L. SCHWARTZ

Certaines propriétés des mesures sur les espaces de Banach

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 23, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A18_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

CERTAINES PROPRIETES DES MESURES SUR LES ESPACES DE BANACH

par L. SCHWARTZ

Exposé No XXIII 18 Mai 1976

Je remercie M. TORTRAT qui m'a communiqué les principaux théorèmes énoncés ici.

§ 1. SUR CERTAINS SOUS-ESPACES CONVEXES COMPACTS DE $\mathbb{R}^{\Omega}$

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème (1.4). Ω sera un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{O}$, et μ une mesure ≥ 0 σ-finie sur $(\Omega,\mathcal{O})$.

Lemme (1.1) : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions μ-mesurables sur Ω, $|f_n| \leq 1$. Il existe une sous-suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction μ-mesurable f, telles que, pour toute sous-suite $(f''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une suite de barycentres $g''_p = \sum_{0\leq h\leq N_p} t_{p,h}\, f''_{p+h}$, $t_{p,h} \geq 0$, $\sum_{0\leq h\leq N_p} t_{p,h} = 1$, convergeant μ-presque partout vers f.

Démonstration : Quitte à remplacer μ par une mesure équivalente, on peut la supposer finie. La boule de L^{∞} est compacte dans $\sigma(L^{\infty},L^{1})$, donc a fortiori dans $\sigma(L^{1},L^{\infty})$. Donc on peut extraire de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant vers une limite f dans $\sigma(L^{1},L^{\infty})$. Soit alors $(f''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de celle-ci. L'enveloppe convexe fermée de $(f''_n)_{n\geq n}$ est faiblement fermée donc contient f. Donc il existe un barycentre $\sum_{0\leq k\leq N'''_n} t'''_{n,k}\, f''_{n+k} = g'''_n$, tel que $\|g'''_n - f\| \leq \frac{1}{n}$. Alors $(g'''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^{1} vers f. On peut donc en extraire une sous-suite $(g'''_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ convergeant μ-presque partout vers f. On a $g'''_{n_p} = \sum_{0\leq k\leq N'''_{n_p}} t'''_{n_p,k}\, f''_{n_p+k}$. Posons $g''_p = g'''_{n_p}$.

Considérons, entre h et k, la relation $n_p + k = p + h$. Lorsque $k = h - (n'_p - p)$ varie de 0 à N'''_{n_p}, $h = (n_p - p) + k$ varie de $n_p - p \geq 0$ à $N_p = (n_p - p) + N'''_{n_p}$. Alors

$$g''_p = \sum_{n_p - p\leq h\leq N_p} t'''_{n_p,h-(n_p-p)}\, f''_{p+h}$$

$$= \sum_{0\leq h\leq N_p} t_{p,h}\, f''_{p+h} ,$$

si on pose $t_{p,h} = 0$ pour $0 \leq h \leq n_p-p$, $t_{p,h} = t'''_{n_p,h-(n_p-p)}$ pour $n_p-p \leq h \leq N_p$.

La suite $(g''_p)_{p\in\mathbb{N}}$ répond à la question.

<u>Lemme (1.2)</u> : <u>On a le même résultat, sans la condition</u> $|f_n| \leq 1$, <u>en supposant seulement que</u> $\operatorname{Sup}_n |f_n| = F$ <u>est μ-presque partout finie</u>.

<u>Démonstration</u> : On se ramène au lemme précédent en remplaçant les f_n par les f_n/F, prises nulles là où $F = 0$.

<u>Lemme (1.3)</u> : <u>Soit</u> H <u>un ensemble de fonctions réelles μ-mesurables sur</u> Ω, <u>tel que l'application canonique de</u> H <u>dans</u> $L^0(\Omega,\mu)$ <u>(qui à chaque fonction fait correspondre sa μ-classe) soit injective (en d'autres termes : deux fonctions de</u> H, <u>μ-presque partout égales, sont partout égales)</u>.
<u>On suppose</u> H <u>convexe, et compact pour la convergence simple (i.e. dans</u> $\mathbb{R}^\Omega$<u>)</u>.
<u>Alors, de toute suite de</u> H, <u>on peut extraire une suite simplement convergente</u>[♦].

