G. PISIER

(Annexe n° 1) Corrections et additions à l'exposé III

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A21_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

CORRECTIONS ET ADDITIONS A L'EXPOSE III

G. PISIER

 Avril 1976

CORRECTIONS

p. III.20 Supprimer la deuxième phrase de la Remarque 4.1, qui est inexacte.

p. III.21, l. 3 Remplacer "connu" par "vrai".

Enfin, il y a une traduction moins contestable de "central limit theorem" : "théorème-limite central" !

ADDITIONS

On peut donner une démonstration plus simple du fait que toute v.a. gaussienne vérifie la LLI :

Démonstration du Corollaire 4.1 : Puisque la distribution de X est une mesure de Radon, il existe K compact convexe équilibré tel que

$$\mathbb{P}(X \in K) > 1/2 \quad .$$

Par conséquent, si l'on note j_k la jauge de K :

$$P(j_k(X) \leq 1) > 1/2 \quad .$$

La démonstration du théorème de Fernique [2] assure alors qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\mathbb{E}\, e^{\alpha j_k(X)^2} < \infty \quad .$$

Puisque X est gaussienne, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{E}\, e^{\alpha j_k(S_n/\sqrt{n})^2} = \mathbb{E}\, e^{\alpha j_k(X)^2} \quad .$$

Le lecteur peut alors reprendre la preuve (élémentaire) de la proposition 4.2 et conclure aisément que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\; j_k(S_n/\, a_n) \overset{p.s.}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \quad .$$

Par conséquent $\{S_n/a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est p.s. inclus dans un homothétique de K, donc est relativement compact p.s. cqfd

Le fait de travailler avec les jauges j_k permet de simplifier aussi la démonstration du théorème 4.3 ; il suffit pour cela de remarquer que si une v.a. X à valeurs dans un Banach E (séparable) vérifie $\mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$, alors il existe un compact équilibré convexe $K \subset E$ tel que $\mathbb{E}\, j_k(X)^2 < \infty$; les autres modifications sont faciles. On évite ainsi l'utilisation du théorème 3.1.

Le théorème 4.3 a été tout récemment amélioré par J. Kuelbs qui a démontré le

Théorème [27] : Pour qu'une v.a. X à valeurs dans un espace de Banach vérifie la LLI, il suffit que $\mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$ et que $S_n/a_n \to 0$ en probabilité.

Ce résultat permet de donner une caractérisation des espaces de Banach (ou des opérateurs) pour lesquels les conditions classiques sont suffisantes pour la LLI :

Corollaire : Soit $u : E \to F$ un opérateur entre espaces de Banach, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Pour toute v.a. X(.) à valeurs dans E telle que $\mathbb{E}\,X = 0$ et $\mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$, la v.a. u(X(.)) à valeurs dans F vérifie la LLI.

ii) Il existe une constante C telle que, pour toute suite finie $(x_i)_{1 \le i \le n}$ d'éléments de E et pour tout entier $n \ge 3$ on a :

(1) $$\mathbb{E}\,\Big\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, u(x_i)\Big\| \le C\sqrt{\mathrm{Log\,Log}\; n}\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right)^{1/2} .$$

Démonstration : L'implication i) ⇒ ii) est démontrée dans l'exposé III, corollaire 5.2, page 26.

ii) ⇒ i). On se ramène facilement au cas où X est une v.a. symétrique à valeurs dans E ; on note que $\mathbb{E}\,\|u(X)\|^2 \le \|u\|^2\, \mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$; d'après le théorème ci-dessus, il suffit de montrer que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\; \mathbb{E}\,\|u(S_n/a_n)\| = 0 .$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité de référence ; d'après (1), on a pour ω fixé dans Ω :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, u(X_i(\omega)) \right\| \le C \sqrt{\text{Log Log } n} \left(\sum_{i=1}^{n} \|X_i(\omega)\|^2 \right)^{1/2}$$

(en supposant bien entendu que $(\varepsilon_n)_n$ est une suite de v.a. de Bernoulli indépendante de (X_n)). En intégrant en ω et en utilisant la symétrie des v.a. X_1, $X_2, \ldots,$ on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{E}\, \|u(S_n)\| \le C \, a_n (\mathbb{E}\, \|X\|^2)^{1/2} \quad .$$

