Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Beauzamy

Opérateurs de type Rademacher entre espaces de Banach

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 6 et 7, p. 0-27
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1975-1976

OPERATEURS DE TYPE RADEMACHER ENTRE ESPACES DE BANACH

par B. BEAUZAMY

Exposés No VI-VII

2-9 Décembre 1975

ABSTRACT

Nous étendons, pour des opérateurs entre espaces de Banach, les définitions du type et du cotype Rademacher. Nous examinons les liens avec la présence de "structures homothétiques" dans les espaces de départ et d'arrivée de l'opérateur : lorsqu'ils contiennent, par exemple, tous deux des $\ell^1_{(n)}$ ou des $\ell^\infty_{(n)}$ uniformément. Nous montrons, pour des opérateurs de type Rademacher, un résultat analogue à la "loi forte des grands nombres". Nous étudions aussi, du point de vue des structures homothétiques, les espaces d'Interpolation, et nous obtenons, dans ce cadre, des résultats très semblables à ceux que nous avions obtenus dans [1] pour les opérateurs uniformément convexifiants, quoique les méthodes de démonstration soient complètement différentes.

⁂

INTRODUCTION

Le but du présent travail est l'étude des "structures homothétiques" dans deux espaces de Banach. Par exemple, E, F, et T, opérateurs de E dans F étant donnés, quand existe-t-il, pour tout n, des sous-espaces de E, presque isométriques à $\ell^1_{(n)}$, dont l'image par T soit aussi presque isométrique à $\ell^1_{(n)}$ (on verra au § 2 les définitions précises) ? Dans le cas où T est l'identité d'un espace, ceci se traduit par le fait que l'espace contient $\ell^1_{(n)}$ uniformément, ce qui a lieu, d'après un résultat de G. Pisier [9], si et seulement si il n'est de type Rademacher pour aucun $p > 1$ (on dit qu'il n'est pas B-convexe). Nous serons donc amenés à introduire une classe d'opérateurs généralisant celle des opérateurs de type p-Rademacher pour un $p > 1$, et, de façon analogue, une classe d'opérateurs généralisant celle des opérateurs de cotype q-Rademacher, pour $q < \infty$.

Les définitions et les premières propriétés de ces classes d'opérateurs sont données au § 1. Au § 2, nous montrons qu'elles possèdent effectivement les propriétés souhaitées : un opérateur appartient à la classe si et seulement si il n'existe pas, dans ses espaces de départ et d'arrivée, de structures homothétiques correspondantes.

Il en résulte que la première d'entre elles, constitutée d'opérateurs que nous appelons "de type Rademacher", est stable par transposition. Nous montrons également, pour ces opérateurs, un analogue de la "loi forte des grands nombres", démontré par A. Beck [4] pour les espaces de Banach B-convexes.

Les opérateurs de type Rademacher, comme nous le montrons par un exemple, ne possèdent pas la propriété de factorisation : un opérateur de type Rademacher ne se factorise pas nécessairement par un espace de type Rademacher (c'est-à-dire B-convexe).

Toutefois, si, au lieu d'étudier les opérateurs qui "ne contiennent pas $\ell^1_{(n)}$ uniformément" (c'est-à-dire qui sont de type Rademacher), nous étudions les opérateurs qui "ne contiennent pas ℓ^1", la propriété de factorisation devient vraie : un opérateur qui "ne contient pas ℓ^1" se factorise par un espace qui ne contient pas ℓ^1. Comme dans [1], elle est démontrée dans le cadre des espaces d'Interpolation. Plus précisément, nous démontrons au § 3 que, s'il existe une injection continue de A_o dans A_1, les espaces $(A_o,A_1)_{\theta,p}$, $0<\theta<1$, $1<p<\infty$, contiennent ℓ^1 si et seulement si A_o et A_1 contiennent des ℓ^1 homothétiques. Ce résultat, qui est optimal, est l'analogue de celui obtenu dans [1] pour la réflexivité.

Pour terminer, nous nous intéressons au comportement de l'Interpolation à l'égard des opérateurs de type Rademacher. Comme dans [1], nous n'obtenons qu'une condition suffisante : si T opère de A_o dans B_o, de A_1 dans B_1, et est de type Rademacher de A_o dans B_o, il est aussi de type Rademacher de $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ dans $(B_o,B_1)_{\theta,p}$, si $0<\theta<1$, $1<p<\infty$.

Quoique les méthodes de démonstration soient complètement différentes, l'analogie est grande entre les résultats que nous obtenons ici et ceux que nous avions démontrés dans [1]. Pour mieux la comprendre, il faut remarquer qu'un opérateur est de type Rademacher si et seulement si aucune homothétie de ℓ^1 dans ℓ^1 n'y est finiment représentable (au sens que nous avons défini dans [2]), et qu'un opérateur est uniformément convexifiant si aucun opérateur vérifiant

$$\text{dist}[\text{conv}(Tx_1,\ldots,Tx_k),\ \text{conv}(Tx_{k+1},\ldots\ldots)] > \theta \quad ,$$

$k=1,2,\ldots\ldots$, pour une suite bornée (x_k), n'y est finiment représentable.

Je tiens enfin à remercier M. le Professeur T. Figiel pour sa contribution, tout à fait essentielle, à la démonstration des résultats qui suivent.

§ 1. DEFINITIONS ET PREMIERES PROPRIETES

Soient E et F deux espaces de Banach, T un opérateur linéaire continu de E dans F. Nous désignons par $(\varepsilon_i(t))$ la suite des variables de Rademacher sur $[0,1]$.

Rappelons (voir p. ex. [9]) que T est de type p-Rademacher $(1<p\le 2)$ si l'on peut trouver une constante C telle que, pour tout n-uple $(x_1,\ldots,x_n)$ de points de E, on ait :

$$\int \Big\|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\ Tx_i\Big\|_F\ dt \le C\Big(\sum_1^n \|x_i\|_E^p\Big)^{1/p} \quad .$$

T est de cotype q-Rademacher ($2 \leq q < \infty$) si l'on peut trouver une constante C' telle que, pour tout n-uple $(x_1,\dots,x_n)$ de points de E, on ait :

$$\left(\sum_1^n \|Tx_i\|_F^q\right)^{1/q} \leq C' \int \left\|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\, x_i\right\|_E dt \quad .$$

On dit qu'un espace de Banach E contient $\ell^1_{(n)}$ uniformément (resp. contient $\ell^\infty_{(n)}$ uniformément) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver dans E des points $x_1,\dots,x_n$ tels que, pour toute suite de scalaires $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, on ait

$$(1-\varepsilon) \sum_1^n |\alpha_i| \leq \left\|\sum_1^n \alpha_i\, x_i\right\| \leq (1+\varepsilon) \sum_1^n |\alpha_i|$$

$$\text{(resp.}\quad (1-\varepsilon) \sup|\alpha_i| \leq \left\|\sum_1^n \alpha_i\, x_i\right\| \leq (1+\varepsilon) \sup|\alpha_i| \;) \quad .$$

On dit qu'un espace de Banach E est B-convexe s'il ne contient pas $(\ell^1_{(n)})$ uniformément. Il a été démontré par G. Pisier [9] qu'un espace était B-convexe si et seulement si il était (c'est-à-dire si son identité était) de type p-Rademacher pour un $p > 1$, et, de même, qu'un espace ne contenait pas ℓ^∞_n uniformément si et seulement si il était de cotype q-Rademacher pour un $q < \infty$. Nous allons généraliser ces définitions et ces résultats.

Définition : Nous dirons que T est de type Rademacher si la suite de nombres réels

$$(1) \qquad a_n(T) = \sup_{\substack{x_1,\dots,x_n \\ \|x_i\|_E \leq 1}} \frac{1}{n} \int \left\|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\, Tx_i\right\|_F dt$$

tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Nous dirons que T est de cotype Rademacher si la suite de nombres réels

$$(2) \qquad a'_n(T) = \inf_{\substack{x_1,\dots,x_n \\ \|Tx_i\|_F \geq 1}} \int \left\|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\, x_i\right\|_E dt$$

tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini.

