B. Maurey

Une suite faiblement convergente vers zéro sans sous-suite inconditionnelle

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 9, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A8_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

UNE SUITE FAIBLEMENT CONVERGENTE VERS ZERO SANS SOUS-SUITE INCONDITIONNELLE

par B. MAUREY

Exposé No IX

6 Janvier 1976

Cet exposé est consacré à la construction d'un exemple, obtenu en collaboration avec H.P. Rosenthal [4], d'une suite de vecteurs de norme 1 dans un espace de Banach, qui tend faiblement vers zéro mais qui ne possède aucune sous-suite inconditionnelle.

Nous mentionnerons à plusieurs reprises dans cet exposé l'espace S des séries convergentes, et plus précisément la base canonique (e_n) de S. Rappelons que la norme de S est définie par :

$$S((\lambda_i)) = \Big\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i\Big\|_S = \sup_k \Big|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\Big| ,$$

pour toute série simplement convergente (λ_i).

Si (x_n) est une suite de vecteurs d'un espace de Banach, la constante d'inconditionnalité de la suite (x_n) est définie comme la plus petite constante $K \geq 0$ telle que l'on ait pour tout ensemble fini $F \subset \mathbb{N}$ et pour toute suite $(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$:

$$\Big\|\sum_{n\in F} \alpha_n x_n\Big\| \leq K \Big\|\sum_n \alpha_n x_n\Big\| .$$

On dit alors que (x_n) est K-inconditionnelle. On dit qu'une suite (x_n) est inconditionnelle s'il existe une constante K telle que (x_n) soit K-inconditionnelle.

Notre construction principale nous mènera à :

A. Il existe une suite (x_n) de vecteurs de norme 1, tendant faiblement vers zéro dans un espace de Banach E, et possédant la propriété suivante : pour toute sous-suite (x_{n_k}) de (x_n), il existe une suite (y_j) de blocs disjoints de la sous-suite (x_{n_k}) qui est 2-équivalente à la base des séries convergentes, c'est-à-dire :

$$\forall\ (\alpha_j) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \qquad S((\alpha_j)) \leq \Big\|\sum_j \alpha_j y_j\Big\| \leq 2\ S((\alpha_j)) .$$

Bien entendu, la propriété A implique que la suite (x_n) n'a aucune sous-suite inconditionnelle : en effet, des blocs disjoints d'une suite K-inconditionnelle forment encore une suite K-inconditionnelle, et par ailleurs la base de S n'est évidemment pas inconditionnelle.

Une légère modification de l'exemple A permet d'obtenir :

B. Il existe une suite (x_n) de vecteurs de norme 1 tendant faiblement vers zéro dans un espace de Banach <u>uniformément convexe</u>, et dont aucune sous-suite n'est inconditionnelle.

Pour finir, nous nous intéresserons aux espaces $C(\alpha)$, où α est un ordinal dénombrable. Si β est un ordinal dénombrable, $\beta+1$ est un compact pour la topologie de l'ordre. Il est bien connu que dans $C(\omega+1)$, toute suite qui tend faiblement vers zéro possède pour tout $\varepsilon > 0$ des sous-suites $(1+\varepsilon)$-inconditionnelles. Nous verrons que :

C. Pour tout entier $k \geq 1$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe dans $C(\omega^{\omega.k} + 1)$ une suite qui tend faiblement vers zéro, mais dont toute sous-suite a une constante d'inconditionnalité $\geq \dfrac{k+1}{1+\varepsilon}$. (Avec un peu plus de travail, on peut prendre $\varepsilon = 0$, cf. [4].)

Nous verrons dans l'exposé XVI un résultat positif qui complète C : pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute suite qui tend faiblement vers zéro dans $C(\omega^{\omega.k} + 1)$, il existe des sous-suites $(k+1+\varepsilon)$-inconditionnelles.

L'exemple C suggère que dans $\omega^{(\omega^2)}+1$, il ne sera plus possible de trouver de sous-suite inconditionnelle. C'est effectivement ce qui se passe :

D. Dans $C(\omega^{(\omega^2)} + 1)$, il existe une suite qui tend faiblement vers zéro et qui n'a aucune sous-suite inconditionnelle.

On peut noter, en utilisant les résultats de l'exposé XVI, que $\omega^{(\omega^2)}$ est le premier ordinal α tel que l'extraction de sous-suites inconditionnelles soit impossible dans $C(\alpha+1)$.

