SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. SUCHESTON

Les amarts (martingales asymptotiques)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 8, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1975-1976

LES AMARTS

(MARTINGALES ASYMPTOTIQUES)

par L. SUCHESTON

(Columbus , Ohio)

Exposé No VIII

16 Décembre 1975

RESUME

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires adaptées, soit réelles, soit à valeurs dans un espace de Banach. (X_n) est appelée <u>un amart</u> si $\lim_{\tau\in T} EX_\tau$ existe, où T est l'ensemble des temps d'arrêt bornés. On démontre que la plus grande partie de la théorie asymptotique des martingales réelles s'étend aux amarts réels. Au cas où les X_n sont à valeur vectorielle, les théorèmes de convergence ne sont pas les mêmes que pour les martingales vectorielles, la différence essentielle étant que seule la convergence p.p. dans la topologie <u>faible</u> s'obtient.

Dans notre exposé nous présentons, sauf mention du contraire, des résultats obtenus en commun avec G.A. Edgar, à paraître dans [4] et [5]. Nous commençons par un aperçu du cas réel ; cependant la notation et quelques résultats préliminaires, par exemple le lemme maximal, sont valables en général.

Soit $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ un espace probabilisé, $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$, $-\mathbb{N}=\{\dots,-2,-1\}$, $\mathbb{D}=\mathbb{N}$ ou bien $\mathbb{D}=-\mathbb{N}$. $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{D}}$ est une famille de sous-tribus de $\mathfrak{F}$, telle que $n\leq m$ implique $\mathfrak{F}_n\subseteq\mathfrak{F}_m$. Un <u>temps d'arrêt</u> de $(\mathfrak{F}_n)$ est une fonction $\tau:\Omega\to\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ (ou bien $\tau:\Omega\to\mathbb{N}\cup-\infty\}$, telle que $\{\tau=n\}\in\mathfrak{F}_n$ pour tout $n\in\mathbb{D}$ (et aussi $\{t=-\infty\}\in\bigcap_{n\in-\mathbb{N}}\mathfrak{F}_n=\mathfrak{F}_{-\infty}$). Soit $T=T_{\mathbb{D}}$ l'ensemble des temps d'arrêt bornés ; $T_{\mathbb{N}}$ $(T_{-\mathbb{N}})$ est un ensemble filtrant à droite (à gauche). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{D}}$ une suite adaptée de variables aléatoires : pour tout $n\in\mathbb{D}$, X_n est $\mathfrak{F}_n$-mesurable. Nous supposons que $E|X_n|<\infty$ $\forall n\in\mathbb{D}$. (X_n) est un <u>amart</u> si $(EX_\tau)_{\tau\in T}$ converge ; un <u>semi-amart</u> si $(EX_\tau)_{\tau\in T}$ est bornée.

Les résultats principaux sont :

(1) <u>LE LEMME MAXIMAL</u>

$\forall\lambda>0$,

$$P(\sup_{\mathbb{D}}|X_n|>\lambda)\leq\frac{1}{\lambda}\sup_T E|X_\tau| \quad .$$

(Le cas $\mathbb{D}=\mathbb{N}$ est démontré dans [2].)

(2) LES PROPRIETES DE RETICULATION

Considérons des suites (X_n), (Y_n) ; au cas où $\mathbb{D} = \mathbb{N}$ nous supposons que ces suites sont bornées dans L^1.

(a) Si $(E\, X_\tau)_{\tau \in T}$ et $(E\, Y_\tau)_{\tau \in T}$ sont bornées supérieurement, $E(X_\tau \vee Y_\tau)_{\tau \in T}$ est bornée supérieurement.

(b) Si $(X_n)_{n \in \mathbb{D}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{D}}$ sont des amarts, $X_n \vee Y_n$ et $X_n \wedge Y_n$ sont des amarts.

Appliquant ce théorème, et aussi l'inégalité maximale (1), on obtient que $\sup_{\mathbb{D}} |X_n| < \infty$ p.p. si X_n est un semi-amart. (Au cas où $\mathbb{D} = \mathbb{N}$ on suppose $\sup_n E\,|X_n| < \infty$.)

(3) LES THEOREMES DE CONVERGENCE P.P.

