SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. BILLARD

Primarité des espaces $C(\alpha)$ (α ordinal infini $< \omega_1 =$ premier ordinal non dénombrable)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 22, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A17_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

PRIMARITE DES ESPACES $C(\alpha)$

(α ORDINAL INFINI $< \omega_1$ = PREMIER ORDINAL NON DENOMBRABLE)

par P. BILLARD

(Marseille)

Exposé No XXII

11 Mai 1976

INTRODUCTION

Il est connu (cf. [2] et [5]) que les espaces de Banach

$C([0,1])$ et $C(\omega^{\omega^{\alpha}})$ (α ordinal $< \omega_1$ et $\omega^0 = 1$ par convention)

sont deux à deux non isomorphes et constituent, à un isomorphisme près, tous les espaces de Banach $C(K)$ (K compact) qui sont séparables et de dimension infinie.

Il est connu que $C([0,1])$ est primaire (cf. [3]) ainsi que $C(\omega^{\omega^{0}}) \simeq c_o$ qui est même premier, c'est-à-dire que tout sous-espace fermé complémenté de dimension infinie de c_o est isomorphe à c_o.

Nous nous proposons ici de donner un <u>bref aperçu</u> d'une preuve de la primarité des espaces $C(\omega^{\omega^{\alpha}})$ ($\leq \alpha < \omega_1$) dont l'exposé complet donné dans [1] est long.

Nous étudions d'abord le cas de $C_o(\omega^{\omega})$ $(=\{f, f \in C(\omega^{\omega})$ et $f(\omega^{\omega}) = 0\})$ qui est visiblement isomorphe à $C(\omega^{\omega})$ et nous généralisons ensuite au cas de $C_o(\omega^{\omega^{\alpha}})$ $(1 \leq \alpha < \omega_1)$.

§ 1. SUR CERTAINES BASES DE $C(\omega^{\omega})$

<u>Définition 1</u> : Si $\alpha = \omega^{\alpha_k} n_k + \dots + \omega^{\alpha_o} n_o$ est l'écriture arithmétique usuelle de l'ordinal α ($\alpha_k > \alpha_{k-1} > \dots > \alpha_o$ et n_j entier > 0 pour $0 \leq j \leq k$), α_o définira le <u>type de α</u>.

Une partie A de $[1, \omega^{\omega}[$ sera dite <u>normale</u> si elle est fermée et de même type d'ordre que $[1, \omega^{\omega}[$.

Une famille $[\Phi(\alpha),\alpha]_{\alpha\in A}$ de segments de $[1,\omega^{\omega}[$ indexée sur une partie normale A de $[1,\omega^{\omega}[$ sera dite une <u>famille normale</u> associée à A si elle vérifie

(1) $\forall\ \alpha,\ \alpha \in A \Rightarrow \Phi(\alpha)$ est isolé dans $[1,\omega^{\omega}[$ et $\Phi(\alpha) \leq \alpha$,

(2) $\left\{\begin{array}{l}\text{pour chaque ordinal } \xi \text{ les segments } [\Phi(\alpha),\alpha] \text{ pour lesquels type de } \alpha \\ (\text{dans } A) = \xi \text{ sont deux à deux disjoints,}\end{array}\right.$

(3) $\left\{\begin{array}{l}\forall\ \alpha\ \forall\ \alpha',\ \alpha \text{ et } \alpha' \in A \Rightarrow [\Phi(\alpha),\alpha] \text{ et } [\Phi(\alpha'),\alpha'] \text{ sont disjoints ou sinon} \\ \text{l'un d'eux est inclus dans l'autre,}\end{array}\right.$

(4) $\forall\ \xi,\ \xi \in [1,\omega^{\omega}[\ \Rightarrow \{\alpha, \alpha \in A \text{ et } \xi \in [\Phi(\alpha),\alpha]\}$ est fini ;

enfin si $\chi_{\alpha} = \chi_{[\Phi(\alpha),\alpha]}$ est la fonction caractéristique de $[\Phi(\alpha),\alpha]$, une application $n \mapsto \chi_{\alpha_n}$ de $\mathbb{N} = [1,\omega[$ dans $\{\chi_{\alpha},\ \alpha \in A\}$ sera dite une <u>numérotation normale</u> de $\{\chi_{\alpha},\ \alpha \in A\}$ si elle vérifie

(5) $n \mapsto \chi_{\alpha_n}$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\{\chi_{\alpha},\ \alpha \in A\}$,

(6) $\forall\ n\ \forall\ n',\ n \text{ et } n' \in \mathbb{N}$ et $[\Phi(\alpha_{n'}),\alpha_{n'}] \supset [\Phi(\alpha_n),\alpha_n] \Rightarrow n' \leq n$.