<u>I. EXEMPLE A</u>

Nous allons entrer maintenant dans la partie technique de cet exposé. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $m_1 = 1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$ une suite d'entiers très lacunaire, vérifiant :

(1) $$\sum_{\substack{i,k\\ i<k}} m_i/m_k \leq \varepsilon/2 < 1 \quad .$$

Nous désignerons par $M = \{1, m_2^2, \ldots, m_k^2, \ldots\}$ l'ensemble des carrés des éléments de la suite précédente.

Si A est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, nous désignerons pas 1_A l'élément de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ défini par $1_A(j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et nous poserons :

$x_A = \frac{1}{\sqrt{|A|}} . 1_A$ (où $|A|$ désigne le nombre des éléments de A).

Si $x = (x_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et $y = (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le symbole $<x,y>$ désignera le produit scalaire usuel, c'est-à-dire :

$$<x,y> = \sum_n x_n\, y_n \quad .$$

Si A et B sont deux sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$, on a, en supposant $|A| < |B|$

$$<x_A, x_B> = \frac{|A \cap B|}{\sqrt{|A| \, . \, |B|}} \leq \sqrt{\frac{|A|}{|B|}}$$

(noter aussi que $<x_A, x_A> = 1$).

Supposons alors que $A_1, \ldots A_n$, $B_1, \ldots B_m$ soient des ensembles finis de $\mathbb{N}$ tels que pour tous i et j, on ait $|A_i|$ et $|B_j| \in M$, et $|A_i| \neq |B_j|$. On déduira de (1) que :

(2) $$<\sum_i x_{A_i} , \sum_j x_{B_j}> \leq \varepsilon/2 \quad .$$

La petite discussion précédente explique le rôle technique de M : si les cardinalités en présence sont des éléments distincts de M, les vecteurs correspondants sont "presque" orthogonaux.

Introduisons une notation supplémentaire. Si $a = (A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots)$ est une suite de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$, deux à deux disjoints, nous poserons :

$$x(a) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{A_n} \quad .$$

La norme que nous voulons définir sera de la forme suivante : si $\mathcal{M}$ est un ensemble de suites de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$, on lui associe une semi-norme sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ par la formule :

$$|y| = \sup_{a\in\mathcal{M}} |<y,x(a)>| \quad , \quad \forall\, y\in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \quad .$$

Nous supposerons donné un ensemble $\mathcal{M}$ possédant les propriétés suivantes (nous discuterons plus loin l'existence d'un tel $\mathcal{M}$) :

i) Pour tout $a = (A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots) \in \mathcal{M}$

- $|A_n| \in M$ pour tout $n \geq 1$
- $|A_1| < |A_2| < \ldots < |A_n| < \ldots$
- $A_1 < A_2 < \ldots < A_n < \ldots$

ii) Pour tous $a = (A_n)$ et $b = (B_n) \in \mathcal{M}$:

$$|A_i| = |B_j| \Longrightarrow i = j \quad \text{et} \quad A_\ell = B_\ell \ \text{pour}\ 1 \leq \ell < i \quad .$$

iii) Pour tous k et m entiers ≥ 1, et tout $a = (A_n) \in \mathcal{M}$, il existe $b = (B_n) \in \mathcal{M}$ tel que :

$$1 \leq \ell \leq k \Longrightarrow A_\ell = B_\ell \quad ; \quad m < B_{k+1} \quad .$$

iv) Pour tout sous-ensemble infini $N_1 \subset \mathbb{N}$, il existe un élément $a = (A_n) \in \mathcal{M}$ tel que $A_n \subset N_1$ pour tout $n \geq 1$.

v) Pour tout $k \geq 1$, il existe $a = (A_n) \in \mathcal{M}$ tel que $A_1 = \{k\}$.

(Si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$, $A < B$ signifie $\sup A < \inf B$.)

La propriété la plus importante est la propriété ii). Elle signifie que pour un élément $a = (A_n)$ de $\mathcal{M}$, la connaissance du cardinal de A_k détermine les ensembles $A_1, A_2, \ldots A_{k-1}$. Cette structure sera rendue plus claire lors de la construction d'un tel ensemble $\mathcal{M}$, qui sera faite plus loin.