Il est clair que si un opérateur est de type p-Rademacher pour un $p \in]1,2]$, il est de type Rademacher, et que s'il est de cotype q-Rademacher pour un $q \in [2,+\infty[$, il est de cotype Rademacher.

Nous avons défini dans [2] la finie-représentabilité d'un opérateur $T_1 : E_1 \to F_1$ dans T. On vérifie facilement qu'avec cette définition, le type et le cotype Rademacher sont des super-propriétés : si T les possède, tout opérateur qui y est finiment représentable les possède aussi.

Remarque : Si l'on pose

$$a_n^{(p)}(T) = \sup_{\|x_i\|_E \le 1} \frac{1}{n} \left(\int \|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\ Tx_i\|_F^p\ dt \right)^{1/p}$$

$$a_n'^{(p)}(T) = \inf_{\|Tx_i\|_F \ge 1} \left(\int \|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\ x_i\|_E^p\ dt \right)^{1/p}$$

pour $1 \le p < \infty$, les suites $a_n^{(p)}(T)$ tendent vers 0 si et seulement si $a_n(T)$ tend vers 0, et $a_n'^{(p)}(T)$ tendent vers l'infini si et seulement si $a_n'(T)$ tend vers l'infini : sur les variables de Rademacher les moments de tous ordres sont équivalents, ainsi qu'il résulte d'un théorème de J.P. Kahane.

Les définitions que nous avons données permettent d'étendre un certain nombre de résultats connus pour les opérateurs de type p et de cotype q.

Proposition 1 : Si T est de type Rademacher, son transposé est de cotype Rademacher.

Démonstration : Nous allons montrer que $\forall$ n, $a_n^{(2)}(T).a_n'^{(2)}({}^tT) \ge 1$, ce qui prouvera notre proposition.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\xi_1,\dots,\xi_n \in F'$ des formes linéaires avec $\|{}^tT\ \xi_i\|_{E'} = 1$, $i = 1,\dots,n$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver $x_1,\dots,x_n \in E$, avec $\|x_i\|_E = 1$ et $\langle {}^tT\xi_i\ x_i \rangle \ge 1-\varepsilon$. On a donc :

$$1-\varepsilon \le \frac{1}{n} \sum_1^n \langle {}^tT\ \xi_i, x_i \rangle = \frac{1}{n} \sum_1^n \langle \xi_i, Tx_i \rangle$$

$$= \frac{1}{n} \int \langle \sum_1^n \varepsilon_i(t)\ \xi_i\ ,\ \sum_1^n \varepsilon_i(t)\ Tx_i \rangle\ dt$$

$$\le \left(\int \|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\ \xi_i\|_{F'}^2\ dt \right)^{1/2} . \left(\int \|\frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_i(t)\ Tx_i\|_F^2\ dt \right)^{1/2}$$

Ce qui prouve notre assertion.

Le cas des opérateurs de type Rademacher à valeurs dans un espace L^1 est particulièrement simple ; la proposition ci-dessous généralise un résultat de B. Maurey [8] :

Proposition 2 : Si T, à valeurs dans un espace $L^1(\Omega,\mu)$ (où μ est une probabilité), est de type Rademacher, il se factorise par un espace d'Orlicz $L^\varphi(\Omega,\mu)$, où φ est une fonction d'Orlicz avec $\frac{\varphi(t)}{t} \nearrow \infty$.

(Ceci signifie que l'on peut trouver un opérateur $S : E \to L^\varphi$ tel que $T = i \circ S$, si i est l'injection de L^φ dans L^1.)

Démonstration : Il suffit pour établir ce résultat de prouver que T est faiblement compact. Or, s'il ne l'était pas, on pourrait, d'après Kadec et Pełczynski [7], trouver dans E une suite bornée dont l'image par T soit équivalente à la base canonique de ℓ^1. Il est alors facile de vérifier que $a_n(T)$ ne peut tendre vers 0, et T n'est donc pas de type Rademacher.

Nous verrons plus loin que la réciproque de cette proposition est vraie : si un opérateur à valeur dans $L^1(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^\varphi(\Omega,\mu)$ (avec $\frac{\varphi(t)}{t} \nearrow \infty$) et l'injection de L^φ dans L^1, il est de type Rademacher.

Il résulte de la proposition que nous venons d'établir que, pour un opérateur à valeurs dans $L^1(\Omega,\mu)$, être de type Rademacher équivaut à être uniformément convexifiant, au sens que nous avons défini dans [1].

Remarque : On peut démontrer que, si T est de type Rademacher, il existe une fonction d'Orlicz ψ, avec $\frac{\psi(t)}{t}$ croissante et $\frac{\psi(t)}{t} \to 0$ $t \to 0$, telle que T soit de type ψ-Rademacher, en ce sens que, pour toute suite (x_n) de points de E :

$$\Sigma\, \psi(\|x_n\|) < \infty \Longrightarrow \int \|\Sigma\, \varepsilon_i(t)\, Tx_i\|\, dt < \infty \quad .$$

Un résultat analogue peut être établi pour le cotype.

§ 2. STRUCTURES HOMOTHETIQUES DANS DEUX ESPACES DE BANACH

Définition : Nous dirons que les espaces E et F possèdent des $\ell^1_{(n)}$ liés par T si l'on peut trouver une constante θ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des points $x_1,\dots,x_n$ dans E, avec, pour toute suite de scalaires $\alpha_1,\dots,\alpha_n$:

$$(3)\qquad \begin{cases} (1-\varepsilon) \sum_1^n |\alpha_i| \leq \|\sum_1^n \alpha_i\ x_i\|_E \leq \sum_1^n |\alpha_i| \\ (1-\varepsilon)\,\theta \sum_1^n |\alpha_i| \leq \|\sum_1^n \alpha_i\ Tx_i\|_F \leq \theta \sum_1^n |\alpha_i| \ . \end{cases}$$

Nous dirons de même que E et F possèdent des $\ell^\infty_{(n)}$ liés par T si l'on peut trouver une constante θ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des points $x_1,\dots,x_n$ dans E, avec, pour toute suite de scalaires $\alpha_1,\dots,\alpha_n$:

$$(4)\qquad \begin{cases} (1-\varepsilon) \sup|\alpha_i| \leq \|\sum_1^n \alpha_i\ x_i\|_E \leq \sup|\alpha_i| \\ (1-\varepsilon)\,\theta \sup|\alpha_i| \leq \|\sum_1^n \alpha_i\ Tx_i\|_F \leq \theta \sup|\alpha_i| \ . \end{cases}$$

Il est clair que si T est l'identité d'un espace, ces définitions se réduisent au fait que l'espace contient $\ell^1_{(n)}$ ou $\ell^\infty_{(n)}$ uniformément.

Remarque : Les définitions ci-dessus signifient que la multiplication par θ, de ℓ^1 dans ℓ^1, ou de ℓ^∞ dans ℓ^∞, est finiment représentable dans T, au sens de [2].

Pour simplifier les notations, nous poserons désormais $|x| = \|Tx\|_F$, $\|x\| = \|x\|_E$. Nous supposerons $\|T\| \leq 1$, ce qui n'est en rien une restriction.

Lemme 1 : S'il existe un nombre θ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $n \in \mathbb{N}$, on puisse trouver dans E des points $x_1^{(n)},\dots,x_n^{(n)}$, avec, pour toute suite de scalaires $\alpha_1,\dots,\alpha_n$:

$$(5)\qquad \begin{cases} (1-\varepsilon) \sum_1^n |\alpha_j| \leq |\sum_1^n \alpha_j\ x_j^{(n)}| \leq \sum_1^n |\alpha_j| & \text{(a)} \\ \|x_j^{(n)}\| \leq \frac{1}{\theta} & \text{(b)} \end{cases}$$

E et F possèdent des $\ell^1_{(n)}$ liés par T.

Démonstration : On déduit de (5) que $\|\sum_1^n \alpha_j\, x_j^{(n)}\| \geq (1-\varepsilon) \sum_1^n |\alpha_j|$. Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$, et considérons les ultrapuissances $\tilde{E} = E^{\mathbb{N}}/\mathfrak{U}$, $\tilde{F} = F^{\mathbb{N}}/\mathfrak{U}$ (on pourra par exemple voir dans [11] les définitions et les premières propriétés de ces ultrapuissances). Il est clair que l'opérateur T se prolonge en un opérateur $\tilde{T}$, de $\tilde{E}$ dans $\tilde{F}$, et nous avons démontré dans [2] que $\tilde{T}$ était finiment représentable dans T.

