_1^n \widehat{\varphi^k}(\gamma_k)| \leq 2K \int \|\sum_1^n \varepsilon_k \ \varphi^k\|_\infty \ d\mathbb{P} \ .$$

On peut considérer les fonctions $\varepsilon_k \ \varphi^k$ comme des éléments de $L^1(\Omega, \mathcal{A}_n, \mathbb{P} \ ; \ C(G))$. Le théorème de Hahn-Banach, appliqué à la fonctionnelle $\sum_1^n \varepsilon_k \ \varphi^k \to \sum_1^n \widehat{\varphi^k}(\gamma_k)$, assure l'existence d'un élément ξ de norme $\leq 2K$ dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}_n, \mathbb{P} \ ; \ M(G))$ tel que

$$(7) \qquad \langle \xi, \varepsilon_k \ \varphi^k \rangle = \widehat{\varphi^k}(\gamma_k) \ .$$

Avec les notations rappelées ci-dessus, on peut développer ξ sous la forme :

$$\xi = \sum_{A\subset\{1,\ldots,n\}} w_A \ \xi_A \quad \text{avec} \quad \xi_A \in M(G) \ .$$

L'égalité (7) s'écrit :

$$(8) \qquad \langle \xi_{\{k\}}, \varphi^k \rangle = \widehat{\varphi^k}(\gamma_k) \ ,$$

soit $\qquad \xi_{\{k\}} = \bar{\gamma}_k \cdot m \ .$

Posons $\forall \ \omega \in \Omega$, $\qquad \xi_\omega = \sum_{A\subset\{1,\ldots,n\}} w_A(\omega) \ \xi_A \in M(G) \ .$

L'information portant sur la norme de ξ se traduit par :

$$(9) \quad \forall \ \omega \in \Omega \qquad \|\xi_\omega\|_M \leq 2K \ .$$

Soit φ dans $C(G)$; on peut remarquer que

$$\sum_{A\subset\{1,\dots,n\}} |\langle \xi_A,\varphi\rangle|^2 = \int |\langle \sum_A \xi_A \, w_A,\varphi\rangle|^2 \, d\mathbb{P}$$

$$\leq (2K \, \|\varphi\|_\infty)^2 \quad .$$

En particulier : $\forall\, \gamma\in\Gamma$

(10) $$\sum_{A\subset\{1,\dots,n\}} |\widehat{\xi_A}(\gamma)|^2 \leq (2K)^2 \quad .$$

On introduit pour chaque ω dans Ω la mesure :

$$\nu_\omega = \int \xi_{\omega\omega'} * \xi_{\omega'} \, d\mathbb{P}(\omega') \quad .$$

Noter que $\|\nu_\omega\| \leq \int \|\xi_{\omega\omega'}\|_M \, \|\xi_{\omega'}\|_M \, d\mathbb{P}(\omega') \leq 4K^2$.

On a $$\nu_\omega = \sum w_A(\omega) \; \xi_A * \xi_A \quad .$$

Notons que :

(11) $\forall\, \gamma\in\Gamma$ $$\langle \xi_A * \xi_A,\gamma\rangle = \langle \xi_A,\gamma\rangle^2 \quad .$$

Soit λ tel que $0<\lambda\leq 1$; posons

$$\varphi_\lambda(\omega) = \frac{1}{2}\left\{\prod_{k=1}^{n} (1+\lambda\;\varepsilon_k(\omega)) - \prod_{k=1}^{n} (1-\lambda\;\varepsilon_k(\omega))\right\} \quad .$$

On a $$\int |\varphi_\lambda|\, d\mathbb{P} \leq \int \prod_1^n |1+\lambda\;\varepsilon_k|\, d\mathbb{P} = \prod_1^n \int |1+\lambda\;\varepsilon_k|\, d\mathbb{P} = 1 \quad .$$

On peut remarquer que

$$\varphi_\lambda = \lambda \sum_1^n \varepsilon_k + \lambda^3 \sum_{\substack{A\subset\{1,\dots,n\}\\ |A|=3}} w_A + \lambda^5 \;\dots$$