A partir de maintenant, nous supposerons donné un ensemble $\mathcal{M}$ possédant les propriétés i) à v), et nous définirons une semi-norme sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ par la formule :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \qquad \|y\| = \sup_{a\in\mathcal{M}} |\langle y, x(a)\rangle| \quad .$$

En fait, la conjonction de iii) et v) implique immédiatement que $\|y\| \geq \sup_k |y_k|$, ce qui prouve que $y \to \|y\|$ est une norme. Nous désignerons par (x_n) la base canonique de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ($x_n(j) = \delta_{n,j}$). Nous allons voir que la suite (x_n) possède les propriétés de l'exemple A. Tout d'abord, il résulte de v) que $\|x_n\| = 1$ pour tout n.

<u>Lemme 1</u> : Soit $b = (B_n)$ un élément de $\mathcal{M}$. On a :

$$\forall\, (\lambda_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \qquad S((\lambda_n)) \leq \|\sum_n \lambda_n x_{B_n}\| \leq (1+\varepsilon)\; S((\lambda_n)) \quad .$$

(Autrement dit, la suite (x_{B_n}) est $(1+\varepsilon)$-équivalente à la base de S.)

<u>Démonstration</u> : Soit $(\lambda_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et soit k un entier ≥ 1. Désignons par m le premier entier tel que $\lambda_j = 0 \;\; \forall\, j > m$. D'après iii), on peut trouver un élément $a = (A_n) \in \mathcal{M}$ tel que :

$$A_i = B_i \text{ pour } 1 \leq i \leq k \quad ; \quad A_{k+1} > B_m \quad .$$

On voit alors que :

$$\langle \sum_n \lambda_n x_{B_n}, x(a)\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \quad .$$

L'entier k étant quelconque, on en déduit l'inégalité $S((\lambda_n)) \leq \|\sum_n \lambda_n x_{B_n}\|$.

Pour démontrer l'autre inégalité, choisissons un élément quelconque $a = (A_n)$ de $\mathcal{M}$, et désignons par k le plus grand entier tel que $|A_j| = |B_j|$ $\forall\, j \leq k$ (si $|A_1| \neq |B_1|$, on pose $k = 0$). Nous décomposerons le produit $\langle \sum_n \lambda_n x_{B_n}, x(a)\rangle$ en trois parties :

$$\langle \sum_n \lambda_n x_{B_n}, x(a)\rangle =$$

$$\langle \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n x_{B_n}, \sum_{n=1}^{k-1} x_{A_n}\rangle + \lambda_k \langle x_{B_k}, \sum_{n\geq k} x_{A_n}\rangle + \langle \sum_{n>k} \lambda_n x_{B_n}, \sum_{n\geq k} x_{A_n}\rangle \quad .$$

Le premier terme est facile à évaluer, car d'après ii), on a $A_j = B_j$ pour $j < k$, donc :

$$< \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n x_{B_n} , \sum_{n=1}^{k-1} x_{A_n} > = \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n \quad .$$

Dans le second, nous remarquerons que :

$$0 \leq \rho = < x_{B_k} , \sum_{n\geq k} x_{A_n} > \leq 1 \quad .$$

En effet, puisque $|A_n| \geq |A_k|$ pour $n \geq k$, les coefficients de $\sum_{n\geq k} x_{A_n}$ sont majorés par $1/\sqrt{|A_k|} = 1/\sqrt{|B_k|}$, et donc :

$$< x_{B_k} , \sum_{n\geq k} x_{A_n} > \leq \frac{|B_k|}{\sqrt{|B_k|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|A_k|}} = 1 \quad .$$

Pour étudier le troisième terme, notons que d'après ii), les entiers $|A_i|$, $i \geq k$ et $|B_j|$, $j > k$, sont deux à deux distincts. Comme ce sont des éléments de M, on déduit de (2) que :

$$|< \sum_{n>k} \lambda_n x_{B_n} , \sum_{n\geq k} x_{A_n} >| \leq \sup_n |\lambda_n| \, . < \sum_{n>k} x_{B_n} , \sum_{n\geq k} x_{A_n} >$$

$$\leq \varepsilon/2 \, . \sup_n |\lambda_n| \leq \varepsilon \, . \, S((\lambda_n)) \quad .$$

Pour conclure, remarquons que :

$$\left| \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n + \rho \, \lambda_k \right| = \left| (1-\rho) \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n + \rho \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \right| \leq S((\lambda_n)) \quad .$$

On a donc obtenu :

$$|< \sum_n \lambda_n x_{B_n} , x(a) >| \leq (1+\varepsilon) S((\lambda_m)) \quad ,$$

ce qui démontre le lemme.