On définit un élément de $\tilde{E}$ en posant :

$$x_k(n) = x_k^{(n)} \quad \text{si } n \geq k$$
$$= 0 \quad \text{sinon,}$$

où $x_k^{(n)}$ vérifie (a) avec ε/n.
Pour toute suite de scalaires (α_i), on a :

$$\begin{cases} |\sum \alpha_i\, x_i| = \sum |\alpha_i| \\ \|x_i\| \leq \dfrac{1}{\theta} \end{cases} .$$

D'après un lemme de R.C. James ([6], lemme 2.1), on peut trouver une constante C, et, pour tout $\varepsilon > 0$, une suite croissante d'entiers, $p_1, p_2, \ldots$, des coefficients α_i, $p_j < i \leq p_{j+1}$, $j = 1,2,\ldots$, avec :

(6) $$\sum_{p_j+1}^{p_{j+1}} |\alpha_i| = 1 \quad , \qquad j = 1,2,\ldots$$

tels que si l'on pose $y_j = \dfrac{1}{C(1+\varepsilon)} \sum_{p_j+1}^{p_{j+1}} \alpha_i\, x_i$, on ait, pour toute suite de scalaires (β_j) :

$$(1-\varepsilon) \sum |\beta_j| \leq \|\sum \beta_j\, y_j\| \leq \sum |\beta_j| \quad .$$

Par ailleurs, puisque les coefficients α_i, $p_j < i \leq p_{j+1}$ vérifient (6), on a encore

$$|\sum \beta_j\, y_j| = \frac{1}{C(1+\varepsilon)} \sum |\beta_j| \quad .$$

En utilisant le fait que $\tilde{T}$, de $\tilde{E}$ dans $\tilde{F}$, est finiment représentable dans T, on obtient le résultat voulu.

<u>Lemme 2</u> : S'il existe un nombre θ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on puisse trouver dans E des points $x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$, avec, pour toute suite de scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

$$\begin{cases} (1-\varepsilon) \sup|\alpha_i| \leq \left\|\sum_1^n \alpha_i \, x_i^{(n)}\right\| \leq (1+\varepsilon) \sup|\alpha_i| \\ |x_i| \geq \theta \end{cases}$$

les espaces E et F contiennent des $\ell^{\infty}_{(n)}$ liés par T.

<u>Démonstration</u> : Ce lemme s'obtient de la même manière que le précédent : on construit dans $\tilde{E}$ une suite infinie de points (x_i) avec :

$$\begin{cases} \left\|\sum \alpha_i \, x_i\right\| = \sup |\alpha_i| \\ |x_i| \geq \theta \end{cases}$$

et, en utilisant un autre lemme de R.C. James ([6], lemme 2.2) on peut trouver une constante C et, pour tout $\varepsilon > 0$, une suite de points y_j, avec

$$y_j = \sum_{p_j+1}^{p_{j+1}} a_i \, x_i \,, \quad \text{où} \quad \sup_{p_j < i \leq p_{j+1}} |a_i| = 1, \text{ tels que}$$

$$\begin{cases} (1-\varepsilon) \sup|\beta_j| \leq \left|\sum \beta_j \, y_j\right| \leq (1+\varepsilon) \sup|\beta_j| \\ \left\|\sum \beta_j \, y_j\right\| = \frac{1}{(1+\varepsilon)C} \sup|\beta_j| \end{cases}$$

et l'on en déduit le résultat grâce à la finie-représentabilité de $\tilde{T}$ dans T.

Nous allons maintenant établir le résultat principal de ce paragraphe :

<u>Théorème 1</u> : T est de type Rademacher si et seulement si E et F ne contiennent pas de $\ell^1_{(n)}$ liés par T.

Démonstration : Il est clair sur la définition que si E et F contiennent des $\ell^1_{(n)}$ liés par T, celui-ci ne peut être de type Rademacher. Il nous suffira donc d'établir l'implication inverse.

Nous supposons donc que les nombres a_n ne tendent pas vers 0. Soit $\theta = \limsup_{n\to\infty} a_n$; on a $\theta > 0$.

Lemme 3 : Pour tous $n,k \in \mathbb{N}$, on a $a_{nk} \leq a_n$.

Démonstration : Notons A_j l'ensemble des entiers $(j-1)k+1,\dots,jk$. Soient $x_1,\dots,x_{nk}$ nk vecteurs de E. On a :

$$\frac{1}{nk}\int \Big|\sum_1^{nk} \varepsilon_i(t)\, x_i\Big| dt = \frac{1}{n}\iint \Big|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(\tau)\, \frac{1}{k}\sum_{i\in A_j} \varepsilon_i(t)\, x_i\Big| d\tau\, dt \quad .$$

On peut donc trouver un nombre $t_o \in [0,1]$ pour lequel

$$\frac{1}{nk}\int \Big|\sum_1^{nk} \varepsilon_i(t)\, x_i\Big| dt \leq \frac{1}{n}\int \Big|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(\tau)\, \frac{1}{k}\sum_{i\in A_j} \varepsilon_i(t_o)\, x_i\Big| d\tau \quad .$$

Si l'on pose $y_j = \frac{1}{k}\sum_{i\in A_j} \varepsilon_i(t_o)\, x_i$, on obtient $\|y_j\| \leq 1$ et

$$\sup_{\|x_i\|\leq 1} \frac{1}{nk}\int \Big|\sum_1^{nk} \varepsilon_i(t)\, x_i\Big| dt \qquad \leq \qquad \frac{1}{n}\int \Big|\sum_1^{n} \varepsilon_j(\tau)\, y_j\Big| d\tau$$

d'où l'on déduit le résultat annoncé.

Lemme 4 : Pour tout n, on a $a_n \geq \theta$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\theta = \limsup a_n$, on peut trouver une suite d'entiers $n_j \underset{j\to\infty}{\to} \infty$, telle que $a_{n_j} \geq (1-\varepsilon)\theta \ \forall\, j \in \mathbb{N}$. En outre, on choisit j_o assez grand pour que si $j \geq j_o$, $a_{n_j} \leq (1+\varepsilon)\theta$.

Soit m l'un des entiers n_j, et soit $r \leq m$. Si $x_1,\dots,x_m$ sont des vecteurs de norme au plus égale à 1 :

$$\begin{aligned}
a_{m-r} &\geq \frac{1}{m-r}\int \Big|\sum_1^{m-r} \varepsilon_i(t)\, x_i\Big| dt \\
&\geq \frac{1}{m-r}\Big(\int \Big|\sum_1^{m} \varepsilon_i(t)\, x_i\Big| dt - \int \Big|\sum_{m-r+1}^{m} \varepsilon_i(t)\, x_i\Big| dt\Big) \\
&\geq \frac{m}{m-r}\, a_m - \frac{r}{m-r} \geq \frac{m(1-\varepsilon)\theta - r}{m-r}
\end{aligned}$$

et on aura

$$a_{m-r} \geq (1-2\varepsilon)\theta$$

dès que $$m\varepsilon\theta \geq r(1-(1-2\varepsilon)\theta)$$

et donc a fortiori dès que $m\varepsilon\theta \geq r$.

Soit maintenant n un entier quelconque et choisissons $m \geq \frac{n}{\varepsilon\theta}$. En divisant m par n, on obtient $m = nk + r$, $r \leq n$, et donc $r \leq m\varepsilon\theta$. On a donc :

$$a_{nk} \geq (1-2\varepsilon)\theta$$

et, d'après le lemme 3,

$$a_n \geq (1-2\varepsilon)\theta \quad .$$

On en déduit que $a_n \geq \theta$, ce qui prouve notre lemme. Il en résulte évidemment que la suite (a_n) converge vers θ.

Posons maintenant

$$b_n = \sup_{\substack{x_1 \ldots x_n \\ \|x_i\|_E \leq 1}} \frac{1}{n} \inf_{\varepsilon_i = \pm 1} \left|\sum_1^n \varepsilon_i \, x_i\right| \quad .$$

Il est clair que $b_n \leq a_n$, $\forall$ n.