<u>Démonstration</u> : H est borné dans $\mathbb{R}^\Omega$, donc, pour tout $\omega \in \Omega$, $\operatorname{Sup}_{f\in H} |f(\omega)| = F(\omega) < +\infty$. Soit alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H. Soient $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite et f une fonction, ayant les propriétés du lemme (2.2). Soit $(f''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite, et soit $(g''_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de barycentres correspondante par (1.2) : $\lim_{p\to+\infty} g''_p = f$ sur $\Omega^\bullet \subset \Omega$ portant μ. H étant convexe, $g''_p \in H$. Soit $H^\bullet$ l'image de H par l'application canonique de $\mathbb{R}^\Omega$ dans son quotient $\mathbb{R}^{\Omega^\bullet}$; c'est un compact. Par hypothèse, $H \to H^\bullet$ est injective, donc c'est un homéomorphisme. Si, pour une fonction h sur Ω, on appelle $h^\bullet$ sa rectriction à $\Omega^\bullet$, alors $(g^{\bullet''}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f^\bullet$. Donc $f^\bullet \in H^\bullet$, donc il existe $\bar{f} \in H$ dont l'image est $\bar{f}^\bullet = f^\bullet$ dans $H^\bullet$. En outre, à cause de l'homéomorphisme, la convergence des $g^{\bullet''}_p$ vers $\bar{f}^\bullet$ dans $H^\bullet$ entraîne la convergence des g''_p vers $\bar{f}$ dans H. Cette fonction $\bar{f}$ de H est indépendante du choix de $\Omega^\bullet$, de la sous-suite des f''_n, et du choix des barycentres g''_p. En effet, $\bar{f}$ est μ-presque partout égale à f, et deux fonctions de H égales presque partout sont égales partout. On a donc montré ceci : il existe une sous-suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une $\bar{f} \in H$ telles que, pour toute sous-suite $(f''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une suite de barycentres $(g''_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergeant partout vers $\bar{f}$. Comme H est compact, si nous montrons que la seule valeur d'adhérence possible de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H est $\bar{f}$, f'_n convergera vers $\bar{f}$. Soit donc $\bar{\bar{f}}$ une valeur d'adhérence dans H. Pour

---

[♦] Ce lemme sera absorbé par le théorème (1.4), qui dira que H est métrisable dans $\mathbb{R}^\Omega$.

$\omega \in \Omega$, il existe une sous-suite $(f''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\bar{\bar{f}}$ au point ω ; si $(g''_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de barycentres associée par le lemme (1.2), $g''_p(\omega)$ converge vers $\bar{\bar{f}}(\omega)$, mais aussi vers $\bar{f}(\omega)$, donc $\bar{\bar{f}}(\omega) = \bar{f}(\omega)$, donc $\bar{\bar{f}} = \bar{f}$, cqfd.

Théorème (1.4) (Alexandra Ionescu-Tulcea) : Soit H un ensemble de fonctions réelle μ-mesurables sur Ω, dont l'application canonique dans $L^0(\Omega,\mu)$ est injective, et convexe compact dans $\mathbb{R}^\Omega$. Alors, sur H, la topologie $\mathbb{R}^\Omega$ est aussi induite par $L^0(\Omega,\mu)$, et par $\mathbb{R}^D$, où D est un ensemble dénombrable convenable de Ω ; en particulier, elle est métrisable.

Démonstration :

A) Sur H, la topologie induite par $L^0(\Omega,\mu)$ est plus fine que la convergence simple. C'est en effet une topologie (séparée à cause des hypothèses sur H) métrisable ; il suffit donc, pour le voir, de montrer que si des $f_n \in H$ convergent vers f dans H, pour la topologie de L^0, elles convergent simplement vers f. Soit $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite ; d'après (1.3), on peut en extraire une sous-suite $(f''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant une limite simple $\tilde{f} \in H$. Mais alors elle a aussi la limite $\tilde{f}$ dans H pour la topologie induite par $L^0(\Omega,\mu)$, et alors $\tilde{f} = f$ presque partout donc partout. Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^\Omega$, est telle que, de toute sous-suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite $(f''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers f ; donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f (ceci est valable dans tout espace topologique). Par ailleurs, la convergence simple entraîne la convergence dans L^0 ; mais la convergence simple n'est pas a priori métrisable, donc il n'est pas immédiat que la convergence simple soit plus fine que L^0 sur H.

B) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H. On peut en extraire, par (1.3), une sous-suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ simplement convergente dans H, mais alors aussi convergente pour la topologie induite par $L^0(\Omega,\mu)$, et celle-ci est métrisable. Donc, par Bolzano-Weierstrass, H est compact pour la topologie $L^0(\Omega,\mu)$. Alors les topologies (séparées) induites par $L^0(\Omega,\mu)$ et $\mathbb{R}^\Omega$ coïncident, puisque la plus fine est compacte. Et celle de $L^0(\Omega,\mu)$ est métrisable.