En d'autres termes, si l'on pose

$$\Lambda(u(X)) = \sup_n \mathbb{E}\, \|u(S_n / a_n)\| \quad ,$$

on a démontré :

$$\text{(2)} \qquad \Lambda(u(X)) \le C(\mathbb{E}\, \|X\|^2)^{1/2} \quad .$$

Soit $\varepsilon > 0$, soit Y une v.a. étagée symétrique à valeurs dans E telle que $\mathbb{E}\, \|X - Y\|^2 \le \varepsilon^2$, on a d'après (2) :

$$\Lambda(u(X - Y)) \le C\, \varepsilon \quad ;$$

on peut remarquer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, \|u(Y_1 + \ldots + Y_n) / a_n\| = 0$ puisque $u(Y)$ est étagée.

On a donc $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{E}\, \|u(S_n / a_n)\| \le 0 + \Lambda(X - Y) \le C\, \varepsilon$.

On conclut bien que $\overline{\lim}\, \mathbb{E}\, \|u(S_n / a_n)\| = 0$ puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

<u>Remarque 1</u> : Le corollaire précédent est l'analogue pour la LLI du théorème 4.1 et de sa réciproque, le corollaire 5.1.

Il en résulte qu'<u>il existe des espaces de Banach dans lesquels les conditions classiques</u> (i.e. $\mathbb{E}\, X = 0$ et $\mathbb{E}\, \|X\|^2 < \infty$) <u>suffisent pour la LLI mais ne suffisent pas pour le TLC</u>.

En effet, il existe des espaces de Banach dont l'opérateur identité vérifie la propriété ii) du corollaire ci-dessus mais qui ne sont pas de type 2.

Pour en convaincre le lecteur probabiliste, nous détaillons la construction d'un tel exemple.

Pour alléger, nous introduisons la :

<u>Notation</u> : Soit E un espace de Banach et n un entier ; nous noterons $\nu_n(E)$ la plus petite constante C telle que, pour tout n-uple $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E on a :

$$\mathbb{E}\,\|\Sigma_1^n\ \varepsilon_i\ x_i\|^2 \le C^2\ \Sigma_1^n\ \|x_i\|^2 \quad .$$

La suite $(\nu_n(E))_{n\ge 1}$ est croissante. De plus, on peut voir aisément que $1 \le \nu_n(E) \le \sqrt{n}\quad \forall\ n \ge 1$.

***

Soit $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une famille d'espaces de Banach. Nous notons $\ell^2(\{E_m\})$ l'espace des suites $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ où $x_m \in E_m\ \forall\ m\in\mathbb{N}$, muni de la norme $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \longrightarrow (\Sigma\ \|x_m\|^2)^{1/2}$. Il est évident que :

(3) $\forall\ n\in\mathbb{N}$
$$\nu_n(\ell^2(\{E_m\})) \le \sup_{m\in\mathbb{N}} \nu_n(E_m) \quad .$$

***

Soit $p\in[1,\infty[$ et $m\in\mathbb{N}$; nous notons ℓ_m^p l'espace de Banach obtenu en munissant $\mathbb{R}^m$ de la norme $(\alpha^1,\dots,\alpha^m)\in\mathbb{R}^m \longrightarrow (\Sigma_1^m\ |\alpha^i|^p)^{1/p}$.

<u>Lemme</u> : Soient m, n entiers et p tel que $1 \le p \le 2$, on a :

$$\nu_n(\ell_m^p) = (\min\{m,n\})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Tout d'abord, rappelons une inégalité due à Clarkson : si $\frac{1}{q}+\frac{1}{p} = 1$, $1 \le p \le 2$, on a :

(4) $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}^n$
$$(\mathbb{E}\,|\Sigma_1^n\ \varepsilon_i\ \alpha_i|^q)^{1/q} \le (\Sigma_1^n\ |\alpha_i|^p)^{1/p} \quad .$$

Cette inégalité s'établit facilement par interpolation entre les cas $p = 1$ et $p = 2$.

Soit x un élément de ℓ_m^p, nous notons simplement x^j pour la j-ième coordonnée de x $(1 \le j \le m)$; par ailleurs nous notons $\|x\|$ la norme dans ℓ_m^p.

