B. Maurey

Tout opérateur d'une C^*-algèbre dans un espace de cotype 2 se factorise par un Hilbert, d'après G. Pisier

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 21, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1975-1976

TOUT OPERATEUR D'UNE C^*-ALGEBRE DANS UN ESPACE DE COTYPE 2 SE FACTORISE PAR UN HILBERT, d'après G. PISIER

par B. MAUREY

Exposé No XXI

4 Mai 1976

G. Pisier a démontré récemment le théorème suivant :

Théorème : Soient $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre et E un espace de Banach de cotype 2, et supposons que $\mathcal{A}$ ou E vérifie l'hypothèse d'approximation bornée. Alors, tout opérateur linéaire continu de $\mathcal{A}$ dans E se factorise par un espace de Hilbert.

Le résultat de Pisier constitue une nouvelle généralisation du théorème de Grothendieck. Rappelons que le théorème de Grothendieck, sous l'une de ses formes équivalentes, indique que tout opérateur linéaire d'un espace C(K) dans un espace L^1 se factorise par un espace de Hilbert. Une première généralisation a été obtenue en remplaçant L^1 par n'importe quel espace de Banach de cotype 2 (cf. [2] ou [3] exposés 21 et 22), si bien que le résultat de Pisier apparaît comme un passage des C^*-algèbres commutatives au cas général.

Il est peut être bon de rappeler le principe de l'une des démonstrations du fait que tout opérateur d'un C(K) dans un cotype 2 se factorise par un Hilbert (cf. [1] ou [3] exposés 21 et 22), car la démonstration de Pisier suivra exactement les mêmes étapes, convenablement généralisées. Cette démonstration comprend deux étapes :

a) Si F est un espace de Banach quelconque, et E un espace de cotype 2, il existe une constante C telle que tout opérateur linéaire u 4-sommant de F dans E soit en fait 2-sommant, avec :

$$\pi_2(u) \leq C\ \pi_4(u) \quad .$$

Ce premier point est très facile à démontrer (cf. [2] proposition 74). Les ingrédients de la démonstration sont la factorisation de Pietsch et l'inégalité de Khintchine.

b) Si u est un opérateur 2-sommant de C(K) dans un espace de Banach quelconque F, on a l'inégalité :

$$\pi_4(u) \leq \sqrt{\|u\| \cdot \pi_2(u)} \quad .$$

On peut voir ce deuxième résultat comme une propriété d'interpolation. En effet, si u est 2-sommant de C(K) dans F, il existe une probabilité de Radon μ sur K telle que u se prolonge en un opérateur $\bar{u}$ de $L^2(K,\mu)$ dans F, de norme $\|\bar{u}\| = \pi_2(u)$. Alors, l'inégalité de convexité de M. Riesz dit que si u' désigne la restriction de $\bar{u}$ à $L^4(K,\mu)$, on a :

$$\|u'\| \leq \sqrt{\|u\| \ \|\bar{u}\|} \quad ,$$

d'où on déduit immédiatement b).

Bien entendu, une fois établis a) et b), on obtient, si u est un opérateur de rang fini de C(K) dans un espace E de cotype 2 :

$$\pi_2(u) \leq C \ \pi_4(u) \leq C \sqrt{\|u\| \ \pi_2(u)} \quad ,$$

soit encore
$$\pi_2(u) \leq C^2 \ \|u\| \quad .$$

A partir de maintenant, nous supposons donnée une C^*-algèbre $\mathcal{A}$. Nous supposerons que $\mathcal{A}$ est réalisée comme une sous-algèbre fermée (avec la norme induite) de $\mathcal{L}(H)$, l'algèbre des opérateurs linéaires continus d'un certain espace de Hilbert H. Nous supposerons aussi pour simplifier que l'algèbre $\mathcal{A}$ possède une unité, mais cette restriction est facile à lever.

Pisier commence par introduire une notion d'opérateur d'une C^*-algèbre $\mathcal{A}$ dans un Banach, qui généralise la notion d'opérateur p-sommant ($1 \leq p < \infty$) d'un C(K) dans un Banach. Si $(x_1,\ldots,x_n)$ sont des éléments de C(K), on a par convexité :

$$\sup_{\substack{\xi \in M(K) \\ \|\xi\| \leq 1}} \left(\Sigma \ |\langle x_i,\xi\rangle|^p\right)^{1/p} = \sup_{t \in K} \left(\Sigma \ |x_i(t)|^p\right)^{1/p}$$

$$= \|(\Sigma \ |x_i|^p)^{1/p}\|_{C(K)} \quad .$$

Un opérateur u de C(K) dans un espace de Banach F est donc p-sommant s'il existe C tel que :

$$\forall \ (x_1,\ldots,x_n) \in C(K) \qquad \left(\sum_i \ \|u(x_i)\|^p\right)^{1/p} \leq C \ \|(\sum_i \ |x_i|^p)^{1/p}\|_{C(K)} \quad .$$