<u>Lemme 5</u> : Si $a_n \geq \theta$ $\forall$ n, on a $b_n \geq \theta$ $\forall$ n.

<u>Démonstration</u> : Soient $\eta > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés, soient $k, \ell \in \mathbb{N}$. Comme précédemment notons A_j l'ensemble des entiers $(j-1)k+1, \ldots, jk$, pour $j = 1,2,\ldots,n\ell$. On pose $N = n\ell$. Choisissons k_o tel que si $k \geq k_o$, $a_k \leq (1+\eta)\theta$. Pour k et ℓ choisis avec $k \geq k_o$, on peut, puisque $a_{Nk} \geq \theta$, trouver Nk vecteurs e_i, avec $\|e_i\| \leq 1$ et

$$\frac{1}{Nk} \int \left|\sum_1^{Nk} \varepsilon_i(t) \, e_i\right| dt \geq (1-\eta)\theta$$

et puisque $k \geq k_o$, on aura

$$\frac{1}{k}\int \Big| \sum_{i\in A_j} \varepsilon_i(t)\; e_i \Big| dt \le (1+\eta)\theta \quad .$$

On utilise le sous-lemme suivant, dont la démonstration est immédiate :

<u>Sous-lemme</u> : Si $f_1,\dots,f_n,\dots$ sont des variables aléatoires indépendantes avec

$$0 \le f_j \le 1 \quad , \quad \mathbb{E}\, f_j \le C \le 1 \quad ,$$

et si $C_1 > C$, on peut, pour tout $\delta > 0$, trouver un nombre $N(\delta)$ tel que si $N \ge N(\delta)$, on ait

$$P\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f_j \le C_1\right) \ge 1-\delta \quad .$$

Revenons à la démonstration de notre lemme.
Posons $x_j(t) = \frac{1}{k}\sum_{i\in A_j} \varepsilon_i(t)\; e_i$, $f_j(t) = |x_j(t)|$.
On a $\mathbb{E}\, f_j \le (1+\eta)\theta$; on peut donc trouver un nombre N_o et un ensemble Ω_η , de mesure au moins égale à $1-\eta\theta$, tels que

$$\forall\; t \in \Omega_\eta \;, \qquad \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} f_j \le (1+2\eta)\theta \quad \text{si } N \ge N_o \quad .$$

Choisissons ℓ assez grand pour que $N = n\ell \ge N_o$. On a :

$$(1-\eta)\theta \le \frac{1}{Nk}\int \Big|\sum_{1}^{Nk} \varepsilon_j(t)\; e_j\Big| dt = \frac{1}{N}\iint \Big|\sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j(\tau)\; x_j(t)\Big| dt\, d\tau$$

et donc :

$$\int_{\Omega_\eta}\left(\int \Big|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j(\tau)\; x_j(t)\Big| d\tau\right) dt \ge (1-2\eta)\theta \quad .$$

On peut donc trouver un point t_o dans Ω_η tel que, si l'on pose $x_j = x_j(t_o)$, on ait :

$$\int \Big|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j(\tau)\; x_j\Big| d\tau \ge (1-2\eta)\theta \quad ,$$

et, pour tous $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N = \pm 1$,

(7) $$\frac{1}{N}\Big|\sum_{1}^{N} \varepsilon_j\; x_j\Big| \le \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} |x_j| = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} f_j(t_o) \le (1+2\eta)\theta \quad .$$

Soit maintenant B_α l'ensemble des entiers $(\alpha-1)\ell+1,\dots,\alpha\ell$, pour $\alpha=1,\dots,n$. Posons $y_\alpha(s)=\frac{1}{\ell}\sum_{i\in B_\alpha}\varepsilon_i(s)\,x_i$. On a :

$$(1-2\eta)\theta \le \iint \Big|\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_\alpha(\tau)\,y_\alpha(s)\Big|\,ds\,d\tau$$

et il existe donc s_o tel que, en posant $y_\alpha=y_\alpha(s_o)$, on ait

(8) $$(1-2\eta)\theta \le \int \Big|\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_\alpha(\tau)\,y_\alpha\Big|\,d\tau$$

avec $\|y_\alpha\|\le 1$ pour $\alpha=1,\dots,n$.
Par ailleurs, on a d'après (7)

$$\frac{1}{n}\Big|\sum_1^n \varepsilon_\alpha\, y_\alpha\Big| \le (1+2\eta)\theta \qquad \forall\ \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n=\pm1 \quad ,$$

dès que l'on a choisi ℓ assez grand pour que $n\ell_o\ge N_o$.

Soit $a=\inf_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n=\pm1}\frac{1}{n}\Big|\sum_{\alpha=1}^n\varepsilon_\alpha\, y_\alpha\Big|$. De (8) on déduit $a\ge(1+(2\eta-2^{n+2}\eta))\theta$, et donc $b_n\ge(1-2^{n+2}\eta)\theta$. Il en résulte que $b_n\ge\theta$, ce qui établit notre lemme.

<u>Lemme 6</u> : Si $b_n\ge\theta>0$ $\forall$ n, et $b_n\to\theta$, E et F ont des $\ell^1_{(n)}$ liés par T.

<u>Démonstration</u> : Soit $\varepsilon>0$. Soit k_o tel que $b_k\le(1+\varepsilon)\theta$ si $k\ge k_o$. Soit n fixé, et $k\in\mathbb{N}$, $N=nk$.

Choisissons $e_1,\dots,e_N$ avec $\|e_i\|\le1$ et, $\forall\ \varepsilon_1\dots\varepsilon_N=\pm1$, $\frac{1}{N}\Big|\sum_1^N\varepsilon_i\,e_i\Big|\ge(1-\varepsilon)\theta$.
Considérons, comme précédemment, les ensembles $A_j=(j-1)k+1,\dots,jk$, pour $j=1,\dots,n$. On peut, pour chaque j, trouver un choix de signes ε_i, $i\in A_j$, pour lequel

$$\frac{1}{k}\Big|\sum_{i\in A_j}\varepsilon_i\,e_i\Big| \le (1+\varepsilon)\theta \quad .$$

Posons $x_j=\frac{1}{k}\sum_{i\in A_j}\varepsilon_i\,e_i$. On a $|x_j|\le(1+\varepsilon)\theta$, et si $\eta_1\dots\eta_n=\pm1$,

$$\frac{1}{n}\Big|\sum_1^n\eta_j\,x_j\Big|\ge(1-\varepsilon)\theta \quad , \quad \text{et} \quad \|x_j\|\le 1 \quad .$$

Si l'on pose $y_j = \frac{x_j}{(1+\varepsilon)\theta}$, on a $|y_j| \leq 1$, et $|\sum_1^n \eta_j\ y_j| \geq n(1-2\varepsilon)$, d'où l'on déduit par un argument standard, pour toute suite $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ de scalaires :

$$|\sum_1^n \alpha_j\ y_j| \geq (1-2n\varepsilon) \sum_1^n |\alpha_j|$$

avec
$$\|y_j\| \leq \frac{1}{(1+\varepsilon)\theta} \quad .$$

On est alors dans les conditions d'applications du lemme 1, ce qui achève notre démonstration.

Nous allons maintenant établir le résultat correspondant pour le cotype.

<u>Théorème 2</u> : T est de cotype Rademacher si et seulement si E et F n'ont pas de $\ell^\infty_{(n)}$ liés par T.

<u>Démonstration</u> : On suppose donc que la suite a'_n ne tend pas vers l'infini. Comme dans la démonstration précédente, nous allons voir qu'elle est convergente.

<u>Lemme 7</u> : a'_n est une suite croissante.