C) La structure uniforme unique de H est donc métrisable. Il existe donc une base dénombrable $(\mathfrak{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entourages. Pour tout entourage $\mathfrak{U}_n$ (structure produit $\mathbb{R}^\Omega$!), il existe un ensemble fini $D_n \subset \Omega$ tel que $\mathfrak{U}$ soit la structure uniforme de la convergence simple sur D_n. Alors la structure uniforme de H est celle de la convergence simple sur $D = \bigcup_n D_n$.

§ 2. PROLONGEMENTS DE RADON DE PROBABILITES CYCLINDRIQUES SUR UN BANACH

Les résultats énoncés ici dans un Banach E subsistent, moyennant des modifications élémentaires, dans un Fréchet.

Théorème (2.1) (Tortrat) (communication personnelle) : Soit λ une probabilité sur la tribu cylindrique d'un Banach E, ou sur la tribu borélienne faible de E. On suppose que le sous-espace E_o, intersections des hyperplans fermés portant λ, est de λ-mesure extérieure 1. Alors E_o est séparable, et λ se prolonge en une probabilité de Radon sur la tribu borélienne forte de E, portée par E_o.

Démonstration : Rappelons que la tribu cylindrique est engendrée par les $\xi \in E'$; une probabilité cylindrique sur E est simplement additive sur le clan des cylindres, et se prolonge en une probabilité sur la tribu cylindrique si et seulement si elle est dénombrablement additive sur les cylindres.

Puisque, par hypothèse, $\lambda^*(E_o) = 1$, λ induit sur E_o une probabilité λ_o, sur la tribu cylindrique ou la tribu borélienne faible suivant le cas considéré ; pour A_o dans cette tribu, $\lambda_o(A_o) = \lambda^*(A_o)$. Soit B'_o la boule unité du dual $E'_o = E'/E_o^o$ de E_o ; c'est l'image de la boule unité de E' dans le quotient E'/E_o^o, par Hahn-Banach. C'est un ensemble H de fonctions λ_o-mesurables sur $\Omega = E_o$; il est convexe, et compact pour la topologie de la convergence simple. Mais supposons $\xi_1, \xi_2 \in E'$, égales λ_o-presque partout sur E_o ; cela veut dire que $\{\xi_1 - \xi_2 = 0\}$ est un hyperplan fermé de E, dont l'intersection avec E_o est de λ_o-mesure 1, donc il est de λ-mesure extérieure 1, et comme il est dans la tribu cylindrique, il est de mesure 1, donc porte λ, donc contient E_o ; donc $\xi_1 = \xi_2$ partout sur E_o. Donc Ω, H, vérifient les conditions du théorème (1.4) ; donc H est métrisable pour la convergence simple. E_o est donc un Banach dont la boule unité B'_o du dual est $*$-faiblement métrisable, donc il est séparable. [Il est un sous-espace de l'espace $C(B'_o)$ des fonctions continues sur le compact métrisable B'_o ; $C(B'_o)$ est un Banach séparable.]

Alors, sur E_o polonais, la tribu cylindrique et la tribu borélienne faible coïncident avec la tribu borélienne forte, et λ_o est de Radon sur E_o fort. Elle a donc une image $j(\lambda_o)$ de Radon sur E fort, portée par E_o, et qui coïncide avec λ sur la tribu considérée sur E, cqfd.

Définition (2.2) : Une mesure finie λ sur un espace topologique X est dite extérieurement régulière, si $\lambda(B) = \operatorname{Inf} \lambda(U)$, U ouvert $\supset$ B, pour tout borélien B. Elle est dite normale si elle passe à la limite pour les ordonnés filtrants croissants d'ouverts (ou décroissants de fermés).

Si X est complètement régulier, une mesure normale est extérieurement régulière [tout fermé est l'intersection de ses voisinages fermés, donc l'égalité $\lambda(B) = \operatorname{Inf} \lambda(U)$, U ouvert $\supset$ B, triviale pour B ouvert, est aussi vraie pour B fermé ; or l'ensemble des boréliens qui possèdent la propriété ainsi que leur complémentaire est une tribu, cette tribu contient les ouverts, donc c'est toute la tribu borélienne].