Théorème : Soit X_n un amart à valeurs réelles. Au cas où $\mathbb{D} = \mathbb{N}$ supposons $\sup_n E\,|X_n| < \infty$. Alors X_n converge p.p.

Le cas $\mathbb{D} = \mathbb{N}$ -le premier résultat important concernant les amarts à temps discret- est démontré dans [1].

La démonstration est basée sur (1), et sur (2) qui implique qu'un amart tronqué par une constante est un amart.

(4) LA DECOMPOSITION DE RIESZ

Théorème : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un amart. Alors X_n s'écrit d'une seule façon sous la forme $Y_n + Z_n$, où Y_n est une martingale, et $Z_n \to 0$ dans tous les sens possibles : $Z_n \to 0$ p.p. et dans L^1, et $Z_\tau \to 0$ dans L^1. (Le fait que $Z_\tau \to 0$ p.p. est une conséquence triviale de la convergence de Z_n vers zéro p.p.)

Ce théorème, montrant qu'un amart ne diffère d'une martingale que par une suite nulle, est cependant assez difficile à démontrer ; en particulier, on utilise le théorème de convergence des amarts.

(5) UNE LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES

La décomposition de Doob est bien entendu valable pour les amarts (elle vaut pour des suites adaptées arbitraires), et donc :

$$X_n = M_n + A_n \quad ,$$

où $M_1 = X_1$, $A_1 = 0$, $A_{n+1} - A_n = E^{\mathfrak{F}_n} X_{n+1} - X_n$, $M_{n+1} - M_n = X_{n+1} - E^{\mathfrak{F}_n} X_{n+1}$.
Ici M_n est une martingale et A_n est un processus prévisible. Nous avons pour tout $p \geq 1$

$$(E\ |A_{n+1} - A_n|)^p \leq E(|A_{n+1} - A_n|^p)$$

$$\leq E(|X_{n+1} - X_n|^p)$$

puisque l'espérance conditionnelle est une contraction de L^p. Supposons que

$$\sup_n E\ |X_{n+1} - X_n|^2 < \infty \quad .$$

Soit $B_n = A_{n+1} - A_n$, alors $\sup_n E\ |B_n| < \infty$ et B_n est adaptée à $\mathfrak{F}_n$ puisque A_n est prévisible ; par conséquent B_n est un amart. Par le théorème de convergence des amarts, $B_n \to$ p.p., et $\frac{1}{n} A_n = \frac{1}{n} \sum_1^n B_i \to$ p.p. Aussi $\frac{1}{n} M_n \to$ p.p. (loi des grands nombres pour différences de martingales) ; par conséquent $\frac{1}{n} X_n \to$ p.p. Nous avons démontré une loi des grands nombres pour les différences des amarts.

(6) CAS VECTORIEL

Soit $\underline{E}$ un espace de Banach. Nous considérons ici des variables aléatoires à valeur dans $\underline{E}$, fortement mesurables et intégrables au sens de Pettis. Une suite adaptée est dite <u>un amart</u> si l'ensemble filtrant $E\ X_\tau$ converge dans la topologie forte de E.

Nous appelons une suite (X_n) adaptée à $(\mathfrak{F}_n)$ <u>de classe (B)</u> si

$$\sup_T E\ |X_\tau| < \infty \quad . \tag{B}$$

Les semi-amarts réels (bornés dans L^1 au cas où $\mathbb{D} = \mathbb{N}$) sont automatiquement de classe (B) -mais tel n'est pas le cas quand E a un nombre infini de dimensions. Alors la propriété d'être de classe (B), plutôt que d'être borné dans L^1, est cruciale.

Le cas $\mathbb{D} = \mathbb{N}$ du théorème suivant est démontré dans [2].

Théorème : Soit $\underline{E}$ un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym et tel que le dual $\underline{E}'$ soit séparable. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{D}}$ un amart de classe (B). Alors la suite $X_n(\omega)$ converge faiblement p.p.