Par analogie, on dira qu'un opérateur linéaire u de $\mathcal{A}$ dans F est p-C^*-sommant s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie d'éléments <u>hermitiens</u> $(A_1,\ldots,A_n)$ de $\mathcal{Q}$ l'inégalité :

$$(\sum_i \|u(A_i)\|^p)^{1/p} \leq C \,\|(\sum_i |A_i|^p)^{1/p}\|_{\mathcal{Q}}$$

(où la valeur absolue $|A|$ est donnée par $\sqrt{A^*A}$).
La plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée sera notée $C_p(u)$.

La première étape de la démonstration consiste à généraliser la factorisation de Pietsch des opérateurs p-sommants :

<u>Proposition 1</u> : Soit **u** un opérateur linéaire de $\mathcal{Q}$ dans un espace de Banach F. L'opérateur u est p-C^*-sommant, avec $C_p(u) \leq C$, si et seulement si il existe une forme linéaire ≥ 0 f sur $\mathcal{Q}$, avec $\|f\| \leq 1$, telle que :

$$(*)\ \forall A \in \mathcal{Q},\ A \text{ hermitien},\quad \|u(A)\| \leq C(f(|u|^p))^{1/p} \quad .$$

La démonstration suit le schéma habituel. Notons K le convexe $*$-faiblement compact des formes linéaires ≥ 0 de norme ≤ 1 sur $\mathcal{Q}$. Notons aussi que pour un élément hermitien positif A :

$$\|A^p\| = \|A\|^p$$

et

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |(Ax|x)| = \sup\{f(A)\ ;\ f \in K\} \quad .$$

Il en résulte que si $C_p(u) \leq C$, la fonction
$f \rightsquigarrow C^p f(\sum |A_i|^p) - \sum \|u(A_i)\|^p$ a un maximum ≥ 0 sur K pour toute suite $(A_1,\ldots,A_n)$ d'éléments hermitiens de $\mathcal{Q}$. Par le lemme du type minimax habituel, on déduit l'existence de f vérifiant (*). L'implication inverse est comme toujours triviale.

Le point suivant constitue une sorte de généralisation de l'inégalité de Khintchine :

<u>Proposition 2</u> : Soient $A_1,\ldots,A_n$ des éléments hermitiens de $\mathcal{Q}$. On a l'inégalité :

$$\|\int(\sum \varepsilon_i(t)\ A_i)^4 dt\| \leq 3\|\sum_i A_i^2\|^2$$

(où $(\varepsilon_i(t))$ désigne les fonctions de Rademacher).

<u>Démonstration</u> : Soit $x \in H$ tel que $\|x\| \leq 1$. On aura :

$$Z = ((\int(\sum \varepsilon_i(t)A_i)^4 dt)(x) | x) = \int dt((\sum \varepsilon_i(t)A_i)^2 x | (\sum \varepsilon_i(t)A_i)^2 x)$$

$$= \int dt \|\sum A_i^2(x) + \sum_{\substack{i \neq j \\ i<j}} \varepsilon_i(t)\ \varepsilon_j(t)(A_iA_j + A_jA_i)(x)\|^2 \quad .$$

En tenant compte de l'orthogonalité de 1 et des $\varepsilon_i \varepsilon_j$, l'expression précédente devient après intégration :

$$Z = \|\sum A_i^2(x)\|^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ i<j}} \|(A_iA_j + A_jA_i)(x)\|^2$$

$$\leq \|\sum_i A_i^2\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} ((A_iA_j + A_jA_i)^2(x), x) \quad .$$

Pour traiter le second terme, notons que pour tout $B \in \mathcal{L}(H)$:

$$(Bx, B^*x) \leq \sqrt{\|Bx\| \ \|B^*x\|} \leq \frac{1}{2} [(Bx,Bx) + (B^*x, B^*x)] \quad .$$

On en déduit pour l'ordre des opérateurs hermitiens :

$$B^2 + B^{*2} \leq BB^* + B^*B \quad ,$$

d'où
$$(B + B^*)^2 \leq 2(BB^* + B^*B) \quad .$$

Cette inégalité appliquée au second terme ci-dessus donne :