On voit aisément que, si λ est normale, l'intégrale passe à la limite pour les ordonnés filtrants croissants de fonctions semi-continues inférieurement ≥ 0. Il y a plus : si g est λ-mesurable, et si $(f_i)_{i\in I}$ est un ordonné filtrant croissant de fonctions s.c.i. ≥ 0, de limite f, $\operatorname{Sup}_{i\in I} \lambda^*(f_i g) = \lambda^*(fg)$; il suffit évidemment (en prenant $f_i \wedge n$, $g \wedge n$, et en faisant tendre $n \in \mathbb{N}$ vers $+\infty$) de le montrer pour f et g bornées ; mais alors $\lambda((f - f_i)g) \leq (\operatorname{Sup} g)\lambda(f - f_i)$, d'où le résultat.

L'image d'une mesure normale par une application continue est normale. La norme induite λ_Y d'une mesure normale λ sur X sur une partie quelconque Y est aussi normale. Soit en effet $\tilde{Y} \supset Y$, $\tilde{Y}$ borélien, tel que $\lambda(\tilde{Y}) = \lambda^*(Y)$. Si B est un borélien de Y, $\lambda_Y(B) = \lambda^*(B) = \lambda(\tilde{B})$, où $\tilde{B}$ est un borélien quelconque de $\tilde{Y}$ tel que $\tilde{B} \cap Y = B$. Soit alors $(U_i)_{i\in I}$ un ordonné filtrant croissant d'ouverts relatifs de Y, de réunion U. Pour chaque U_i, soit V_i le plus grand ouvert de X tel que $V_i \cap Y = U_i$ (V_i est l'intérieur de $U_i \cup \complement Y$) ; c'est encore un ordonné filtrant croissant ; soit $V = \bigcup_{i\in I} V_i$, c'est un ouvert de X, $V \cap Y = U$. Alors $\operatorname{Sup}_{i\in I} \lambda_Y(U_i) = \operatorname{Sup}_{i\in I} \lambda(V_i \cap \tilde{Y}) = \lambda(V \cap \tilde{Y})$ ($\tilde{Y}$ étant λ-mesurable) $= \lambda_Y(U)$.
On a alors les conséquences suivantes du théorème (2.1) :

Corollaire (2.3) (Phillips) : Toute probabilité normale, a fortiori toute probabilité de Radon sur $\sigma(E,E')$, provient d'une probabilité de Radon sur E.

Démonstration : On applique (2.1) ; la normalité assure que $\lambda(E_o) = 1$.

Corollaire (2.4) (Tortrat) : Soit $(\Omega,\mathcal{O},\mu)$ un espace muni d'une mesure $\mu \geq 0$ σ-finie, et soit Φ une fonction $\Omega \to E$, scalairement μ-mesurable, et ayant

la propriété suivante :
Pour $\xi \in E'$, si $\langle \Phi, \xi \rangle = 0$ μ-pp., alors $\langle \Phi, \xi \rangle \equiv 0$. Alors Φ prend ses valeurs dans un sous-Banach séparable E_o de E, et est μ-mesurable.

Démonstration : On peut supposer μ probabilité. Φ est μ-mesurable de Ω dans E muni de la tribu cylindrique ; donc elle définit une probabilité image $\lambda = \Phi(\mu)$ sur la tribu cylindrique de E. Si un hyperplan fermé $\{\xi = 0\}$ porte λ, cela veut dire que $\langle \Phi, \xi \rangle = 0$ μ-pp. ; alors $\langle \Phi, \xi \rangle \equiv 0$ donc l'hyperplan $\{\xi = 0\}$ contient $\Phi(\Omega)$. L'intersection E_o de tous ces hyperplans contient encore $\Phi(\Omega)$ (et c'est exactement le sous-espace vectoriel fermé engendré par $\Phi(\Omega)$). Mais alors $\lambda^*(E_o) \geq \mu^*(\Phi^{-1}(E_o)) = 1$. D'après le théorème (2.1), E_o est séparable. Et alors Φ est évidemment μ-mesurable.

Proposition (2.5) (Alexandra Ionescu-Tulcea) : Soit $\Phi : \Omega \to E$, prenant ses valeurs dans un faiblement compact convexe $K \subset E$, scalairement μ-mesurable. Par la propriété de Radon-Nikodym, elle est scalairement μ-presque partout égale à une fonction $\tilde{\Phi}$, prenant ses valeurs dans un sous-Banach séparable de E et dans K, et μ-mesurable. Un exemplaire de $\tilde{\Phi}$ est donné comme suit : si ρ est un relèvement de Maharam : $L^\infty(\Omega,\mu) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega,\mu)$, $\tilde{\Phi} = \rho\Phi$ définie par $\langle \rho\Phi, \xi \rangle = \rho\langle \Phi, \xi \rangle$ pour tout $\xi \in E'$.