La mesure qui nous permettra de conclure est la mesure définie (pour λ convenable) par :

$$\mu_\omega = \frac{1}{\lambda} \int \nu_{\omega\omega''} \varphi_\lambda(\omega'')\, d\mathbb{P}(\omega'') \quad .$$

On a tout d'abord, d'après (9) :

$$\|\mu_\omega\|_M \le \frac{1}{\lambda} \int \|\nu_{\omega\omega''}\|_M \, |\varphi_\lambda(\omega'')| \, d\mathbb{P}(\omega'')$$

$$\le \left(\frac{1}{\lambda}\right) 4K^2 \int |\varphi_\lambda| d\mathbb{P} = 4K^2/\lambda \quad .$$

D'autre part, on voit facilement que

$$\mu_\omega = \sum_{\substack{A\subset\{1,\dots,n\} \\ |A| \text{ impair}}} w_A(\omega)\, \lambda^{|A|-1}\, \xi_A * \xi_A \quad .$$

D'après (8) et (11) on a

$$\langle \xi_{\{k\}} * \xi_{\{k\}} , \gamma_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases} \quad ;$$

d'où :

$$|\langle \mu_\omega, \gamma_k\rangle - \varepsilon_k(\omega)| = \Big| \sum_{\substack{A\subset\{1,\dots,n\} \\ |A| \text{ impair } \ge 3}} \lambda^{|A|-1}\, w_A(\omega) \langle \xi_A * \xi_A , \gamma_k \rangle \Big|$$

$$\le \lambda^2 \sum_{A\subset\{1,\dots,n\}} |\langle \xi_A * \xi_A , \gamma_k\rangle|$$

soit, d'après (11) : $\le \lambda^2 \sum\limits_A |\langle \xi_A , \gamma_k \rangle|^2$

donc, d'après (10) : $\le 4K^2 \lambda^2$.

On arrive ainsi à la situation du lemme 1 : si λ est choisi assez petit pour que : $\delta = 4K^2\lambda^2 < 1$, alors μ_ω vérifie les hypothèses du lemme 1 avec $C' = 4K^2/\lambda$.

On conclut donc que Λ est un ensemble de Sidon de constante $\dfrac{16K^3}{\sqrt{\delta}(1-\delta)}$ pour tout $\delta < 1$, ce qui termine la démonstration du théorème 1 (on prend $\delta = 1/3$).

Remarque 1 : On pourrait améliorer les constantes dans la démonstration ci-dessus en travaillant sur l'espace $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ au lieu de $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$; c'est d'ailleurs le cadre naturel de la démonstration, mais la présentation ci-dessus est peut-être plus facile à suivre pour un lecteur qui n'a pas l'habitude des "produits de Riesz".

Remarque 2 : Soit $\Lambda = \{\gamma_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$. Supposons qu'il existe une constante K telle que : $\forall n$

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbb{C}^n \qquad \|\sum_1^n \alpha_i \gamma_i\|_\infty \le K \int \|\sum_1^n \varepsilon_i \alpha_i \gamma_i\|_\infty \, d\mathbb{P}$$

alors, en fait, $$\sum_1^n |\alpha_i| \le 2K \int \|\sum_1^n \varepsilon_i \alpha_i \gamma_i\|_\infty \, d\mathbb{P} .$$

En effet, si les (α_i) sont réels et si ξ_i est le signe de α_i, on a :

$$\sum |\alpha_i| = \|\sum_1^n \xi_i \alpha_i \gamma_i\|_\infty \le K \int \|\sum \varepsilon_i \xi_i \alpha_i \gamma_i\|_\infty \, d\mathbb{P} .$$

Mais par symétrie : $\mathbb{E} \|\sum_1^n \varepsilon_i \xi_i \alpha_i \gamma_i\|_\infty = \mathbb{E} \|\sum_1^n \varepsilon_i \alpha_i \gamma_i\|_\infty$,

donc on trouve $$\sum |\alpha_i| \le K \int \|\sum \varepsilon_i \alpha_i \gamma_i\|_\infty \, d\mathbb{P} .$$

Pour des α_i complexes, on traite séparément parties réelles et parties imaginaires comme au Lemme 1.