<u>Démonstration</u> : Soit $\varepsilon > 0$; on peut trouver $x_1, \ldots, x_n$, avec $|x_i| = 1$, et

$$(1+\varepsilon)a'_n \geq \int \|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\ x_i\|dt = \int\int \|\sum_1^{n-1} \varepsilon_i(t)x_i + \varepsilon_n(s)\ x_n\|dt\ ds$$
$$\geq \int \|\sum_1^{n-1} \varepsilon_i(t)\ x_i\|dt \geq a'_{n-1} \quad .$$

<u>Lemme 8</u> : Si $x_1, \ldots, x_n$, a sont des vecteurs dans un espace de Banach, on a :

$$\int \|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\ x_i + a\|dt \geq \int \|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\ x_i\|dt \quad .$$

<u>Démonstration</u> : On a

$$\int \|\sum_1^n \varepsilon_i(t) + a\|dt = \int \|-\sum_1^n \varepsilon_i(t)\ x_i + a\|dt$$

$$= \int \|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\ x_i - a\|dt$$

$$= \frac{1}{2} \int (\|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\ x_i + a\| + \|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\ x_i - a\|)dt$$

$$\geq \int \|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\ x_i\|dt \quad .$$

Revenons à la démonstration du théorème 2. Il résulte évidemment du lemme 7 que la suite a'_n est convergente ; soit $M = \lim_{n\to\infty} a'_n$.

Soit $\varepsilon > 0$, et $n \in \mathbb{N}$ donnés. On peut trouver k_o tel que

$$\forall\ k \geq k_o \quad , \qquad a'_k \geq M(1-\varepsilon) \quad .$$

Soit $\ell = nk$, et $\eta = 2^{-\ell-1}\varepsilon$. On peut trouver K_o tel que

$$\forall\ K \geq K_o \quad , \qquad a'_K \geq M(1-\eta) \quad .$$

On choisit $K \geq K_o$, et on pose $N = K+\ell$.
On choisit N vecteurs $x_1,\dots,x_N$, avec $|x_i| \geq 1$ et

$$\int \|\sum_1^N \varepsilon_i(t)\ x_i\|dt \leq M(1+\eta) \quad .$$

Si l'on pose

$$f(s) = \int \|\sum_1^\ell \varepsilon_i(s)\ x_i + \sum_{\ell+1}^N \varepsilon_i(t)\ x_i\|dt \quad .$$

On a
$$\int f(s)\ ds \leq M(1+\eta)$$

et, d'après le lemme 8, pour tout s :

$$f(s) \geq \int \|\sum_{\ell+1}^N \varepsilon_i(t)\ x_i\|dt \geq (1-\eta)M \quad . \tag{9}$$

Il en résulte que pour tout s :

$$f(s) \leq M(1+2^{\ell+1}\eta) \leq M(1+\varepsilon) \quad .$$

Et comme par ailleurs on a

$$\Big\|\sum_1^{\ell} \varepsilon_i(s)\, x_i\Big\| \leq f(s) \quad ,$$

on obtient

$$(10) \quad \forall\, s, \qquad \Big\|\sum_1^{\ell} \varepsilon_i(s)\, x_i\Big\| \leq M(1+\varepsilon) \quad .$$

On montre exactement de la même façon que

$$(11) \quad \forall\, s, \qquad \Big\|\sum_{i\in A_j} \varepsilon_i(s)\, x_i\Big\| \leq M(1+\varepsilon)$$

où A_j désigne, comme précédemment, l'ensemble des entiers $(j-1)k+1,\dots,jk$.
Comme $|A_j| = k$, on a aussi

$$(12) \quad j = 1,\dots,n \ : \qquad \int \Big\|\sum_{i\in A_j} \varepsilon_i(s)\, x_i\Big\| ds \geq M(1-\varepsilon) \quad .$$

<u>Lemme 9</u> : Pour chaque $j = 1,\dots,n$, on peut trouver un choix de signes $(\varepsilon_i)_{i\in A_j}$, pour lequel on a simultanément :

$$\begin{cases} \Big\|\sum_{i\in A_j} \varepsilon_i\, x_i\Big\| \geq M(1-4\varepsilon) \\[2ex] \Big|\sum_{i\in A_j} \varepsilon_i\, x_i\Big| \geq 1 \quad . \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> :

1) Soit $a > 0$. Cherchons la plus petite valeur que peut prendre a pour que, pour au moins 2^{k-1} choix de signes ε_i , on ait

$$\Big\|\sum_{i\in A_j} \varepsilon_i\, x_i\Big\| \leq a \quad .$$

Si a_o est cette valeur, on aura, d'après (11) et (12) :

$$M(1-\varepsilon) \leq \frac{2^{k-1} a_o + 2^{k-1} M(1+\varepsilon)}{2^k}$$

et donc $$a_o \geq M(1-3\varepsilon) \quad .$$

Par conséquent, si $a = M(1-4\varepsilon)$, on est sûr que plus de 2^{k-1} choix de signes donnent à $\Big\|\sum_{i\in A_j} \varepsilon_i\, x_i\Big\|$ une valeur supérieure à a.

2) On sait que $|x_i| \geq 1$. Il y a au moins 2^{k-1} choix de signes pour lesquels $|\sum_{i\in A_j} \varepsilon_i x_i| \geq 1$. En effet, si $\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k$ sont choisis, ou bien ε_1, ou bien $-\varepsilon_1$ conviennent : si l'on a à la fois

$$\begin{cases} |\varepsilon_1 x_1 + \sum_2^k \varepsilon_i x_i| < 1 \\ |-\varepsilon_1 x_1 + \sum_2^k \varepsilon_i x_i| < 1 \end{cases}$$

alors $|x_1| < 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il est donc clair qu'il existe un choix de signes satisfaisant à la fois à 1) et 2).

Revenons à la démonstration de notre théorème. Pour $j = 1,\ldots,n$, posons $y_j = \sum_{i\in A_j} \varepsilon_i x_i$, où les $(\varepsilon_i)_{i\in A_j}$ sont donnés par le lemme 9. On a $\|y_j\| \geq M(1-4\varepsilon)$, et donc si l'on pose

$$z_j = y_j/M(1-4\varepsilon) \quad ,$$

on obtient :

$$(13) \qquad \|\sum_1^n \varepsilon_j z_j\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-4\varepsilon} = 1+\delta$$

$$(14) \qquad \|z_j\| \geq 1 \quad , \quad |z_j| \geq \frac{1}{M(1-4\varepsilon)} \quad .$$

On déduit alors de (13) et (14) par des arguments standard :

$$(1-2\delta) \sup|\alpha_j| \leq \|\sum_1^n \alpha_j z_j\| \leq (1+\delta) \sup|\alpha_j|$$

avec $|z_j| \geq \frac{1}{M(1-4\varepsilon)}$,
et le lemme 2 permet d'achever la démonstration du théorème.

<u>Proposition 3</u> : T est de type Rademacher si et seulement si son transposé est aussi de type Rademacher.

<u>Démonstration</u> : Si T n'est pas de type Rademacher, E et F contiennent des $\ell^1_{(2^n)}$ liés par T, et on peut donc trouver des $\ell^\infty_{(2^n)}$ dans des quotients

de E' et F', liés par l'opérateur déduit de ${}^tT$ par passage à ces quotients. Mais $\ell^1_{(n)}$ se plonge isométriquement dans $\ell^\infty_{(2^n)}$ (au moyen du système de Rademacher) ; en relevant à E' et F' ces $\ell^1_{(n)}$, on obtient dans E' et F' des $\ell^1_{(n)}$ liés par T.

Réciproquement, si ${}^tT$ n'est pas de type Rademacher, on peut trouver dans E' et F' des $\ell^1_{(2^n)}$ liés par ${}^tT$, et donc des $\ell^\infty_{(2^n)}$ dans des quotients de E et F, liés par l'opérateur déduit de T par passage à ces quotients. Ces $\ell^\infty_{(2^n)}$ contiennent des $\ell^1_{(n)}$, que l'on relève à E et F en des $\ell^1_{(n)}$ liés par T.

Corollaire : Si un opérateur est de type Rademacher, il est aussi de cotype Rademacher.

En effet, si T n'est pas de cotype Rademacher, on peut trouver dans E et F des $\ell^\infty_{(2^n)}$ liés par T, et donc des $\ell^1_{(n)}$ liés par T, et celui-ci n'est pas de type Rademacher.