Démonstration : Le rélèvement définit $\rho\Phi$ comme une fonction à valeurs dans le dual algébrique E'^* de E'. Mais, si $\xi(K) \leq 1$, alors $\langle \Phi, \xi \rangle \leq 1$ donc $\langle \rho\Phi, \xi \rangle = \rho\langle \Phi, \xi \rangle \leq 1$; donc $\rho\Phi$ prend ses valeurs dans le bipolaire K^{oo} de K dans E'^* mis en dualité avec E' ; K étant faiblement compact convexe, $K^{oo} = K$. Par sa définition même, pour tout ξ, $\rho\langle \Phi, \xi \rangle = \langle \Phi, \xi \rangle$ μ-pp., donc $\rho\Phi = \Phi$ scalairement μ-pp. Ensuite, si $\langle \rho\Phi, \xi \rangle = 0$ μ-pp., cela veut dire que $\langle \Phi, \xi \rangle = 0$ μ-pp. ; d'après la propriété du relèvement, $\rho\langle \Phi, \xi \rangle \equiv 0$, donc $\langle \rho\Phi, \xi \rangle \equiv 0$. Donc $\rho\Phi$ a la propriété énoncée dans l'hypothèse du corollaire (2.4) ; d'où la conclusion.

§ 3. E ET $\sigma(E,E')$ SONT UNIVERSELLEMENT MESURABLES

Définition (3.1) : $X \subset Z$ topologique séparé est dit relativement universellement mesurable s'il est μ-mesurable pour toute mesure de Radon finie μ sur Z. X est dit universellement mesurable s'il est relativement universellement mesurable dans tout espace topologique séparé dont il est sous-espace. Un compact, une réunion dénombrable de compacts, sont universellement mesurables.

Théorème (3.2) (Sunyach) : Soit X complètement régulier. Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

1) X est relativement universellement mesurable dans au moins un espace topologique complètement régulier universellement mesurable ;

2) X est universellement mesurable ;

3) Toute probabilité normale sur X est de Radon.

Démonstration : Trivialement $2 \Rightarrow 1$ (X est complètement régulier, donc plongeable dans un compact, universellement mesurable).
Montrons que $1 \Rightarrow 3$. Soit donc $X \subset Z$, Z complètement régulier universellement mesurable, X relativement universellement mesurable dans Z. Alors $Z \subset U$, U compact ; X est relativement universellement mesurable dans U. [En effet, soit μ de Radon sur U ; Z étant μ-mesurable, la mesure induite μ_Z est de Radon ; alors X est μ_Z-mesurable, ce qui équivaut à μ-mesurable.]

Soit alors λ une probabilité normale sur X. Par les propriétés vues après (2.2), son image $j(\lambda)$ dans U est normale, donc extérieurement régulière, donc intérieurement régulière (K est compact) donc de Radon. Alors, X étant $j(\lambda)$-mesurable, la mesure induite $(j(\lambda))_X$, qui n'est autre que λ, est de Radon.

Enfin $3 \Rightarrow 2$. Soit en effet $X \subset Z$, espace topologique arbitraire. Soit μ de Radon sur Z. La mesure induite μ_X sur X est normale (voir après (2.2)). D'après l'hypothèse, elle est de Radon. Donc
$\mu^*(X) = \mu_X(X) = \operatorname{Sup} \mu_X(K)$ (K compact $\subset X$) $= \operatorname{Sup} \mu(K) = \mu_*(X)$, X est μ-mesurable.

Remarque : On notera que la mesure induite par une mesure de Radon μ sur une partie μ-mesurable est de Radon, alors que la mesure induite par une mesure normale sur une partie quelconque est normale.

Théorème (3.3) : Soit X métrique complet. Dans tout espace topologique séparé Z où il est plongé, il est intersection d'un fermé et d'un G_δ ; il est un G_δ s'il est dense, ou si Z est métrisable ou Lindelöf régulier. En particulier, X est universellement borélien, donc universellement mesurable. En particulier, un Fréchet E est universellement borélien, donc universellement mesurable.