Par le théorème du graphe fermé et les résultats d'intégrabilité de Kahane présentés à l'exposé 7 de ce même séminaire, on a immédiatement le corollaire suivant (l'équivalence iii $\Leftrightarrow$ ii utilise aussi la remarque 2) :

Corollaire ([7]) : Soit $\Lambda = \{\gamma_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) Λ est un ensemble de Sidon.

ii) [resp. ii)'] $\forall (\alpha_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, si la suite des sommes partielles $\sum_1^N \alpha_n \varepsilon_n(\omega) \gamma_n$ converge (resp. est bornée) ω-p.s. dans $C(G)$, alors $\sum |\alpha_n| < \infty$.

iii) $\forall (\alpha_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ si la série $\sum \alpha_n \varepsilon_n(\omega) \gamma_n$ converge ω-p.s. dans $C(G)$ alors la série $\sum \alpha_n \gamma_n$ est la série de Fourier d'une fonction continue.

En résumé brutal (cf. [2] pour des éclaircissements éventuels) :
Si la continuité presque sûre entraîne la continuité sûre pour les séries de Fourier aléatoires de Rademacher à spectre dans Λ alors Λ est un ensemble de Sidon.

Pour les applications aux espaces de cotype 2, nous aurons besoin de la proposition suivante (dont la démonstration est valable dans un cadre plus général que ci-dessous).
Dans toute la suite, on note $\{g_n\}$ une suite de variétés aléatoires gaussiennes indépendantes centrées équidistribuées avec : $\mathbb{E}|g_n|^2 = 1 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

<u>Proposition 1</u> : Soit $\Lambda = \{\gamma_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$. Supposons qu'il existe une constante K' telle que

$$\forall\ n\ \forall\ (\alpha_i) \in \mathbb{C}^n \qquad \sum_1^n |\alpha_i| \leq K'\ \mathbb{E}\|\sum_1^n \alpha_i\ g_i\ \gamma_i\|_\infty$$

alors Λ est un ensemble de Sidon.

<u>Démonstration</u> : Soit c assez grand pour que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{E}(|g_n|\ 1_{\{|g_n|>c\}}) < \frac{1}{2K'}$. Posons $g'_n = g_n\ 1_{\{|g_n|>c\}}$ et $g''_n = g_n - g'_n$.
On peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_1^n |\alpha_i| &\leq K'\ \mathbb{E}\|\sum_1^n g'_i\ \alpha_i\ \gamma_i\|_\infty + K'\ \mathbb{E}\|\sum_1^n g''_i\ \alpha_i \gamma_i\|_\infty \\ &\leq K' \sum_1^n \mathbb{E}\,|g'_i|\ |\alpha_i| + K'\ \mathbb{E}\|\sum_1^n g''_i\ \alpha_i\ \gamma_i\|_\infty\ .\end{aligned} \tag{12}$$

Vue la définition de g''_n, on peut remarquer que si $\varepsilon_i = \pm 1$ la loi de $(\varepsilon_i g''_i)_{i\leq n}$ est la même que celle de $(g''_i)_{i\leq n}$; par conséquent le principe de contraction (cf. la démonstration du Lemme 2.1 exposé VII de ce séminaire) montre que l'on a, puisque $|g''_i| \leq c$:

$$\mathbb{E}\|\sum_1^n g''_i\ \alpha_i\ \gamma_i\|_\infty \leq c \int \|\sum_1^n \varepsilon_i\ \alpha_i\ \gamma_i\|_\infty\ d\mathbb{P}\ .$$

D'après (12) et le choix initial de c, on a :

$$\sum_1^n |\alpha_i| \leq \frac{1}{2} \sum_1^n |\alpha_i| + K'\ c \int \|\sum_1^n \varepsilon_i\ \alpha_i\ \gamma_i\|_\infty\ d\mathbb{P}\ ,$$

d'où :

$$\sum_1^n |\alpha_i| \leq 2\ K'\ c \int \|\sum_1^n \varepsilon_i\ \alpha_i\ \gamma_i\|_\infty\ d\mathbb{P}\ .$$

On conclut en appliquant le théorème 1.