Il est clair au vu des propositions précédentes que l'ensemble des opérateurs de type Rademacher constitue un idéal d'opérateurs ; on vérifie facilement que cet idéal est fermé pour la norme d'opérateurs. Il contient les opérateurs p-sommants (à cause de la factorisation de Pietsch), mais est distinct de l'idéal des opérateurs faiblement compacts : on sait, d'après un exemple de R.C. James, qu'il existe un espace B-convexe non réflexif (et son identité est donc de type Rademacher sans être faiblement compacte). Un autre exemple est l'injection de l'espace ℓ^1 dans l'espace S des séries convergentes, qui est de type 2-Rademacher, mais n'est pas faiblement compacte. Inversement, il est facile de trouver des espaces réflexifs qui contiennent $\ell^1_{(n)}$ uniformément ; leur identité sera faiblement compacte sans être de type Rademacher.

Nous allons maintenant montrer, pour les opérateurs de type Rademacher, un résultat sur la "loi forte des grands nombres" qui est l'analogue de celui démontré par A. Beck [4] pour les espaces B-convexes.

Théorème 3 : T est de type Rademacher si et seulement si, pour toute suite $X_1, X_2, \ldots,$ de variables aléatoires indépendantes centrées définies sur un espace

(Ω,P), à valeurs dans E et vérifiant, pour un $p>1$:

$$\sup_k \mathbb{E}\,\|X_k\|^p < \infty \quad ,$$

on a
$$\frac{1}{n}\sum_1^n TX_k \to 0 \quad \text{p.s.} \quad .$$

<u>Démonstration</u> :

<u>Lemme 10</u> : Si T est de type Rademacher, pour toute suite (x_n) de points de la boule unité de E, pour presque tout choix de signes (ε_n), on a :

$$\Big\|\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_i\, Tx_i\Big\| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad .$$

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit $k\in\mathbb{N}$. On a :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big|\sum_1^n \varepsilon_i\; x_i\Big| = \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{Nk}\Big|\sum_1^{Nk} \varepsilon_i\; x_i\Big|$$

$$= \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\Big|\sum_{j=1}^{N} y_j\Big| \quad , \quad \text{si l'on pose } y_j = \frac{1}{k}\sum_{jk+1}^{(j+1)k} \varepsilon_i\; x_i \quad ,$$

$$\le \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_1^N |y_j| \quad .$$

On applique la loi forte des grands nombres aux variables scalaires $\|Ty_j\| - \mathbb{E}\,\|Ty_j\|$, qui sont indépendantes centrées bornées. On a donc :

$$\frac{1}{N}\Big(\sum_1^N \|Ty_j\| - \mathbb{E}\,(\|Ty_j\|)\Big) \to 0 \quad \text{p.s.}$$

et donc

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_1^N |y_j| = \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}\,\frac{1}{N}\sum_1^N |y_j| \quad .$$

Or
$$\mathbb{E}\,|y_j| = \int \Big|\frac{1}{k}\sum_{jk+1}^{(j+1)k} \varepsilon_i(t)\; x_i\Big|\,dt \le a_k$$

et donc
$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_1^N |y_j| \le a_k \quad ,$$

d'où l'on déduit, puisque T est de type Rademacher,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big|\sum_1^n \varepsilon_i\; x_i\Big| = 0 \quad ,$$

ce qui prouve le lemme.

On déduit du lemme que, pour toute suite de variables aléatoires symétriques bornées (X_n), on a

$$(15) \qquad \frac{1}{n}\sum_1^n TX_k \to 0 \quad \text{p.s.}$$

On va maintenant montrer qu'on a (15) pour toute suite de variables aléatoires centrées indépendantes, vérifiant, pour un $p > 1$,

$$\sup_k \mathbb{E}\,\|X_k\|^p < \infty \quad .$$

Pour tout $C > 0$, on pose :

$$X_k = Y_k + Z_k \quad ,$$

avec $Y_k = X_k$ si $\|X_k\| \leq C$, 0 sinon.

Les Y_k sont des variables indépendantes bornées. On les symétrise en posant $\tilde{Y}_k(\omega,\omega') = Y_k(\omega) - Y_k(\omega')$, et on obtient ainsi des variables indépendantes symétriques bornées. D'après (15), on en déduit :

$$\frac{1}{n}\sum_1^n T\tilde{Y}_k(\omega,\omega') \to 0 \quad \text{p.p.} \ (\omega,\omega')$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{1}{n}\sum_1^n Y_k(\omega) - \frac{1}{n}\sum_1^n Y_k(\omega')\right| \to 0 \quad \text{p.p.} \ (\omega,\omega') \quad .$$

Puisque les $Y_k(\omega')$ sont bornées, on obtient

$$\int \left|\frac{1}{n}\sum_1^n Y_k(\omega) - \frac{1}{n}\sum_1^n Y_k(\omega')\right| dP(\omega') \to 0 \quad \text{p.p.} \ \omega$$

et donc

$$\left|\frac{1}{n}\sum_1^n Y_k(\omega) - \frac{1}{n}\sum_1^n \mathbb{E}\,Y_k\right| \to 0 \quad .$$

Mais on a $\mathbb{E}\,X_k = 0 = \mathbb{E}\,Y_k + \mathbb{E}\,Z_k$, et donc :

$$(16) \qquad \left|\frac{1}{n}\sum_1^n Y_k(\omega) + \frac{1}{n}\sum_1^n \mathbb{E}\,Z_k\right| \to 0 \quad .$$

Par ailleurs, on a :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\sum_1^n Z_k\right| \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n |Z_k|$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n \|Z_k\|$$

et, d'après la loi scalaire des grands nombres :

$$\frac{1}{n} \sum_1^n (\|Z_k\| - \mathbf{E}\,\|Z_k\|) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad ,$$

car $(\|Z_k\| - \mathbf{E}\,\|Z_k\|)$ est une suite de variables aléatoires centrées ayant un moment d'ordre p. On a donc :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n \|Z_k\| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n \mathbf{E}\,\|Z_k\|$$

$$\le \sup_k \int_{\{\|X_k\|>C\}} \|X_k(\omega)\|dP(\omega) \quad .$$

Soit $M = \sup_k \mathbf{E}\,\|X_k\|^p$; on a, $\forall\, k = 1,2,\ldots$

$$\int_{\{\|X_k\|>C\}} \|X_k(\omega)\|dP(\omega) \le M/C^{p-1} \quad .$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Choisissons C assez grand pour que $M/C^{p-1} \le \varepsilon$; on aura

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\sum_1^n Z_k\right| \le \varepsilon \quad .$$

D'après (16), on peut trouver n_o tel que si $n \ge n_o$,

$$\left|\frac{1}{n} \sum_1^n Y_k + \frac{1}{n} \sum_1^n \mathbf{E}\,Z_k\right| < \varepsilon$$

et donc

$$\frac{1}{n} \left|\sum_1^n Y_k\right| \le 2\varepsilon$$

et finalement $\left|\frac{1}{n} \sum_1^n X_k\right| \le 3\varepsilon$, ce qui prouve notre proposition.

Réciproquement, si T n'est pas de type Rademacher, E et F contiennent des $\ell^1_{(n)}$ liés par T, et on utilise une construction de A Beck, rappelée dans [9, prop. 7], pour construire une suite de points (x_n), bornée dans E, telle que $\frac{1}{n}\int |\sum_1^n \varepsilon_i(t)x_i|dt$ ne tende pas vers 0 lorsque $n\to\infty$: la suite $(\varepsilon_n(t)x_n)$ ne satisfait alors pas la conclusion du théorème.

Une question naturelle est celle de savoir si les opérateurs que nous avons introduits possèdent la "propriété de factorisation" : par exemple, si T est de type Rademacher, se factorise-t-il par un espace de type Rademacher ? L'exemple suivant montre que la réponse est négative.

Soit φ une fonction d'Orlicz avec $\frac{\varphi(t)}{t}\nearrow\infty$ (par exemple $t(1+\mathrm{Log}(1+t))$). On vérifie aisément, par exemple en adaptant l'argument que nous avons donné dans [1], que $L^\varphi([0,1],dt)$ et $L^1([0,1],dt)$ n'ont pas de $\ell^1_{(n)}$ homothétiques : l'injection de L^φ dans L^1 est donc de type Rademacher. Cependant, tous les espaces intermédiaires entre L^φ et L^1 contiennent $\ell^1_{(n)}$ uniformément : un opérateur de type Rademacher ne se factorise donc pas nécessairement par un espace B-convexe.