On obtient facilement les

<u>Lemme 1</u> : Sous les conditions de normalité précédentes $(\chi_{\alpha_n})_{n=1,2,\ldots}$ est une base monotone du sous-espace fermé B de $C_o(\omega^{\omega})$ engendré par les χ_{α} $(\alpha \in A)$.

<u>Lemme 2</u> : Sous les conditions de normalité précédentes en désignant par τ l'isomorphisme d'ordre de $[1,\omega^{\omega}[$ sur A, il existe une unique application linéaire et isométrique T de $C_o(\omega^{\omega})$ sur B qui vérifie

$$\forall\ \beta\ \forall\ f,\ \beta \in [1,\omega^{\omega}[\ \text{et } f \in C_o(\omega^{\omega}) \Rightarrow f(\beta) = T(f)(\tau(\beta)) \quad .$$

§ 2. SELECTION D'UNE CERTAINE PARTIE NORMALE DE $[1,\omega^{\omega}[$

Nous fixons une projection continue P de $C_o(\omega^{\omega})$ de projection supplémentaire Q et nous écrivons

(7) $$C_o(\omega^{\omega}) = X \oplus Y \qquad (X = P(C_o(\omega^{\omega})) \text{ et } Y = Q(C_o(\omega^{\omega}))) \quad .$$

On établit par récurrence le

Lemme 3 : Il est possible de former une suite strictement croissante $(\mu'_p)_{p=1,2,\ldots}$ d'entiers ≥ 1 telle que quel que soit p et quels que soient les sous-ensembles E_o et E_1 de $[1,\omega^{\mu'_p}] = E_o \cup E_1$ alors l'un au moins de ces deux sous-ensembles contient une partie fermée A_p de $[1,\omega^{\mu'_p}]$ de même type d'ordre que $[1,\omega^p]$ et telle que pour chaque entier q vérifiant $0 \leq q \leq p$ les points de A_p de type q (au sens de A_p) sont d'un même type r_q (au sens de $[1,\omega^{\mu'_p}]$).

Soit $\Phi : [1,\omega^{\omega}[\mapsto [1,\omega^{\omega}[$ définie par

(8) $\forall\, \alpha,\ \alpha$ isolé $\in [1,\omega^{\omega}[\Rightarrow \Phi(\alpha) = \alpha,$

(9) $\Phi(\omega^k) = \omega^{k-1} + 1$ pour $k = 2,3,\ldots$ et $\Phi(\omega) = 1,$

$$(10)\begin{cases} \forall\, \alpha,\ \alpha \in [1,\omega^{\omega}[\text{ et } \alpha \text{ s'écrivant, dans l'arithmétique des ordinaux, sous} \\ \text{la forme } \alpha = \omega^{k+q}\, n_{k+q} + \ldots + \omega^k\, n_k \text{ avec } n_k > 1 \text{ ou avec } n_k = 1 \text{ et} \\ \max(n_{k+2},\ldots,n_{k+q}) \geq 1 \Rightarrow \Phi(\alpha) = \omega^{k+q}\, n_{k+q} + \ldots + \omega^{k+1}\, n_{k+1} + \omega^k\,(n_k-1) + 1. \end{cases}$$

La famille $[\Phi(\alpha),\alpha]_{\alpha\in[1,\omega^{\omega}[}$ est une famille normale associée à la partie normale $[1,\omega^{\omega}[$ de $[1,\omega^{\omega}[$ et il existe une numérotation normale naturelle de $\{\chi_\alpha,\ \alpha \in [1,\omega^{\omega}[\}$; en désignant par μ_α $(\alpha \in [1,\omega^{\omega}[)$ les formes coordonnées de la base monotone de $C_o(\omega^{\omega})$ ainsi formée (cf. lemmes 1 et 2) nous établissons le

<u>Lemme 4</u> : Nous pouvons sélectionner une partie normale A de $[1,\omega^{\omega}[$ telle que $[\Phi(\alpha),\alpha]_{\alpha\in A}$ est une famille normale associée où $\Phi : [1,\omega^{\omega}[\mapsto [1,\omega^{\omega}[$ est définie par (8), (9) et (10), et nous pouvons sélectionner une numérotation normale $n \mapsto \chi_{\alpha_n}$ de $\{\chi_\alpha,\ \alpha \in A\}$ vérifiant