Nous allons maintenant appliquer le théorème de Rider aux espaces de Banach de la forme C_Λ : pour $\Lambda \subset \Gamma$, on note C_Λ le sous-espace de $C(G)$ formé par les éléments f qui ont leur spectre dans Λ, c'est-à-dire tels que $\hat{f}(\gamma) = 0$ si $\gamma \notin \Lambda$.
Le lecteur désirant s'informer sur les espaces de cotype 2 peut se référer à [4] et [5].

Par définition, si Λ est un ensemble de Sidon, alors C_Λ est isomorphe à $\ell^1(\Lambda)$. Réciproquement, Varopoulos a montré que si C_Λ est linéairement isomorphe à $\ell^1(\Lambda)$[♦] alors Λ est un ensemble de Sidon.
Le théorème ci-dessous est une généralisation de ce résultat car tout espace ℓ^1 ou bien tout sous-espace de L^1 est de cotype 2.

Rappelons la :

<u>Définition 2</u> : Soit $\{g_n\}$ comme précédemment. Un espace de Banach X est dit de cotype 2, s'il existe une constante D telle que, pour toute suite finie $x_1,\dots,x_n$ d'éléments de X, on a :

$$\left(\sum_1^n \|x_i\|^2\right)^{1/2} \le D\ \mathbb{E}\left\|\sum_1^n g_i\ x_i\right\| .$$

<u>Remarque 3</u> : Soit $(\tilde{g}_n)$ une suite de variables aléatoires gaussiennes complexes[♦♦] indépendantes équidistribuées avec $\mathbb{E}\,|\tilde{g}_n|^2 = 1$.
Si $x_1,\dots,x_n$ sont des éléments d'un espace de Banach complexe X, on vérifie aisément que :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathbb{E}\left\|\sum_1^n g_i\ x_i\right\| \le \mathbb{E}\left\|\sum_1^n \tilde{g}_i\ x_i\right\| \le \sqrt{2}\ \mathbb{E}\left\|\sum_1^n g_i\ x_i\right\| . \tag{13}$$

La proposition suivante résulte de l'invariance par rotation des mesures gaussiennes, c'est un cas particulier de résultats plus généraux (cf. [4] théorème 2 et corollaire 1).

♦ C'est-à-dire s'il existe un isomorphisme de $\ell^1(\Lambda)$ sur C_Λ , mais qui n'est pas a priori l'isomorphisme "naturel" !

♦♦ C'est-à-dire, pour chaque n, Re $\tilde{g}_n$ et Im $\tilde{g}_n$ sont des v.a. réelles gaussiennes indépendantes de même distribution.

Proposition 2 : Soit X un espace de Banach (sur le corps des complexes) de cotype 2 comme dans la définition précédente. Pour toute suite $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ orthonormale dans $L^2(G,m)$, on a :

$$(14) \qquad \left(\int \left\|\sum_1^n \varphi_i\, x_i\right\|^2 dm\right)^{1/2} \leq 2D\ \mathbb{E}\left\|\sum_1^n g_i\, x_i\right\| \ .$$

Démonstration : Nous ne faisons qu'indiquer l'idée fondamentale pour ce type d'énoncés. Soit $(u_{ij})_{\substack{i\leq n\\ j\leq m}}$ une matrice $n\times m$ telle que :

$$(15)\ \forall\ (\alpha_i)\in \mathbb{C}^n \qquad \sum_{j=1}^m \left|\sum_{i=1}^n u_{ij}\,\alpha_i\right|^2 = \sum_1^n |\alpha_i|^2 \ .$$

On peut écrire, d'après la définition 2 et la remarque 3 :

$$(16) \qquad \left(\sum_{j=1}^m \left\|\sum_{i=1}^n u_{ij}\, x_i\right\|^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{2}\ D\ \mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^m \tilde{g}_j\left(\sum_{i=1}^n u_{ij}\, x_i\right)\right\| \ .$$