<u>Lemme 2</u> : La suite (x_n) tend faiblement vers zéro dans E.

<u>Démonstration</u> : Si la suite (x_n) ne tendait pas faiblement vers zéro, on pourrait trouver un $\alpha > 0$, une forme linéaire ξ de norme ≤ 1 sur E et un sous-ensemble infini $N_1 \subset \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall\, m \in N_1, \qquad < \xi , x_m > \geq \alpha \quad .$$

On en déduirait pour tout ensemble fini $A \subset N_1$:

$$\|x_A\| \geq \alpha \cdot \sqrt{|A|} \quad .$$

D'après la propriété iv), on peut trouver un $b = (B_n) \in \mathcal{M}$ tel que $B_n \subset N_1$ pour tout n. Le lemme 1 implique que $\|x_{B_n}\| \leq 1+\varepsilon$ pour tout n. Mais par ailleurs $|B_n| \to \infty$ d'après i), d'où une contradiction qui achève la démonstration du lemme 2.

Nous voyons facilement maintenant que la suite (x_n) possède toutes les propriétés de l'exemple A : la suite tend faiblement vers zéro, et $\|x_n\| = 1$ pour tout n. Par ailleurs, soit (x_{n_k}) une sous-suite de la suite (x_n).

D'après l'axiome iv) pour $\mathcal{M}$, il existe un élément $b = (B_j) \in \mathcal{M}$ tel que $B_j \subset N_1 = \{n_1, n_2, \ldots n_k, \ldots\}$ pour tout $j \geq 1$. La suite (x_{B_j}) est bien une suite de blocs disjoints de la sous-suite (x_{n_k}), et elle est $(1+\varepsilon)$-équivalente à la base de S d'après le lemme 1.

Pour achever la présentation de l'exemple A, il reste à construire un ensemble $\mathcal{M}$. Nous commencerons par remarquer que d'après (1) :

$$\forall\ j \geq 1, \qquad m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_j^2 \leq m_{j+1}(m_1 + m_2 + \ldots + m_j)$$

$$\leq m_{j+1}^2(m_1/m_{j+1} + \ldots . + m_j/m_{j+1}) \leq \varepsilon/2\ m_{j+1}^2 < m_{j+1}^2 \quad .$$

Ceci implique que si un entier est somme d'éléments distincts de M, son développement est unique. Cette remarque sera utilisée plus loin.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ et soit ψ une injection de $\mathcal{S}$ dans M, telle que $\forall\ A \in \mathcal{S}$, $\psi(A) > |A|$.

Désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des suites $a = (A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots)$ d'éléments de $\mathcal{S}$ telles que :

1) $A_1 < A_2 < \ldots < A_n < \ldots$

2) $|A_1| = 1$

3) $\forall\ j \geq 1 \quad |A_{j+1}| = \psi(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j)$.

Montrons que cet ensemble $\mathcal{M}$ satisfait les propriétés i) à v). Pour montrer i), il suffit de noter que :

$$|A_{j+1}| = \psi(A_1 \cup \ldots \cup A_j) > |A_1 \cup \ldots \cup A_j| \geq |A_j| \quad .$$

La propriété iii) est évidente : quand on a choisi $A_1, A_2, \ldots A_j$, on peut choisir A_{j+1} arbitrairement loin ; la propriété iv) est évidente aussi. Si $N_1 \subset \mathbb{N}$ est un ensemble infini, et si $A_1, A_2, \ldots A_j$ ont été définis, $A_i \subset N_1$, on peut toujours trouver dans N_1 un ensemble $A_{j+1} > A_j$ de cardinalité $\psi(A_1 \cup \ldots \cup A_j)$. De même v) est trivial. Finissons par ii). Supposons que $a = (A_n)$ et $b = (B_n)$ sont des éléments de $\mathcal{M}$, et que $|A_i| = |B_j|$ pour i, $j \geq 1$. Si $i = 1$, ou $j = 1$, la propriété est évidente. Sinon $i = k+1$ et $j = \ell+1$, et donc $\psi(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \psi(B_1 \cup \ldots \cup B_\ell)$, ce qui implique $A_1 \cup \ldots \cup A_k = B_1 \cup \ldots \cup B_\ell$ puisque ψ est injective. De plus $|A_1 \cup \ldots \cup A_k| = |B_1 \cup \ldots \cup B_\ell|$, et ces deux entiers sont sommes d'éléments distincts de M. D'après la remarque préliminaire, on en déduit $k = \ell$ et $|A_h| = |B_h|$ pour $h \leq k$. Mais ceci, joint au fait que les ensembles sont disjoints et à $A_1 \cup \ldots \cup A_k = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ implique en fait que $A_h = B_h$ pour $1 \leq h \leq k$, et on a bien démontré que l'ensemble $\mathcal{M}$ convient.