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} ((A_iA_j + A_jA_i)^2(x), x) \leq \sum_{i,j} ((A_iA_j^2A_i + A_jA_i^2A_j)(x), x)$$

$$= 2 \sum_{i,j} (A_iA_j^2A_i\, x, x)$$

$$= 2 \sum_i ((\sum_j A_j^2)A_i\, x, A_i\, x)$$

$$\leq 2\|\sum_j A_j^2\| \sum_i (A_i\, x, A_i\, x) \leq 2\|\sum_i A_i^2\|^2 \quad ,$$

d'où finalement :
$$Z \leq 3 \ \|\sum_i A_i^2\|^2 \quad ,$$

ce qui prouve la proposition 2.

A partir des propositions 1 et 2, on obtient immédiatement l'analogue du point a). Soit E un espace de Banach de cotype 2, et désignons par K la constante telle que l'on ait pour tous $y_1,\dots,y_n$ dans E :

$$\Sigma \|y_i\|^2 \leq K^2 . \int \|\sum_i \varepsilon_i(t)y_i\|^2 dt \quad .$$

<u>Proposition 3</u> : Si u est un opérateur $4\text{-}C^*$-sommant de $\mathcal{a}$ dans E, il est en fait $2\text{-}C^*$-sommant, avec :

$$C_2(u) \leq 3^{1/4}.K.C_4(u) \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Supposons $C_4(u) = 1$ pour simplifier. Soit f une forme linéaire ≥ 0 de norme ≤ 1 telle que :

$\forall$ A hermitien $\in \mathcal{a}$, $$\|u(A)\|^4 \leq f(A^4) \quad .$$

Soient $A_1,\dots,A_n$ des éléments hermitiens de $\mathcal{a}$. Nous aurons :

$$\begin{aligned}(\sum_i \|u(A_i)\|^2)^2 &\leq K^4(\int \|\Sigma\, \varepsilon_i(t)\, u(A_i)\|^2\, dt)^2 \\ &\leq K^4 \int \|u(\sum_i \varepsilon_i(t)A_i)\|^4 dt \leq K^4\, f(\int (\sum_i \varepsilon_i(t)A_i)^4 dt) \\ &\leq K^4 \|\int (\sum_i \varepsilon_i(t)A_i)^4 dt\| \leq 3K^4 \|\sum_i A_i^2\|^2 \quad ,\end{aligned}$$

et la proposition 3 est démontrée.

La proposition suivante donnera l'analogue du point b). L'argument d'interpolation que nous allons développer est probablement bien connu des spécialistes.

<u>Proposition 4</u> : Soient u un opérateur linéaire $2\; C^*$-sommant de $\mathcal{a}$ dans un espace de Banach F, et soit f une forme linéaire ≥ 0 de norme ≤ 1 sur $\mathcal{a}$ telle que pour tout élément hermitien A de $\mathcal{a}$, on ait :

$$\|u(A)\| \leq C\sqrt{f(A^2)} \quad .$$

On a alors pour tout A hermitien :

$$\|u(A)\| \leq \sqrt{C\;\|u\|}\;.\;(f(A^4))^{1/4}$$

d'où l'inégalité : $$C_4(u) \leq \sqrt{\|u\|\, C_2(u)} \quad .$$

Démonstration : Soit A un élément hermitien de $\mathcal{A}$, et soit $\mathcal{B}$ la sous-C^*-algèbre avec unité engendrée par A. On sait que $\mathcal{B}$, étant commutative, s'identifie à un C(K). Plus précisément, il existe un isomorphisme des structures d'algèbre et d'espace de Banach, soit Φ, de $\mathcal{B}$ sur C(K). Moyennant cette identification, la forme linéaire ≥ 0 f induit sur $\mathcal{B} \simeq C(K)$ une mesure ≥ 0 μ de masse ≤ 1, et on a pour tout $B \in \mathcal{B}$ et tout p :

$$f(|B|^p) = \int_K |\Phi(B)(t)|^p d\mu(t) \quad .$$

La restriction $\tilde{u}$ de u à $\mathcal{B}$ vérifie donc :

$$\forall\, B \in \mathcal{B}, \qquad \|\tilde{u}(B)\| \leq C\left(\int |\Phi(B)(t)|^2 \, d\mu(t)\right)^{1/2} \quad ,$$

autrement dit se prolonge en opérateur de norme $\leq C$ sur $L^2(K,\mu)$. D'après l'inégalité de convexité de M. Riesz, $\tilde{u}$ opère avec une norme $\leq \sqrt{\|\tilde{u}\|C}$ sur $L^4(K,\mu)$, donc :

$$\forall\, B \in \mathcal{B}, \qquad \|\tilde{u}(B)\| \leq \sqrt{\|u\|C} \left(\int |\Phi(B)(t)|^4 d\mu(t)\right)^{1/4}$$

$$= \sqrt{\|u\|C}\, (f(B^4))^{1/4} \quad .$$

Prenant $B = A$, on achève la démonstration.