Posons $G_i = \sum_{j=1}^m u_{ij}\,\tilde{g}_j$; il résulte de (15) et de l'invariance par rotation des mesures gaussiennes que la suite $(G_1,\ldots,G_n)$ a la même distribution que la suite $(\tilde{g}_1,\ldots,\tilde{g}_n)$.
On déduit donc de (16) :

$$\left(\sum_{j=1}^m \left\|\sum_{i=1}^n u_{ij}\, x_i\right\|^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{2}\ D\ \mathbb{E}\left\|\sum_1^n \tilde{g}_i\, x_i\right\|$$

donc d'après (13) :
$$\leq 2D\ \mathbb{E}\left\|\sum_1^n g_i\, x_i\right\| \ .$$

En d'autres termes, on a démontré (14) dans le cas particulier où $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ sont des fonctions étagées (i.e. ne prenant qu'un nombre fini de valeurs). Un argument d'approximation de routine, que nous ne détaillerons pas, permet de conclure dans le cas général.
On peut maintenant donner une application aux espaces de Banach qui générise un théorème de Varopoulos [8] et certains résultats de [6].

Théorème 2 : Soit $\Lambda = \{\gamma_n \mid n\in \mathbb{N}\}\subset \Gamma$; si C_Λ est de cotype 2, alors Λ est un ensemble de Sidon.

Démonstration : D'après la proposition 2, si C_Λ est de cotype 2 on peut écrire : $\forall\ \{x_1,\ldots,x_n\}\subset C_\Lambda$

$$(17) \qquad \left(\int \left\|\sum_1^n \gamma_i(t)\, x_i\right\|^2 dm(t)\right)^{1/2} \leq 2D\ \mathbb{E}\left\|\sum_1^n g_i\, x_i\right\| \ ,$$

pour une constante D.

Appliquons ce résultat avec $x_i = \alpha_i \gamma_i$: on a, pour chaque t fixé dans G :

$$\|\sum_1^n \gamma_i(t)\, \alpha_i\, \gamma_i\|_\infty = \|\sum_1^n \alpha_i\, \gamma_i(t+\cdot)\|_\infty$$
$$= \|\sum_1^n \alpha_i\, \gamma_i\|_\infty \;.$$

On déduit donc de (17) :

$$\|\sum_1^n \alpha_i\, \gamma_i\|_\infty \leq 2D\; \mathbb{E}\, \|\sum_1^n g_i\, \alpha_i\, \gamma_i\|_\infty \;.$$

L'argument de la remarque 2 montre que

$$\sum_1^n |\alpha_i| \leq 4D\; \mathbb{E}\, \|\sum_1^n g_i\, \alpha_i\, \gamma_i\|_\infty$$

et on conclut par la proposition 1 que Λ est un ensemble de Sidon.

<u>Remarque 4</u> : Pour démontrer le théorème précédent, on pouvait se passer de la proposition 1 à condition d'utiliser un résultat de [5] (cor. 1.3) qui assure que si l'on remplace (g_n) par (ε_n) dans la définition 2, on obtient une définition équivalente des espaces de cotype 2. Mais nous nous sommes efforcés autant que possible de donner un exposé complet de la démonstration du théorème 2.

REFERENCES

[1] S. Drury, Sur les ensembles de Sidon, C.R. Acad. Sc. Paris, A 271 (1970) 162-163.

[2] J.P. Kahane, Some random series of functions, Heath Math. Monograph (1968).

[3] J. Lopez et K. Ross, Sidon sets, Lecture notes in pure and applied mathematics No 13, M. Dekker, New York (1975).

[4] B. Maurey, Espaces de cotype p, Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73, exposé VII.

[5] B. Maurey et G. Pisier, Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, Studia Math. 58 (1976) 45-90.

[6] G. Pisier, Some results on Banach spaces without local unconditional structure, Compositio Math. (à paraître, 1978).

[7] D. Rider, Randomly continuous functions and Sidon sets, Duke Math. Journal 42 (1975) 759-764.

[8] N. Th. Varopoulos, Une remarque sur les ensembles de Helson, Duke Math. Journal 43 (1976) 387-390, cf. aussi Séminaire Maurey-Schwartz 1976-77, exposé XII.