II. EXEMPLE B

L'exemple B sera obtenu facilement à partir de l'exemple A par interpolation ; on sait en effet qu'un interpolé (θ,p) entre un Banach quelconque et un Banach uniformément convexe est uniformément convexe (cf. [1]). Comme paire d'interpolation (A_o,A_1), nous prendrons $A_o = \ell^2$ et A_1 sera l'espace E de l'exemple A. Notons que l'intersection $A_o \cap A_1$ contient $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, donc est dense dans A_o et A_1. Nous poserons $F = (A_o,A_1)_{1/2,2}$, nous noterons comme d'habitude $\|.\|_i$ la norme dans A_i, $i = 0,1$. Il n'y a pas de norme canonique sur F, mais on peut d'après [3], choisir une norme (que nous noterons $\|.\|$) telle que :

$$\forall\, x \in A_o \cap A_1 \qquad \|x\| \leq \sqrt{\|x\|_o \; \|x\|_1} \quad .$$

Dans notre situation, le dual F' de F est égal à $(A'_o,A'_2)_{1/2,2}$, cf. [3], chapitre III, et on peut supposer aussi (en notant $\|.\|_i^*$ la norme dans A'_i, $i = 0,1$ et $\|.\|^*$ la norme dans F') que :

$\forall\ \xi \in A'_o \cap A'_1$, $$\|\xi\|^* \leq \sqrt{\|\xi\|^*_o \ \|\xi\|^*_1}\ .$$

La suite (x_n) de l'exemple A est simplement dans A_o la base canonique de ℓ^2. Nous allons voir que la même suite (x_n) possède dans l'espace F les propriétés de l'exemple B.

Si $a = (A_n) \in \mathcal{M}$ et si k est un entier ≥ 1, nous poserons :

$$x_k(a) = \sum_{n=1}^{k} x_{A_n} \quad ; \quad y_k(a) = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1}\, x_{A_n}\ .$$

Les éléments $x_k(a)$ et $y_k(a)$ interviendront à la fois comme éléments de $A_o \cap A_1$ et $A'_o \cap A'_1$. D'après l'étude de l'exemple A, on sait que :

$$\|x_k(a)\|_1 = k \quad ; \quad 1 \leq \|y_k(a)\|_1 \leq 1+\varepsilon\ .$$

Par ailleurs, il résulte facilement de la propriété iii) de $\mathcal{M}$ que :

$$\|x_k(a)\|^*_1 = 1\ .$$

On a aussi trivialement :

$$\|x_k(a)\|_o = \|x_k(a)\|^*_o = \|y_k(a)\|_o = \|y_k(a)\|^*_o = \sqrt{k}\ .$$

On en déduit dans F et F' :

$$\|y_k(a)\| \leq \sqrt{1+\varepsilon}\,.\,k^{1/4} \quad ; \quad \|x_k(a)\|^* \leq k^{1/4}\ .$$

Mais compte tenu de $\langle x_k(a), x_k(a)\rangle = k$, on obtient :

$$\|x_k(a)\| \geq k^{3/4} \quad (\text{donc en fait } \|x_k(a)\| = k^{3/4})\ .$$

Cela prouve que la suite (x_n) ne possède aucune sous-suite inconditionnelle dans F : l'argument est le même que dans l'exemple A et utilise la propriété iv) de $\mathcal{M}$. Pour finir il faut montrer que la suite (x_n) tend vers zéro dans F. L'argument du lemme 2 permet de conclure, si on remarque que lorsque $b = (B_n) \in \mathcal{M}$, on a pour tout $n \geq 1$:

$$\|x_{B_n}\| \leq \sqrt{\|x_{B_n}\|_o \ \|x_{B_n}\|_1} \leq \sqrt{1+\varepsilon}\ .$$

