SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. TONGE

**Sur les algèbres de Banach et les opérateurs $p$-sommants**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1975-1976), exp. nº 13, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

# SUR LES ALGEBRES DE BANACH ET LES OPERATEURS p-SOMMANTS

par A. TONGE

Exposé No XIII

10 Février 1976

## § 1. LES ENONCES

Le but de cet exposé est d'établir un lien entre deux classes importantes d'algèbres de Banach et les opérateurs p-sommants.

On conviendra que si R est une algèbre de Banach, alors $\forall$ x, y $\in$ R on a $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$, et que l'unité e d'une algèbre unitaire est de norme 1. Un homomorphisme d'algèbres de Banach est une application linéaire, multiplicative et continue.

On notera $B_E$ la boule unité (munie de la topologie faible étoile) d'un Banach E; $\mathcal{P}(B_E)$ désignera les probabilités de Radon sur $B_E$.

Définissons tout d'abord les algèbres de Banach qui nous intéressent.

Soit X un espace compact (séparé). On note C(X) l'espace des fonctions continues sur X à valeurs complexes, muni de la norme uniforme. Dans tout ce qui suit, on considère C(X) comme algèbre de Banach pour la multiplication ponctuelle.

Définition : On dit que l'algèbre de Banach R est une algèbre uniforme si elle est une sous-algèbre de C(X), où X est un compact. (On ne suppose pas que R est unitaire.)

Soit H un Hilbert (complexe). On va considérer L(H) -l'espace des applications linéaires continues de H dans lui-même muni de la norme habituelle- comme algèbre de Banach. La multiplication sera la composition des opérateurs.

Définition : Soit R une algèbre de Banach. On dit que R est une algèbre d'opérateurs si elle est isomorphe à une sous-algèbre fermée de L(H), où H est un Hilbert. (On ne suppose pas que R a une involution.)

Le résultat le plus important est dû à Varopoulos.

Théorème O [18] : Soit R un espace de type $\mathcal{L}_\infty$ (dans le sens de [9]) muni d'une structure d'algèbre de Banach. Alors, R est une algèbre d'opérateurs.

Nous allons trouver une condition suffisante pour qu'une algèbre de Banach soit une algèbre d'opérateurs, et ceci permettra de donner une démonstration simple du théorème O.

Soit $\varphi$ un élément du dual R' de l'algèbre de Banach R. On définit

$\tilde{\varphi} : R \to R'$ par

$$<\tilde{\varphi}(x), y> \; = \; <\varphi, yx> \quad \forall\, x,y \in R.$$

L'application $\tilde{\varphi}$ est linéaire continue de norme $\leq \|\varphi\|$.

<u>Définition</u> : Soit $1 \leq p < \infty$. On dit que R est une <u>algèbre</u> p-<u>sommante</u> s'il existe une constante $K \geq 1$ telle que pour tout $\varphi \in R'$, l'application $\tilde{\varphi} : R \to R'$ est p-sommante et $\pi_p(\tilde{\varphi}) \leq K\|\varphi\|$ ($\pi_p$ étant la norme p-sommante). R est dite <u>strictement</u> p-<u>sommante</u> si $\pi_p(\tilde{\varphi}) \leq \|\varphi\|$.

Ceci permet d'énoncer les théorèmes suivants.

<u>Théorème 1</u> [13] : Toute algèbre 2-sommante est une algèbre d'opérateurs.

<u>Théorème 2</u> [13] : Soit $1 \leq p < \infty$. Alors toute algèbre strictement p-sommante et <u>unitaire</u> est une algèbre uniforme (et donc commutative).

Il est évident que toute algèbre uniforme unitaire est une algèbre strictement p-sommante $\forall\; 1 \leq p < \infty$.

Le théorème 2 généralise un résultat de Kaijser [8] -et d'ailleurs la démonstration utilise (une modification due à Drury de) son idée principale.

Etant donné le théorème 1, la preuve du théorème 0 devient facile.

<u>Démonstration du théorème 0</u> : On sait que le dual d'une algèbre de Banach de type $\mathcal{L}_\infty$ est un espace de type $\mathcal{L}_1$ [10], et d'après [9, p. 289] toute application linéaire continue d'un espace $\mathcal{L}_\infty$ dans un espace $\mathcal{L}_1$ est 2-sommante. On en déduit que R est une algèbre 2-sommante.

D'après le théorème de Pietsch, R est une algèbre 2-sommante s'il existe $K \geq 1$ telle que pour tout $\varphi \in R'$, $\tilde{\varphi}$ se factorise suivant

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "u"'] & R' \\ C \arrow[r, "v"'] & H \arrow[u, "w"'] \end{tikzcd}$$

où C est un espace C(X), H est un Hilbert et u, v, w sont des applications linéaires continues telles que $\|u\| \cdot \|v\| \cdot \|w\| \leq K\|\varphi\|$.