Bien entendu, les analogues de a) et b) permettent d'écrire pour tout opérateur u de $\mathcal{A}$ dans un espace de cotype 2 E :

$$C_2(u) \leq 3^{1/4}\, K\, C_4(u) \leq 3^{1/4}\, K \sqrt{\|u\| C_2(u)} \quad .$$

Si u est de rang fini, on voit facilement que $C_2(u) < \infty$, et ce qui précède fournit :

$$C_2(u) \leq \sqrt{3}\, .\, K^2 \|u\| \quad .$$

Si $\mathcal{A}$ ou E vérifie l'hypothèse d'approximation bornée, on pourra approximer tout opérateur u de $\mathcal{A}$ dans E par un filtre (u_j) d'opérateurs de rang fini tel que $\|u_j\| \leq M \|u\|$ pour tout j.

Si $A_1,\dots,A_n$ sont des éléments hermitiens de $\mathcal{A}$, on écrira :

$$\sum_i \|u(A_i)\|^2 = \lim_j \sum_i \|u_j(A_i)\|^2$$
$$\leq 3K^4 M^2 \|u\|^2 \|\sum_i A_i^2\|^2 ,$$

ce qui démontre le théorème de Pisier (si on remarque que la factorisation de type Pietsch pour un opérateur 2-C^*-sommant u fournit un espace de Hilbert. En effet, $A \to \sqrt{f(A^2)}$, définie pour A hermitien, se prolonge en semi-norme hilbertienne sur $\mathcal{A}$, provenant du produit scalaire :

$$(A|B) = \frac{1}{2}\{f(AB^*) + f(B^*A)\} .$$

Alors l'inégalité $\|u(A)\| \leq C\sqrt{f(A^2)}$ implique que u se factorise par l'espace de Hilbert associé à ce produit scalaire.)

Comme cas particulier intéressant, on obtient un analogue non commutatif d'un théorème de Grothendieck :

<u>Corollaire</u> : Soit H un espace de Hilbert. Tout opérateur linéaire continu de $\mathcal{L}(H)$ dans $N_1(H)$ (l'espace des opérateurs nucléaires de H dans lui-même) se factorise par un espace de Hilbert.♦

Il est probablement important de noter que le théorème de Pisier fournit une forme particulière pour la factorisation d'un opérateur de $\mathcal{A}$ dans un espace de cotype 2 à travers un Hilbert, analogue à la factorisation $C(K) \xrightarrow{i} L^2(K,\mu) \to E$ dans le cas commutatif. Dans le cas où $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{K}(H)$ (espace des opérateurs compacts de H), la représentation prend une forme encore plus concrète. Dans ce cas, les formes positives de norme 1 extrêmales sur $\mathcal{K}(H)$ sont de la forme $A \to (Ax,x)$, avec $x \in H$, $\|x\| = 1$. On en déduit facilement qu'un opérateur linéaire u de $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}(H)$ dans un espace de Banach F est 2-C^*-sommant si et seulement si il existe une probabilité de Radon μ sur la boule unité de H (avec la topologie faible) et une constante C telles que :

$$\forall A \in \mathcal{A},\ A \text{ hermitien},\quad \|u(A)\| \leq C\left(\int \|A(x)\|^2 d\mu(x)\right)^{1/2}$$

ou bien pour un $A \in \mathcal{A}$ quelconque :

♦ ($N_1(H)$ est de cotype 2 d'après [5] prop. 3.2.)

$$\|u(A)\| \leq C\left(\int \frac{1}{2}\{\|Ax\|^2 + \|A^*x\|^2\} d\mu(x)\right)^{1/2} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.L. Krivine, Exposés 22 et 23 du Séminaire Maurey-Schwartz 1973-74.

[2] B. Maurey, Théorèmes de factorisation, Astérisque 11.

[3] Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73.

[4] G. Pisier, Le théorème de Grothendieck dans le cas non commutatif, (en préparation).

[5] N. Tomczak-Jaegermann, St. Math. 50 (1974) 162-182.