Démonstration : Soit d la distance sur X. Supposons d'abord X dense dans Z. Soit U_n l'ensemble des points z de Z ademttant un voisinage $V_{n,z}$ tel que

$V_{n,z} \cap X$ ait un d-diamètre $\leq \frac{1}{n}$. U_n est ouvert et contient X. Il suffit de démontrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = X$ pour que X soit un G_δ. Soit donc z dans cette intersection. Les $V_{n,z}$, $n \in \mathbb{N}$, forment une base de fibre de Cauchy pour d sur X ; ce filtre a une limite $x \in X$. Soit W un voisinage fermé de x. Pour n assez grand, $V_{n,z} \cap X \subset W$. Mais z est adhérent à X, donc à $V_{n,z} \cap X$, donc $z \in W$. Mais x est l'intersection de ses voisinages fermés (Hausdorff !), donc $z = x \in X$.

Si X n'est plus dense dans X, il est intersection du fermé $\bar{X}$ et d'un G_δ. Il sera un G_δ si tout fermé F de Z est un G_δ. C'est vrai si Z est métrisable, car alors, si D est une distance sur Z, $F = \bigcap_n U_n$, $U_n = \bigcup_{z \in F} B^o(z, \frac{1}{n})$, $B^o(z,R) = D$ -boule ouverte de centre z et de rayon R. C'est aussi vrai si Z est Lindelöf régulier ; en effet, un ouvert est alors réunion des ouverts dont il contient l'adhérence (Z est régulier), donc réunion dénombrable de ces ouverts (Z est Lindelöf), donc de leurs adhérences, donc tout ouvert de Z est un F_σ, et, par complémentarité, tout fermé est un G_δ.

Théorème (3.4) : *Si E est un Fréchet, $\sigma(E,E')$ est universellement mesurable.*

Démonstration : Le corollaire (2.3) dit que toute probabilité normale est de Radon, on applique alors (3.2).

Remarque : Si F est un Fréchet, $\sigma(F',F)$ est trivialement universellement mesurable, comme réunion dénombrable de compacts.

§ 4. UN ESPACE METRIQUE COMPLET EST RADONIEN

Définition (4.1) : *On appelle espace radonien un espace topologique séparé, sur lequel toute mesure finie sur la tribu de Borel est de Radon.*

Un espace radonien est universellement mesurable par (3.2) (donc un sous-espace non Lebesgue-mesurable de [0,1] est non radonien). Inversement, un sous-espace relativement universellement mesurable X d'un radonien Z est radonien. [Soit en effet μ une mesure finie sur X. Son image $j(\mu)$ dans Z est de Radon ; comme X est $j(\mu)$-mesurable, la mesure induite $\mu = (j(\mu))_X$ est de Radon.] Un compact métrisable, un souslinien sont radoniens.

Proposition (4.2) : $[0,1]^I$, I *non dénombrable, n'est pas radonien.*

Démonstration : Soit X l'ensemble des ordinaux non dénombrables, muni de la topologie des intervalles [un système fondamental de voisinages de $a \in X$ est formé des $]c,a]$, $c < a$]. Dieudonné a construit une probabilité m sur X, où tout point est de mesure 0. Les compacts de X sont dénombrables, donc négligeables, et cependant X est de mesure 1, donc la probabilité m n'est pas de Radon et X n'est pas radonien. Remarquons aussi que les $[0,a[$ sont ouverts m-négligeables, et que leur réunion X ne l'est pas. On définit m comme suit :

1°) L'intersection de 2 fermés F_1, F_2, non dénombrables, est non dénombrable. Soit en effet $a \in X$. Il existe $a_1 \geq a$ dans F_1, $a_2 \geq a_1$ dans F_2, $a_3 \geq a_2$ dans F_1, $a_4 \geq a_3$ dans F_2, etc... La suite des a_n a une limite $\tilde{a} \geq a$, dans $F_1 \cap F_2$. Donc $F_1 \cap F_2$ est non dénombrable.

2°) L'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ d'une suite de fermés non dénombrables est non dénombrable. Soit en effet $a \in X$. Il existe $a_o \geq a$ dans F_o, $a_1 \geq a_o$ dans $F_o \cap F_1 \ldots$, $a_n \geq a_{n-1}$ dans $F_o \cap F_1 \cap \ldots F_n$, etc... La suite des a_n est croissante, de limite $\tilde{a} \geq a$ dans $\bigcap_n F_n$.