(11) $\begin{cases} \forall\ f,\ f \in C_o(\omega^{\omega}) \Rightarrow R(f) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_{\alpha_n}(f)\chi_{\alpha_n} \text{ converge et } R \text{ est une projection} \\ \text{de } C_o(\omega^{\omega}) \text{ sur le sous-espace fermé } B \text{ de } C_o(\omega^{\omega}) \text{ engendré par les } \chi_{\alpha_n} \\ (n = 1,2,\ldots) \text{ de norme} \leq 2, \end{cases}$

(12) $\begin{cases} \Sigma_{1\leq n}(\Sigma_{1\leq n' \text{ et } n'\neq n}(|\mu_{\alpha_n}(P(\chi_{\alpha_{n'}}))| + |\mu_{\alpha_n}(Q(\chi_{\alpha_{n'}}))|)) \leq \varepsilon \ (\varepsilon \text{ étant un} \\ \text{réel} > 0 \text{ donné}). \end{cases}$

Au moyen du lemme 3 nous pouvons améliorer le lemme 4 selon le

<u>Lemme 5</u> : Nous pouvons sélectionner une partie normale A' de la partie normale A de $[1,\omega^{\omega}[$ qui intervient dans le lemme 4 telle que $[\Phi(\alpha),\alpha]_{\alpha\in A'}$ est une famille normale associée et telle que si $(n_j)_{j=1,2,\ldots}$ est la mise sous la forme d'une suite strictement croissante d'entiers de $\{n,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } \alpha_n \in A'\}$ en posant $\beta_j = \alpha_{n_j}$ $(j=1,2,\ldots)$ alors $j \to \chi_{\beta_j}$ est une numérotation normale de $\{\chi_\alpha,\ \alpha \in A'\}$ qui vérifie

(13) $\forall\ j,\ 1/2 \leq \mu_{\beta_j}(RP(\chi_{\beta_j})) \leq 4\|P\|$ ou $\forall\ j,\ 1/2 \leq \mu_{\beta_j}(RQ(\chi_{\beta_j})) \leq 4\|Q\|$

et qui vérifie, en nous fixant les idées sur le 1er cas de (13),

(14) $\begin{cases} \text{si pour chaque } \alpha \in A' \text{ la suite } \chi_{\beta_{j_1}},\ldots,\chi_{\beta_{j_m}} \text{ est la suite des } \chi_\beta \ (\beta \in A') \\ \text{vérifiant } \chi_\beta(\alpha) = 1 \text{ et rangés par supports décroissants, alors en posant} \\ \beta_{j_\ell} = \gamma_\ell \ (1 \leq \ell \leq m) \text{ nous avons} \\ \forall\ \ell\ \forall\ \ell',\ 1 \leq \ell \text{ et } \ell' \leq m \Rightarrow |\mu_{\gamma_\ell}(RP(\chi_{\gamma_\ell})) - \mu_{\gamma_{\ell'}}(RP(\chi_{\gamma_{\ell'}}))| < 1/16\ m\ . \end{cases}$

§ 3. LE THEOREME PRINCIPAL POUR $C_o(\omega^\omega)$

Avec les notations du lemme 5 plaçons-nous dans la situation

$$(15)\begin{cases} f \in B' \text{ (= sous-espace fermé de } C_o(\omega^\omega) \text{ engendré par les } \chi_{\beta_j} \text{ pour } j=1,2,\dots) \\ \text{avec } \|f\| = 1 \text{ d'où } f = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{\beta_j}(f)\chi_{\beta_j} \ ; \end{cases}$$

dans ces conditions (cf. lemme 2) nous pouvons **trouver** $\alpha \in A'$ vérifiant $|f(\alpha)| = 1$; fixons-nous les idées sur le cas $f(\alpha) = 1$ de sorte que si $\chi_{\gamma_1},\dots,\chi_{\gamma_m}$ sont comme dans (14) nous avons

$$(16) \qquad \Sigma_{1\le \ell\le m}\, \mu_{\gamma_\ell}(f) = 1 \quad .$$

La continuité de RP jointe à (15) donne

$$(17) \qquad RP(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{\beta_j}(f) RP(\chi_{\beta_j}) \quad .$$