Nous allons voir que, par contre, la classe des opérateurs qui "ne contiennent pas ℓ^1" possède la propriété de factorisation : un tel opérateur se factorise par un espace qui ne contient pas ℓ^1. Comme pour la réflexivité (voir [1]), le résultat sera obtenu dans le cadre des espaces d'Interpolation.

§ 3. OPERATEURS DE TYPE RADEMACHER ET ESPACES D'INTERPOLATION

Soient A_o et A_1 deux espaces de Banach ; nous désignons par $A=(A_o,A_1)_{\theta,p}$ l'espace d'Interpolation de Lions-Peetre de paramètres θ et p. Nous renvoyons par exemple à [1] pour un bref résumé des définitions et premières propriétés de ces espaces.

Pour le théorème qui suit, nous supposons qu'entre A_o et A_1 existe une injection continue i ; nous dirons alors que A_o et A_1 contiennent des ℓ^1 homothétiques si l'on peut trouver dans A_o une suite bornée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, équivalente à la base canonique de ℓ^1, dont l'image par i est aussi équivalente à la base canonique de ℓ^1.

Remarquons que l'on déduit alors d'un lemme de R.C. James, déjà utilisé au paragraphe précédent, que l'on peut trouver un nombre θ_1, tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A_o, avec, pour toute suite de scalaires $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$(1-\varepsilon)\ \Sigma\ |\alpha_n| \leq \|\Sigma\ \alpha_n\ x_n\|_{A_o} \leq \Sigma\ |\alpha_n|$$

$$(1-\varepsilon)\ \theta_1\ \Sigma\ |\alpha_n| \leq \|\Sigma\ \alpha_n\ i(x_n)\|_{A_1} \leq \theta_1\ \Sigma\ |\alpha_n| \quad .$$

<u>Théorème 4</u> : Soient A_o, A_1 deux espaces entre lesquels existe une injection continue i. Les espaces $(A_o,A_1)_{\theta,P}$ $(0 < \theta < 1,\ 1 < p < \infty)$ contiennent un sous-espace isomorphe à ℓ^1 si et seulement si A_o et A_1 contiennent des ℓ^1 homothétiques.

<u>Démonstration</u> : Il est clair que si A_o et A_1 contiennent des ℓ^1 homothétiques, A contient ℓ^1. Pour démontrer la réciproque, on utilise les résultats suivants :

- A contient ℓ^1 si et seulement si la boule de A n'est pas séquentiellement relativement compacte dans A" pour la topologie $\sigma(A'',A')$: c'est une conséquence d'un résultat de H.P. Rosenthal [10].

- La boule de A est séquentiellement relativement compacte dans A" pour $\sigma(A'',A')$ si et seulement si $i(A_o)$ est séquentiellement relativement compact dans A_1'' pour $\sigma(A_1'',A_1')$. Ce résultat a été démontré par Davis-Figiel-Johnson-Pełczynski pour l'espace Y qu'ils construisent dans [5] ; le lemme que nous avons démontré dans [1] et déjà utilisé pour la réflexivité permet d'obtenir le même résultat pour les espaces d'Interpolation considérés.

On peut donc, si A contient ℓ^1, trouver une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans la boule de A_o, dont aucune sous-suite ne converge dans A_1'' pour $\sigma(A_1'',A_1')$. Encore d'après H.P. Rosenthal, la suite (x_k) admet une sous-suite équivalente dans A_1 à la base canonique de ℓ^1 ; puisqu'elle est bornée dans A_o, elle y est aussi équivalente à la base canonique de ℓ^1.

Nous allons maintenant nous intéresser au problème suivant : soient (A_o,A_1), (B_o,B_1) deux couples d'espaces de Banach, T un opérateur linéaire continu de A_o dans B_o et de A_1 dans B_1. Quand T est-il de type Rademacher de $(A_o,A_1)_{\theta,P}$ dans $(B_o,B_1)_{\theta,P}$? Comme dans le cas des opérateurs uniformément convexifiants ([1], chap. III, prop. 2), nous obtenons seulement une condition suffisante, qui est que T soit de type Rademacher ou bien de A_o dans B_o, ou bien de A_1 dans B_1. Nous allons établir un résultat préliminaire :

Proposition 4 : T est de type Rademacher de E dans F si et seulement si il l'est de $L^p(E)$ dans $L^p(F)$, pour $1 < p < \infty$.

Démonstration : Considérons les nombres

$$\alpha_n^{(p)}(T) = \sup_{\frac{1}{n}\sum_1^n \|x_i\|^p \le 1} \frac{1}{n}\left(\int \|\Sigma\ \varepsilon_i(t) T x_i\|^p dt \right)^{1/p} .$$

Il est clair que $a_n^{(p)}(T) \le \alpha_n^{(p)}(T)$. Admettons provisoirement que nous ayons montré l'équivalence :

$$(17) \qquad a_n^{(p)}(T) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Longleftrightarrow \alpha_n^{(p)}(T) \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Soient $x_1(\omega),\dots,x_n(\omega)$ des éléments de $L^p(E)$. Pour tout ω, on peut écrire

$$\frac{1}{n}\left(\int \|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\ T x_i(\omega)\|^p dt \right)^{1/p} \le \alpha_n^{(p)} \left(\frac{1}{n} \sum_1^n \|x_i(\omega)\|^p \right)^{1/p}$$

et donc

$$\frac{1}{n}\left(\int \|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\ T x_i(\omega)\|^p_{L^p(F)}\ dt \right)^{1/p} \le \alpha_n^{(p)} \left(\frac{1}{n} \sum_1^n \|x_i(\omega)\|^p_{L^p(E)} \right)^{1/p} .$$

Par conséquent, si l'on note $\overline{T}$ l'extension de T à $L^p(E)$, on a $\alpha_n^{(p)}(\overline{T}) = \alpha_n^{(p)}(T)$, et $\overline{T}$ est de type Rademacher si et seulement si T l'est.

Comme il est évident qu'inversement, si $\overline{T}$ est de type Rademacher de $L^p(E)$ dans $L^p(F)$, T est de type Rademacher de E dans F, il nous reste à montrer l'équivalence annoncée en (17).

Lemme 11 : Si $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $\alpha_n^{(p)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Démonstration : Il nous suffira de montrer que, en posant à nouveau $|x| = \|Tx\|$:

$$\alpha'_n = \sup_{\frac{1}{n}\sum_1^n \|x_i\|^p \le 1} \frac{1}{n} \int \left|\sum_1^n \varepsilon_i(t)\ x_i\right| dt \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $x_1,\dots,x_n$, tous non nuls, avec $\frac{1}{n}\sum_1^n \|x_i\|^p = 1$. Soit $\alpha = \frac{2}{p-1}$.
Considérons les ensembles :

$$N_k = \{j \in \mathbb{N} , \quad k^\alpha < \|x_j\| \leq (k+1)^\alpha\}$$

pour $k = 0,1,2,\ldots$

Les ensembles N_k sont vides si $k \geq n^{1/\alpha p}$. En effet, puisque $\sum\limits_1^n \|x_i\|^p = n$, on a $\|x_i\| \leq n^{1/p}$.

On a :

$$I = \frac{1}{n} \int \Big|\sum_1^n \varepsilon_i(t) \ x_i\Big| dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n^{1/\alpha p}} \int \Big| \sum_{j\in N_k} \varepsilon_j(t) \ x_j\Big| dt \quad .$$

Pour $j \in N_k$, on peut écrire :

$$\frac{1}{|N_k|} \int \Big| \sum_{j\in N_k} \varepsilon_j(t) \ x_j \Big| dt \leq a_{|N_k|} \ (k+1)^\alpha$$

et donc :

$$I \leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n^{1/\alpha p}} |N_k| \ (k+1)^\alpha \ a_{|N_k|} \quad .$$

On va maintenant estimer $|N_k|$. On a :

$$1 = \frac{1}{n} \sum_1^n \|x_i\|^p \geq \frac{1}{n} \sum_{N_k} \|x_i\|^p \geq \frac{1}{n} k^{\alpha p} \ |N_k| \quad ,$$

et donc, si $k > 0$, $|N_k| \leq \left[\frac{n}{k^{\alpha p}}\right]$, en désignant par $\left[\frac{n}{k^{\alpha p}}\right]$ la partie entière de $\frac{n}{k^{\alpha p}}$. Par ailleurs, on a évidemment $|N_o| \leq n$.