3°) Considérons l'ensemble $\mathfrak{X}$ des parties B boréliennes de X, telles que B ou $\complement B$ (et un seul des deux nécessairement, d'après 1°), contienne un fermé non dénombrable. $\mathfrak{X}$ est stable par complémentarité, et par réunion dénombrable. [Soit B_n une suite d'éléments de X. Si l'un des B_n contient un fermé non dénombrable, il en est de même de $B = \bigcup_n B_n$. Sinon, tous les $\complement B_n$ contiennent des fermés non dénombrables, donc aussi, par 2°), $\bigcap_n \complement B_n = \complement B$.] C'est donc une tribu. Cette tribu contient tous les fermés de X. [Si F est fermé, ou bien il est non dénombrable, ou bien $F \subset [0,a[$, alors $\complement F \supset [a,\rightarrow[$, fermé non dénombrable.] Donc $\mathfrak{X}$ est la tribu borélienne.

4°) Définissons alors la mesure m sur X par : $m(B) = 1$ si $B \in \mathfrak{X}$ contient un fermé non dénombrable, 0 sinon. Alors m est une mesure [si les $B_n \in \mathfrak{X}$ sont disjoints de réunion B, ou bien l'un d'eux contient un fermé non dénombrable, et alors un seul d'entre eux, et $1 = m(B) = \sum_n (B_n)$; ou bien aucun d'entre eux, alors tous les $\complement B_n$ contiennent des fermés non dénombrables, donc aussi $\complement B = \bigcap_n \complement B_n$, alors $0 = m(B) = \sum_n m(B_n)$]. Donc X n'est pas radonien. Si alors K est le compactifié d'Alexandroff de X, X est ouvert dans K donc relativement universellement mesurable, donc K n'est pas radonien ; d'ailleurs, si $K = X \cup \{\omega\}$, l'image $j(m)$ de m dans K ($j\{\omega\} = 0$) n'est pas de Radon.

Le compact K est quelque peu tératologique. Mais, si $a \neq b$, si $\varphi_{a,b}$ est une fonction continue sur K, $0 \leq \varphi_{a,b} \leq 1$, $\varphi_{a,b}(a) = 0$, $\varphi_{a,b}(b) = 1$, alors

$x \mapsto (\varphi_{a,b}(x))_{a\in K, b\in K, a\neq b}$ est un homéomorphisme de K sur un sous-espace de $[0,1]^{K<K\setminus\Delta}$, Δ diagonale. Comme $K\times K\setminus\Delta$ est de cardinal $\aleph_1$, on voit que $[0,1]^{\aleph_1}$ n'est pas radonien, sans quoi son sous-espace K (compact donc relativement universellement mesurable) le serait. Et pour la même raison, $[0,1]^I$, I non dénombrable, n'est pas radonien.

(4.3) L'axiome du cardinal non-mesurable

Existe-t-il, sur un **ensemble** I, une probabilité définie sur la tribu $\mathfrak{P}(I)$, pour laquelle tout point soit négligeable ? Ou encore : existe-t-il sur l'espace discret I une probabilité qui ne soit pas de Radon ?

On peut ajouter indifféremment, à la théorie des ensembles, l'axiome d'existence d'un tel ensemble I, ou l'axiome de non-existence. En admettant l'existence, on pourra trouver des contre-exemples à certaines conjectures. Mais il est plutôt intéressant d'éviter l'existence d'objets tératologiques !

Nous adopterons donc, dans la théorie des ensembles, l'axiome :

(4.3) Tout espace discret est radonien

Et à partir de là nous démontrons le théorème (4.5).

Lemme (4.4) : Sur tout espace paracompact X, toute mesure extérieurement régulière est normale♦.

Démonstration : Soit μ une mesure ≥ 0 finie, extérieurement régulière. Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ un ordonné filtrant croissant d'ouverts, de réunion Ω. Posons $\alpha = \operatorname{Sup}_{i\in I} \mu(\Omega_i)$, $\beta = \mu(\Omega)$. Nous voulons montrer que $\alpha = \beta$. Soit $\mu(\complement\Omega) = \mu(F) = \gamma$; $\mu(X) = \beta + \gamma$. Définissons une mesure $\tilde{\mu}$ par $\tilde{\mu}(B) = \operatorname{Sup}_i \mu(B \cap \Omega_i)$; elle est bien trivialement simplement additive, et passe trivialement à la limite des suites croissantes (interversion de Sup), donc elle est dénombrablement additive. On a donc $\tilde{\mu} \leq \mu$, donc $\nu = \mu - \tilde{\mu}$ est une mesure ≥ 0 ; $\tilde{\mu}(\Omega_i) = \mu(\Omega_i)$ donc $\nu(\Omega_i) = 0$, $\tilde{\mu}(\Omega) = \alpha$ donc $\nu(\Omega) = \beta - \alpha$, $\tilde{\mu}(F) = 0$ donc $\nu(F) = \gamma$, et $\nu(X) = \beta + \gamma - \alpha$. Par suite de la régularité extérieure, il existe un ouvert $U \supset F$, tel que $\nu(U) \leq \gamma + \varepsilon$. X étant paracompact, il existe une partition de l'unité $(\varphi_i)_{i\in I}$,

---

♦ Théorème dû à Ulam, et Varadarayan (voir Billingsely).