Esquisse de la démonstration : Nous nous limitons au cas $\mathbb{D} = \mathbb{N}$. On utilise tout d'abord le lemme maximal pour se ramener au cas où $\sup_n |X_n|$ est finie p.p. On démontre que pour tout m, $\mu_m(A) = \lim_n E(1_A \cdot X_n)$ existe et est une mesure sur $\mathfrak{F}_m$. Puisque (X_n) est uniformément intégrable, $\mu_m = \mu$ définit une mesure sur $\mathfrak{F}_\infty$. Grâce à la propriété de Radon-Nikodym nous pouvons écrire $\mu(A) = \mathbf{E}(1_A \cdot X_\infty)$ pour une certaine v.a. X_∞ à valeurs dans $\underline{E}$. Le théorème de convergence des amarts numériques entraîne que

$$\forall f \in \underline{E}', \qquad \lim_n f[X_n(\omega)] = f[X_\infty(\omega)] \quad ,$$

si $\omega \notin N_f$, avec $P(N_f) = 0$.

Si l'on tient maintenant compte de la séparabilité du dual $\underline{E}'$, on voit qu'il existe un ensemble P-négligeable $N \in \mathfrak{F}_\infty$, tel que

$$\omega \notin N \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \text{faible } X_n(\omega) = X_\infty(\omega) \quad .$$

Remarquons qu'au cas $\mathbb{D} = -\mathbb{N}$ il y a un résultat valable sans que (X_n) soit supposée de classe (B), ou même Bochner intégrable.

Théorème : Soit E un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym et pourvu d'un dual E' séparable. Soit $(X_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ un amart. Alors la suite X_n converge faiblement p.p. sur l'ensemble $\{\sup_n |X_n| < \infty\}$.

Ce résultat semble nouveau même au cas où $(X_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ est une martingale. Il est connu que pour les martingales individuelles ascendantes, la convergence faible implique la convergence forte. Nous ne savons pas si cela est vrai pour les martingales descendantes.

Signalons finalement que dans le dernier théorème il est possible d'avoir $\sup_n E|X_n| = \infty$, mais $\sup_n |X_n| < \infty$ p.p. Le théorème peut même s'appliquer sans que les X_n soient Bochner intégrables :

Soit $\underline{E} = \ell_2$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base habituelle de e_2. Choisissons $A_n \in \mathfrak{F}_\infty$ de telle façon que $P(A_n) = 2^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$ et $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Définissons pour $n \in -\mathbb{N}$

$$X_n = \sum_{k=-n+1}^{\infty} e_k \frac{1}{k} 2^k 1_{A_k} \quad .$$

Alors

$$E|X_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \quad ,$$

mais $(X_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ est un amart. En effet, si $B_n = A_n \cap \{\tau > -n\}$, alors

$$X_\tau = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \frac{1}{n} 2^n 1_{B_n} \quad .$$

Si $\tau \leq N$

$$|E X_\tau - E X_N|^2 = |-\sum_{-N+1}^{\infty} e_n \frac{1}{n} 2^n P(A_n - B_n)|^2$$

$$\leq \sum_{n=-N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad .$$

Le dernier résultat que nous énonçons a été obtenu en collaboration avec Antoine Brunel. Un amart <u>faible</u> se définit comme un amart (fort), la convergence faible de $E X_\tau$ dans $\underline{E}$ remplaçant la convergence forte. Il se trouve qu'il y a ici un théorème donnant une caractérisation probabiliste des espaces réflexifs.

<u>Théorème</u> : Soit $\mathbb{D} = \mathbb{N}$, ou bien $\mathbb{D} = -\mathbb{N}$. Un espace de Banach $\underline{E}$ est réflexif si et seulement si tout amart faible à valeurs dans $\underline{E}$ et de classe (B), converge faiblement p.p.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.G. Austin, G.A. Edgar, et A. Ionescu Tulcea : Pointwise convergence in terms of expectations, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 30 (1974), 17-26.

[2] R.V. Chacon et L. Sucheston : On convergence of vector-valued asymptotic martingales, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 33 (1975), 55-59.

[3] N. Dunford et J.T. Schwartz : Linear Operators, New-York, Interscience, 1958.

[4] G.A. Edgar et L. Sucheston : Amarts : a class of asymptotic martingales, J. Multivariate Analysis (à paraître).

[5] G.A. Edgar et L. Sucheston : Amarts : une classe de martingales asymptotiques, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris (à paraître).