III. EXEMPLES C ET D

Pour introduire l'exemple C, nous utiliserons l'ensemble $\mathcal{M}$ construit à la fin du paragraphe I. Nous utiliserons, en plus des propriétés i) à v), les deux propriétés supplémentaires de cet ensemble $\mathcal{M}$:

vi) $\forall\ a=(A_n)\in\mathcal{M},\ |A_1|=1$.

vii) $\forall\ a=(A_n),\ b=(B_n)\in\mathcal{M}$
$A_i=B_i$ pour $1\leq i\leq k \Longrightarrow |A_{k+1}|=|B_{k+1}|$.

Soit k un entier ≥ 1. Nous introduirons sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ une norme analogue à celle de l'exemple A, par la formule :

$$\|y\| = \sup_{a\in\mathcal{M}} |\langle y, x_k(a)\rangle| \quad , \quad \forall\ y\in\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \quad .$$

Nous désignerons par E_k l'espace de Banach obtenu par complétion. En adaptant les arguments du premier paragraphe, on voit facilement que la base canonique de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, toujours désignée par x_n, vérifie $\|x_n\|=1$ et tend faiblement vers zéro dans E_k.
De plus, pour tout $b=(B_n)\in\mathcal{M}$, on a :

$$\forall\ (\lambda_i)\in\mathbb{R}^k \qquad \sup_{1\leq j\leq k}\left|\sum_{i=1}^{j}\lambda_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\, x_{B_i}\right\| \leq (1+\varepsilon)\sup_{1\leq j\leq k}\left|\sum_{i=1}^{j}\lambda_i\right| \quad .$$

(Autrement dit, la suite finie $(x_{B_1},\dots,x_{B_k})$ est $(1+\varepsilon)$-équivalente aux k premiers vecteurs de la base de S.)

La constante d'inconditionnalité des k premiers vecteurs $(e_1,\dots e_k)$ de la base de S est égale à k (considérer $x=e_1-2e_2+2e_3-\dots$ et $y=e_1+2e_3+2e_5+\dots$), donc celle de $(x_{B_1},\dots x_{B_k})$ est $\geq k/(1+\varepsilon)$. Par la propriété iv) de $\mathcal{M}$, il en résulte que toute sous-suite de la suite (x_n) a une constante d'inconditionnalité $\geq k/(1+\varepsilon)$.

Pour terminer l'exemple C, il faut plonger isométriquement E_k dans $C(\omega^{\omega\cdot(k-1)}+1)$. D'après le théorème d'extension de Borsuk-Kakutani (cf. [2]), il suffit de plonger E_k isométriquement dans un $C(K_k)$, K_k étant un compact homéomorphe à une partie fermée de $\omega^{\omega\cdot(k-1)}+1$. D'après le théorème de Mazurkiewicz-Sierpinski [5] il suffit pour cela que K_k soit un compact dénombrable dont le dérivé $K^{(\omega.(k-1))}$ soit réduit à un point, ou bien vide. Le compact K_k sera choisi de la façon la plus naturelle, en prenant une partie convenable de la boule unité de E_k'. On posera d'abord $\mathfrak{F}_k = \{x_k(a) \,;\, a \in \mathcal{M}\}$, et K_k sera l'adhérence $*$-faible de $\mathfrak{F}_k$ dans E_k'. D'après la définition de la norme de E_k, il est clair que :

$$\forall\, y \in E_k \,, \qquad \|y\| = \sup_{\xi \in K_k} |\langle y,\xi\rangle| \quad ,$$

donc le plongement de E_k dans $C(K_k)$ est isométrique. Il est plus commode de regarder $\mathfrak{F}_k$ comme une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, contenue en fait dans le compact $[0,1]^{\mathbb{N}}$, et de regarder K_k comme l'adhérence de $\mathfrak{F}_k$ pour la topologie produit. (On a une injection à image dense de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ dans E_k, donc E_k' s'injecte dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ce qui rend ce point de vue possible.)

Montrons tout d'abord le :

<u>Lemme 3</u> : L'ensemble K_k est constitué par des éléments de la forme $y = 1_{[1,\dots,n]} \cdot x_k(a)$, $n \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire que $y(j) = x_k(a)(j)$ si $j \le n$, 0 sinon).