φ, subordonnée au recouvrement $(\Omega_i)_{i\in I}, U$, de X. Sur I discret, nous définirons la mesure λ : pour $J \subset I$, $\lambda(J) = \nu(\sum_{i\in J} \varphi_i)$ [comme une partition de l'unité est localement finie, $\sum_{i\in J} \varphi_i$ est continue, donc ν-mesurable, et comprise entre 0 et 1 ; trivialement λ est dénombrablement additive]. La λ-mesure d'un point est nulle, car φ_i a son support dans ω_i ν-négligeable. Alors, d'après l'axiome (4.3), $\lambda(I) = 0$, ou $\nu(\sum_{i\in I} \varphi_i) = 0$, et comme $\nu(\varphi) \leq \nu(U) \leq \gamma + \varepsilon$, on a $\beta + \gamma - \alpha = \nu(1) = \nu(\sum_{i\in I} \varphi_i) + \nu(\varphi) \leq \gamma + \varepsilon$, donc $\beta - \alpha \leq \varepsilon$; ε étant arbitraire, $\beta = \alpha$, cqfd.

Théorème (4.5) : Tout espace métrique complet X est radonien, en particulier tout Fréchet E est radonien.

Démonstration : Toute mesure μ est extérieurement régulière sur un métrisable X. [L'ensemble $\mathfrak{X}$ des parties boréliennes B pour lesquelles $\mu(B) = \text{Inf}\, \mu(U)$, U ouvert $\supset B$, et $\mu(\complement B) = \text{Inf}\, \mu(V)$, V ouvert $\supset \complement B$, est stable par complémentation, et par réunion dénombrable. En effet, si $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, si $B_n \subset U_n$, $\mu(U_n \setminus B_n) \leq \varepsilon$, si $\complement B_n \subset V_n$, $\mu(V_n \setminus \complement B_n) \leq \varepsilon_n$, on a $\mu(\bigcup_n U_n) - \mu(B) \leq \sum_n \varepsilon_n$, et $\mu(\bigcap_n V_n) - \mu(\complement B) \leq \sum_n \mu(V_n \setminus \complement B_n) \leq \sum_n \varepsilon_n$, donc, pour N assez grand, $\mu(\bigcap_{n\leq N} V_n) - \mu(\complement B) \leq 2 \sum_n \varepsilon_n$; $\bigcup_n U_n$ et $\bigcap_{n\leq N} V_n$ sont ouverts. Donc $\mathfrak{X}$ est une tribu. Elle contient tous les fermés, car si F est fermé, $F = \bigcap_n U_n$, $U_n = \bigcup_{z\in F} B^o(z, \frac{1}{n})$; donc $\mathfrak{X}$ est la tribu borélienne.] Comme alors X est paracompact, μ est normale par (4.4). Mais X métrique complet est universellement mesurable par (3.3), donc μ est de Radon par (3.2), cqfd.

Remarques :

1) La mesurabilité universelle d'un métrique complet est alors absorbée par le fait qu'il est radonien. Mais le théorème (3.3) disait plus, et ne dépend pas de l'axiome (4.3).

2) Soit K un compact non radonien. Soit $E = C(K)$. Alors, par $k \to \delta_k$, K est homéomorphe à un sous-espace de $\sigma(E',E)$; donc $\sigma(E',E)$ n'est pas radonien.

3) Je ne sais pas si, pour tout Banach E, $\sigma(E,E')$ est radonien.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Billingsley, Convergence of probability measures, appendice, théorème de Varadarayan, J. Wiley, 1968.

[2] Alexandra Ionescu-Tulcea, On pointwise convergence, compactness, and equicontinuity, Advances in Math., 12, 1974, p. 171-177.

[3] Dorothy Maharam, On a theorem of von Neumann, Proc. Amer. Math. Soc., 9, 1958, p. 987-994.

[4] Christian Sunyach, Une caractérisation des espaces universellement mesurables, Note aux C. R. Acad. Sc., 268, 21/4/1969, p. 864-866.

[5] S. Ulam, Zu Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre, Fund. Math. XVI, 1931.