Pour $j = 1,2,\dots$ nous pouvons, dans (17), développer $RP(\chi_{\beta_j}) \in B$ sur la base $(\chi_{\alpha_n})_{n=1,2,\dots}$ de B puis égaler les valeurs des deux membres au point α, et puisque seulement les $\chi_{\gamma_\ell}(\alpha)$ $(1 \le \ell \le m)$ sont $\neq 0$ parmi les $\chi_{\beta_j}(\alpha)$ $(j = 1,2,\dots)$ nous pouvons écrire

$$(18)\begin{cases} RP(f)(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{\beta_j}(f)\mu_{\beta_j}(RP(\chi_{\beta_j}))\chi_{\beta_j}(\alpha) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{\beta_j}(f)\Big(\sum_{\substack{n=1\\ n\neq n_j}}^{\infty} \mu_{\alpha_n}(RP(\chi_{\beta_j}))\chi_{\alpha_n}(\alpha)\Big) = e_1 + e_2 \quad . \end{cases}$$

Par la définition de R donnée dans (11) nous avons

$$(19) \quad \forall\, n,\ \forall\, j \qquad \mu_{\alpha_n}(RP(\chi_{\beta_j})) = \mu_{\alpha_n}(P(\chi_{\beta_j})) \quad .$$

Puisque $\forall\ \alpha,\ \alpha \in [1,\omega^{\omega}[\ \Rightarrow\ \|\mu_\alpha\| \le 2$ avec (12) nous avons

$$(20)\quad \begin{cases} |e_2| \le 2\ \Sigma_{1\le j}\ (\Sigma_{1\le n \text{ et } n\ne n_j}\ |\mu_{\alpha_n}(P(\chi_{\beta_j}))|) = \\ = 2\ \Sigma_{1\le n}\ (\Sigma_{1\le j \text{ et } n_j\ne n}\ |\mu_{\alpha_n}(P(\chi_{\beta_j}))|) \le 2\varepsilon\quad ; \end{cases}$$

avec (13) et (14) nous avons, en tenant compte aussi de (16),

$$(21)\quad \begin{cases} e_1 = \Sigma_{1\le \ell\le m}\ \mu_{\gamma_\ell}(f)\ \mu_{\gamma_\ell}(RP(\chi_{\gamma_\ell})) = \\ = \Sigma_{1\le \ell\le m}\ \mu_{\gamma_\ell}(f)\ \mu_{\gamma_m}(RP(\chi_{\gamma_m})) + \\ + \Sigma_{1\le \ell\le m}\ \mu_{\gamma_\ell}(f)(\mu_{\gamma_\ell}(RP(\chi_{\gamma_\ell})) - \mu_{\gamma_m}(RP(\chi_{\gamma_m}))) \ge \\ \ge \frac{1}{2} - 2\Sigma_{1\le \ell\le m}\ |\mu_{\gamma_\ell}(RP(\chi_{\gamma_\ell})) - \mu_{\gamma_m}(RP(\chi_{\gamma_m}))| \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\quad . \end{cases}$$

La comparaison entre (18), (20) et (21) donne

$$(22)\qquad RP(f)(\alpha) \ge \frac{1}{2} - 2\varepsilon - \frac{1}{8} \ge \frac{1}{4}\quad (\text{en prenant } \varepsilon \le \frac{1}{16})$$

et puisque d'après (11) nous avons $\|R\| \le 2$, de $\frac{1}{4} \le \|RP(f)\| \le \|R\|\ \|P(f)\|$ déduit de (22) nous déduisons

$$(23)\qquad \|P(f)\| \ge \frac{1}{8}$$

et (23) implique que P restreint à B' est un isomorphisme ; puisque B' est isomorphe à $C_o(\omega^{\omega})$ (cf. lemme 2) le corollaire 1 de [4] donne le

<u>Théorème 1</u> : L'espace de Banach $C_o(\omega^{\omega})$ est primaire.

§ 4. LE THEOREME PRINCIPAL DANS LE CAS GENERAL

Ce théorème qui exprime la primarité de $C_0(\omega^{\omega^{\alpha}})$ $(1 \leq \alpha < \omega_1)$ s'obtient en généralisant les lemmes qui précèdent et le calcul du § 3 ; cependant ces généralisations ne sont pas toujours immédiates et ne peuvent être développées ici.

REFERENCES

[1] P. Billard, Sur la primarité des espaces $C(\alpha)$, Stud. Math., à paraître.

[2] C. Bessaga and A. Pełczynski, Spaces of continuous functions, Stud. Math. 19 (1960) p. 53-62.

[3] J. Lindenstrauss et A. Pełczynski, Contribution to the theory of classical Banach spaces, J. Funct. An. 8 (1971) p. 225-249.

[4] A. Pełczynski, On C(S) subspaces of separable Banach spaces, Stud. Math. 31 (1968) p. 513-522.

[5] A. Pełczynski, Dissertationes, Mat. Razprawy Mat. 58 (1968).