<u>Démonstration</u> : Soit $y \in K_k$. Si $y = 0$, y est bien de la forme voulue. Supposons donc $y \neq 0$, et choisissons une suite $a_n \in \mathcal{M}$ telle que $x_k(a_n)$ converge vers y dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Remarquons d'abord que les coordonnées non nulles des $x_k(a_n)$ sont de la forme $1/\sqrt{h}$, h entier ≥ 1, il en est donc de même pour y. De plus si $y(j) \neq 0$, on aura $x_k(a_n)(j) = y(j)$ pour n assez grand. Remarquons encore que les composantes non nulles des $x_k(a_n)$ prennent exactement k valeurs distinctes, et décroissantes. On en déduit que les composantes non nulles de y prennent au plus k valeurs distinctes, et que ces valeurs sont décroissantes. Soit j le nombre de valeurs distinctes des composantes non nulles de y, et soient $A_1, A_2, \dots A_j$ les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ sur lesquels y prend les valeurs en question. On a $A_1 < A_2 < \dots < A_j$. De plus ces ensembles sont finis. En effet les $x_k(a_n)$ sont de norme $\sqrt{k}$ dans ℓ^2, donc $\|y\|_2 \le \sqrt{k}$. D'après une remarque précédente, $x_k(a_n) = y$ sur $A_1 \cup \dots \cup A_j$ pour n assez grand. Posons $m = \sup A_j$. Les composantes non nulles des $x_k(a_n)$ étant décroissantes, on voit qu'en fait on aura $x_k(a_n) = y$ sur $[1,2,\dots m]$ pour n assez grand. Mais alors, toujours pour n assez grand, on aura $y = 1_{[1,\dots m]} \cdot x_k(a_n)$, ce qui démontre le lemme.

Le lemme 3 indique en particulier que le compact K_k est dénombrable. Nous allons maintenant examiner les ensembles dérivés de K_k. Auparavant, remarquons que la démonstration du lemme 3 fournit également le résultat suivant :

Lemme 3 bis : Soient $y \in K_k$, et $m = \sup\{j \,;\, y(j) \neq 0\}$. Si une suite (y_n) d'éléments de K_k converge vers y, on a $y = 1_{[1,\dots,m]} \cdot y_n$ pour n assez grand.

Si y et z sont deux éléments de K_k, nous noterons $y \prec z$ si $y \neq z$ et s'il existe un entier m tel que $y = 1_{[1,\dots,m]} \cdot z$. Si y est un élément de l'ensemble dérivé K_k', il existe une suite (y_n) de points K_k qui converge vers y, et telle que $y_n \neq y$ pour tout n. D'après le lemme 3 bis, on a donc $y \prec y_n$ pour n assez grand. Si y est un élément du j-ième dérivé $K^{(j)}$ de K, il existe donc $y_1, y_2, \dots y_j \in K$ tels que :

$$y \prec y_1 \prec y_2 \quad \dots \prec y_j \quad .$$

Lemme 4 : a) $K_2^{(\omega)} = (0)$

b) $K_{k+1}^{(\omega)} \subset K_k$.

Démonstration : Pour montrer a), il suffit de voir que pour tout $y \neq 0$, $y \in K_2$, il existe un entier j tel que $y \notin K_2^{(j)}$. Soit donc $y \in K_2$, $y \neq 0$. Posons $\ell = \inf\{n \,;\, y(n) \neq 0\}$. D'après vi), on a $y(\ell) = 1$ et d'après vii) il existe un entier h tel que pour tout $b = (B_n) \in \mathcal{M}$, $B_1 = \{\ell\} \Longrightarrow |B_2| = h$. Si on a $y \prec y_1 \prec y_2 \quad \dots \prec y_j$, avec $y_i \in K_2$, il est clair que y_j a au moins $(j+1)$-composantes non nulles, dont au moins j égales à $1/\sqrt{h}$. Or cela est impossible si $j = h+1$, donc $y \notin K_2^{(h-1)}$.