Il est facile de voir que la suite $(n \ a_n)$ est une suite croissante. On a donc :

$$\begin{cases} N_k \ a_{|N_k|} \leq \dfrac{n}{k^{\alpha p}} \ a_{[n/k^{\alpha p}]} & \text{si } k > 0 \\ \\ N_o \ a_{|N_o|} \leq n \ a_n \end{cases}$$

et par conséquent

$$I \leq \sum_{k=1}^{n^{1/\alpha p}} \frac{(k+1)^\alpha}{k^{\alpha p}} \ a_{[n/k^{\alpha p}]} + a_n \quad .$$

On a $\dfrac{(k+1)^\alpha}{k^{\alpha p}} \sim \dfrac{1}{k^{p\alpha-\alpha}} = \dfrac{1}{k^{P/p-1}}$, et $\dfrac{P}{p-1} > 1$. Il nous suffira donc de montrer que

$$I_n = \sum_{1}^{n^{1/\alpha p}} \frac{1}{k^\beta} a_{[n/k^{\alpha p}]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ , \text{ avec } \beta = \frac{p}{p-1} \ .$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$; choisissons k_o pour que

$$\sum_{k\geq k_o} \frac{1}{k^\beta} \leq \varepsilon$$

et n_o pour que $n \geq n_o \Rightarrow a_{[n/k_o^{\alpha p}]} \leq \frac{\varepsilon}{\gamma}$, avec $\gamma = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\beta}$. On aura aussi

$a_{[n/k^{\alpha p}]} \leq \frac{\varepsilon}{\gamma}$ si $k \leq k_o$. Or

$$\sum_{k=1}^{k_o} \frac{1}{k^\beta} a_{[n/k^{\alpha p}]} \leq \frac{\varepsilon}{\gamma} \sum_{k=1}^{k_o} \frac{1}{k^\beta} \leq \varepsilon \ .$$

$$\sum_{k\geq k_o} \frac{1}{k^\beta} a_{[n/k^{\alpha p}]} \leq \sum_{k\geq k_o} \frac{1}{k^\beta} \leq \varepsilon \ ,$$

et donc $I_n \to 0$, ce qui achève la preuve de notre proposition.

<u>Théorème 5</u> : Soient (A_o,A_1), (B_o,B_1) deux couples d'espaces de Banach et T un opérateur de A_o dans B_o et de A_1 dans B_1. Si T est de type Rademacher de A_o dans B_o, il est de type Rademacher de $A = (A_o,A_1)_{\theta,p}$ dans $B = (B_o,B_1)_{\theta,p}$, si $0 < \theta < 1$, et $1 < p < \infty$.

<u>Démonstration</u> : Rappelons que par définition

$$\|x\|_A = \inf \max \left(\|e^{\xi_o t} u(t)\|_{L^p(A_o)} , \|e^{\xi_1 t} u(t)\|_{L^p(A_1)} \right)$$

où l'infinimum porte sur toutes les fonctions u(t) telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt = x$, et où ξ_o et ξ_1 sont deux nombres réels avec $\frac{\xi_o}{\xi_o - \xi_1} = \theta$.
Soit $\varepsilon > 0$, et soient $x_1,\dots,x_n$ des vecteurs de A avec $\|x_i\| \leq 1$. On peut trouver des représentations $x_i(t)$ telles que

$$\left.\begin{aligned} \|e^{\xi_o t} x_i(t)\|_{L^p(A_o)} &\leq 1+\varepsilon \\ \|e^{\xi_1 t} x_i(t)\|_{L^p(A_1)} &\leq 1+\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } i = 1,\dots,n \ .$$

On peut écrire, d'après une formule de Lions-Peetre (voir [1] chap. III)

$$\|\sum_1^n \varepsilon_i(\tau)Tx_i\|_B \leq \|e^{\xi_o t} \sum_1^n \varepsilon_i(\tau)(Tx_i)(t)\|^{1-\theta}_{L^p(B_o)} \cdot \|e^{\xi_1 t} \sum_1^n \varepsilon_i(\tau)(Tx_i)(t)\|^{\theta}_{L^p(B_1)}$$

et donc

$$\frac{1}{n}\int \|\sum_1^n \varepsilon_i(\tau)Tx_i\|_B \, d\tau \leq$$

$$\left(\frac{1}{n}\int \|e^{\xi_o t} \sum_1^n \varepsilon_i(\tau)Tx_i(t)\|_{L^p(B_o)} \, d\tau\right)^{1-\theta} \cdot \left(\frac{1}{n}\int \|e^{\xi_1 t} \sum_1^n \varepsilon_i(\tau)Tx_i(t)\|_{L^p(B_1)} \, d\tau\right)^{\theta}.$$

D'après la proposition 4, T est de type Rademacher de $L^p(A_o)$ dans $L^p(B_o)$; on peut donc trouver un nombre N tel que pour $n \geq N$, on ait

$$\frac{1}{n}\int \|e^{\xi_o t} \sum_1^n \varepsilon_i(\tau) \; Tx_i(t)\|_{L^p(B_o)} \, d\tau \leq \varepsilon$$

et donc

$$\frac{1}{n}\int \|\sum_1^n \varepsilon_i(\tau) \; Tx_i\|_B \, d\tau \leq \varepsilon^{1-\theta} \cdot (1+\varepsilon)^{\theta} ,$$ ce qui

montre que $\sup_{\|x_i\|_A \leq 1} \frac{1}{n}\int \|\sum_1^n \varepsilon_i(\tau) \; Tx_i\|_B \, d\tau \underset{n\to\infty}{\to} 0$, et achève la preuve de notre proposition.

<u>Corollaire 1</u> : Les espaces $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ $(0<\theta<1,\ 1<p<\infty)$ sont B-convexes si A_o ou A_1 est B-convexe (cela résultait déjà de [3] pour certains d'entre eux).

<u>Corollaire 2</u> : Si i est une injection continue de type Rademacher de A_o dans A_1, elle est aussi de type Rademacher de $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ dans $(A_o,A_1)_{\sigma,q}$, si $\theta < \sigma$, ou si $\theta = \sigma$, $p > q$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Beauzamy, Opérateurs uniformément convexifiants entre espaces de Banach, (à paraître dans Studia Math. t. 57 No 2).

[2] B. Beauzamy, Une propriété des opérateurs uniformément convexifiants, Preprint, Ecole Polytechnique Paris (1975).

[3] B. Beauzamy, Propriétés géométriques des espaces d'interpolation, Séminaire Maurey-Schwartz 1973-74, Ecole Polytechnique, Paris.

[4] A. Beck, A convexity condition in Banach spaces and the strong law of large numbers, Proc. Amer. Math. Soc., 13 (1962) p. 329-335.

[5] W.J. Davis, W.B. Johnson, T. Figiel, A. Pełczynski, Factoring weakly compact operators, J. Funct. Anal. vol. 17 No 3 (Nov. 1974).

[6] R.C. James, Uniformly non-square Banach spaces, Ann. of Math. Vol. 80 No 3 (Nov. 1964) p. 542-550.

[7] M.I. Kadec, A. Pełczynski, Bases, lacunary sequences, and complemented subspaces in the spaces L^p, Studia Math. 21 (1962) p. 161-176.

[8] B. Maurey, Théorèmes de factorisation ..., Astérisque No 11.

[9] G. Pisier, Type des espaces normés ; Sur les espaces qui ne contiennent pas $\ell^1_{(n)}$ uniformément, exposés III et VII du Séminaire Maurey-Schwartz 1973-74, Ecole Polytechnique, Paris.

[10] H.P. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing ℓ^1, Proc. of the N.A.S., vol. 71 No 6 (June 1974) p. 2411-2413.

[11] J. Stern, Propriétés locales et ultrapuissances d'espaces de Banach, exposés VII et VIII du Séminaire Maurey-Schwartz 1974-75, Ecole Polytechnique, Paris.