Soit $(x_1,\dots,x_n)$ dans ℓ_m^p, on déduit de (4) :

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\mathbb{E}\,|\sum_{i=1}^{n}\ \varepsilon_i\ x_i^j|^q\right)^{p/q} \le \sum_{i,j}\ |x_i^j|^p \quad ,$$

d'où puisque $q \geq p$:

$$\left\{ \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, x_i^j \right|^p \right)^{q/p} \right\}^{1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

soit :

(5) $$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, x_i \right\|^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{1/p} .$$

Puisque $q \geq 2$, $\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, x_i \right\|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, x_i \right\|^q \right)^{1/q}$, et par l'inégalité de Holder $\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{1/p} \leq n^{1/p - 1/2} \left(\sum_{1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{1/2}$, on déduit donc de (5) que $\nu_n(\ell_m^p) \leq n^{1/p - 1/2}$.

D'autre part, on sait que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^m \qquad \left(\sum_{j=1}^{m} |x^j|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p \right)^{1/p} \leq m^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \left(\sum_{1}^{m} |x^j|^2 \right)^{1/2} ;$$

il en résulte que :

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, x_i \right\|^2 \right)^{1/2} \leq m^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{1/2} .$$

Par conséquent $\nu_n(\ell_m^p) \leq m^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}$, on a donc établi que

$$\nu_n(\ell_m^p) \leq (m \wedge n)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} .$$

L'inégalité inverse est triviale : notant $e_1, \dots, e_m$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$, posant $k = m \wedge n$, on a :

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \, e_i \right\|^2 \right)^{1/2} = k^{1/p}$$

et

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|e_i\|^2 \right)^{1/2} = k^{1/2}$$

donc nécessairement $\nu_n(\ell_m^p) \geq \nu_k(\ell_m^p) \geq k^{1/p - 1/2}$. <u>cqfd</u>

Remarque 2 : Le lemme précédent montre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, C$ tel que $1 \leq C \leq \sqrt{n}$, il existe un espace de Banach E tel que $\nu_n(E) = C$.

Exemple : Il existe un espace de Banach E et un entier M tel que

$$\forall\, n \geq M \qquad \nu_n(E) = \sqrt{\mathrm{Log\ Log\ } n} \ .$$

Démonstration : Pour tout entier $m \geq e^e$, soit p_m tel que $m^{1/p_m - 1/2} = \sqrt{\mathrm{Log\ Log\ } m}$; nécessairement $1 \leq p_m \leq 2$. Par ailleurs on vérifie aisément qu'il existe un entier M tel que :

$$\forall\, m \geq M \qquad p_{m+1} \geq p_m \ .$$

On pose $E = \ell^2(\{\ell_m^{p_m}, m \geq M\})$.
D'après le lemme et d'après (3), on a :

$$\nu_n(E) \leq \sup_{m \geq M} (m \wedge n)^{\frac{1}{p_m} - \frac{1}{2}} \ ;$$

or si $M \leq m \leq n$, on a :

$$(m \wedge n)^{\frac{1}{p_m} - \frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{p_m} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{Log\ Log\ } m} \leq \sqrt{\mathrm{Log\ Log\ } n} \ ;$$

et si $n \leq m$, on a (puisque p_m croît avec m) :

$$(m \wedge n)^{\frac{1}{p_m} - \frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{p_m} - \frac{1}{2}} \leq n^{\frac{1}{p_n} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{Log\ Log\ } n} \ .$$

En conclusion, $\nu_n(E) \leq \sqrt{\mathrm{Log\ Log\ } n}$.
Par ailleurs, puisque $\ell_m^{p_m}$ est, pour $m \geq M$, un sous-espace de E, on a nécessairement, si $n \geq M$, $\nu_n(E) \geq \nu_n(\ell_n^{p_n})$, donc d'après le lemme

$$\nu_n(E) \geq n^{\frac{1}{p_n} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{Log\ Log\ } n} \ . \qquad \underline{\text{cqfd}}$$

[27] J. Kuelbs, Kolmogorov's law of the iterated logarithm for Banach space valued random variables, (à paraître).