La démonstration de b) est analogue. Soit $y \in K_{k+1} \setminus K_k$. On peut écrire $y = 1_{[1,\dots.m]} \cdot x_{k+1}(a)$, avec $a = (A_n) \in \mathcal{M}$ et $m \geq \inf A_{k+1}$. En posant $h = |A_{k+1}|$, on peut dire que les composantes non nulles de y au-delà de A_k sont égales à $1/\sqrt{h}$. Comme précédemment si $y \prec y_1 \quad \dots \prec y_j$, avec $y_i \in K_{k+1}$, y_j possède au moins $(j+1)$ composantes non nulles au-delà de A_k, et ces composantes sont égales à $1/\sqrt{h}$, ce qui est impossible si $j = h$. On en déduit que $y \notin K_{k+1}^{(h)}$, et ceci démontre que $K_{k+1}^{(\omega)} \subset K_k$.

Bien entendu le lemme 4 implique que :

$$K_k^{(\omega.(k-1))} \subset \{0\} \quad ,$$

ce qui implique d'après Mazurkiewicz-Sierpinski que K_k est homéomorphe à une partie fermée de $\omega^{\omega.(k-1)}+1$. Ceci achève la présentation de l'exemple C.

Pour l'exemple D nous conservons un ensemble $\mathcal{M}$ possédant les propriétés i) à vii). Si $a=(A_n)\in\mathcal{M}$, avec $A_1=\{\ell\}$, nous poserons :

$$x'(a) = \sum_{i=1}^{\ell} x_{A_i} \quad .$$

On définit ensuite une norme sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ par la formule $\|y\| = \sup_{a\in\mathcal{M}} |<y,x'(a)>|$. On vérifie comme précédemment que la base canonique de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, notée (x_n), vérifie $\|x_n\|=1$, tend faiblement vers zéro et ne possède aucune sous-suite inconditionnelle. Pour terminer, il nous faut plonger isométriquement ce dernier espace dans un $C(K)$, où K est homéomorphe à une partie fermée de $\omega^{(\omega^2)}+1$.

Posons $\mathfrak{F}=\{x'(a)\ ;\ a\in\mathcal{M}\}$ et désignons par K l'adhérence de $\mathfrak{F}$ dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$. On vérifie facilement que le dernier espace est isométrique à un sous-espace de $C(K)$.

Posons $F_k = \{y\in K\ ;\ y(k)=1\}$. (Noter que les F_k sont deux à deux disjoints.)

<u>Lemme 5</u> : Les **éléments** de K sont de la forme $1_{[1,\ldots m]}\cdot x'(a)$. Pour tout entier k, $K\cap F_k\subset K_k$.

<u>Démonstration</u> : Soit $y\neq 0$ un élément de K, et posons $\ell=\inf\{j\ ;\ y(j)\neq 0\}$. Soit $x'(a_n)$ une suite de $\mathfrak{F}$ qui converge vers y. La première composante non nulle des $x'(a_n)$ étant égale à 1, on aura $y(\ell)=1$, et on aura aussi $x'(a_n)(\ell)=1$ pour n assez grand. Mais alors $x'(a_n)\in\mathfrak{F}_\ell$ pour n assez grand, donc $y\in K_\ell$, ce qui démontre le lemme.

L'ensemble F_k est évidemment fermé, mais il est aussi ouvert dans K. En effet, si (y_n) est une suite dans K convergeant vers y, avec $y(k)=1$, on aura $y_n(k)=1$ pour n assez grand. Il en résulte que pour tout ordinal α :

$$K^{(\alpha)}\cap F_k = (K\cap F_k)^{(\alpha)}\subset K_k^{(\alpha)} \quad .$$

D'après la discussion de l'exemple C, on a donc :

$$K^{(\omega^2)} \cap F_k = \emptyset \quad .$$

Mais comme on a $K = \{0\} \cup (\bigcup_k F_k)$, on voit finalement que $K^{(\omega^2)} \subset \{0\}$, et on conclut par une dernière application de Mazurkiewicz-Sierpinski.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Beauzamy, Propriétés géométriques des espaces d'interpolation, Séminaire Maurey-Schwartz 1974-75, exposé 14.

[2] J. Lindenstrauss et L. Tzafiri, Classical Banach spaces, Lecture Notes No 338, Springer Verlag.

[3] J.L. Lions et J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Publications Math. de l'IHES No 19.

[4] B. Maurey et H. Rosenthal, A normalized weakly null sequence with no unconditional subsequence,(à paraître dans Studia Math.).

[5] Z. Semadeni, Banach spaces of continuous functions, vol. I (Warszawa 1971).