Il n'est pas sans intérêt de se demander ce qui se passe s'il existe $K \geq 1$ telle que pour tout $\varphi \in R'$, $\tilde{\varphi}$ se factorise suivant

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dr, "u"'] & & R \\ & H \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

où H est un Hilbert et u, v sont des applications linéaires continues telles que $\|u\| . \|v\| \leq K \|\varphi\|$.

<u>Définition</u> : $\tilde{\varphi}$ est dite hilbertienne si elle se factorise suivant le diagramme ci-dessus, et on note $\|\tilde{\varphi}\|_{\mathcal{H}} = \inf \{\|u\| . \|v\|\}$, la borne inférieure étant prise sur toute factorisation de ce type.

<u>Définition</u> : L'algèbre de Banach R est dite <u>hilbertienne</u> s'il existe $K \geq 1$ telle que pour tout $\varphi \in R'$ on ait $\|\tilde{\varphi}\|_{\mathcal{H}} \leq K \|\varphi\|$.

On verra plus tard le

<u>Théorème 3</u> [3] : Toute algèbre d'opérateurs est une algèbre hilbertienne.

Il est facile de voir que tout Hilbert H muni d'une structure d'algèbre de Banach est une algèbre d'opérateurs. Explicitement, l'action de H sur $H \oplus_{\ell^2} \mathbb{C}$ définie par

$$h . (k + \lambda) = kh + \lambda h$$

donnera une représentation. On trouve dans [3] l'exemple suivant d'une multiplication (associative !) sur $\ell^2$ :

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j e_j\right) \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} y_j e_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j\right) e_0 \quad .$$

Il est évident que $\ell^2$ n'est pas une algèbre 2-sommante pour cette multiplication. D'autre part, on ne connaît pas un seul exemple d'une algèbre hilbertienne qui n'est pas une algèbre d'opérateurs.

Dans le théorème 3, il suffit de supposer que l'algèbre a une unité approchée (bornée par 1) pour prouver que $\|x\|^2 = \|x^2\| \;\forall\, x \in R$. D'autre part, il est facile de voir que $\ell^1$ est une algèbre strictement 1-sommante pour la multiplication ponctuelle $[(x_j).(y_j) = (x_j\ y_j)]$.

Malheureusement, on connaît très peu d'exemples non triviaux d'algèbres 2-sommantes. Il est clair que toute algèbre uniforme est une algèbre 2-sommante ; il est facile de voir que $L^p(T)$ $(2 \leq p \leq \infty)$, muni de la convolution, est une algèbre 2-sommante [car, si $2 \leq p < \infty$, toute $\tilde{\varphi}$ se factorise suivant $L^p(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T}) \to L^{p'}(\mathbb{T})$ ].

La définition des algèbres p-sommantes paraît peut-être un peu artificielle. Cependant, si on considère la multiplication sur une algèbre de Banach R comme une application linéaire $M : R \otimes R \to R$, on voit que nos algèbres sont précisément celles pour lesquelles M est continue lorsque $R \otimes R$ est muni de certaines $\otimes$-normes de Saphar [12] et Chevet [4]. Voir [13] pour plus de détails.

## § 2. L'HISTOIRE DU SUJET ET QUELQUES PROBLEMES OUVERTS

Définition : Une Q-algèbre est une algèbre de Banach qui est isomorphe à un quotient (par un idéal fermé) d'une algèbre uniforme.

Il était une fois, Varopoulos posa la

Question 1 : Peut-on trouver une algèbre de Banach commutative qui n'est pas une Q-algèbre ?

Un beau jour, Wermer [18] répondit "Oui". Son exemple fut $\ell^1(\mathbb{Z})$ muni de la convolution. Sa démonstration utilisa le théorème sur les représentations bornées d'un groupe abélien (cité dans l'exposé précédent) et un résultat fondamental dû à Cole.

Théorème (Cole [18]) : Un quotient d'une algèbre uniforme (par un idéal fermé) est isométriquement isomorphe à une sous-algèbre fermée d'un L(H).

En fait, ce théorème admet la généralisation suivante.

Théorème (Lumer [11]) : Un quotient d'une algèbre d'opérateurs (par un idéal fermé) est une algèbre d'opérateurs.

Ce fut un lemme de Craw qui permit de faire avancer la théorie des Q-algèbres.

<u>Lemme de Craw</u> (Craw [6]) (Version isométrique) : Une algèbre de Banach commutative R est un quotient d'une algèbre uniforme si et seulement si quels que soient l'ensemble fini $\{x_1,\dots,x_N\}\subset B_R$ et le polynôme $p(z_1,\dots,z_n)$ sans terme constant, on a

$$\|p(x_1,\dots,x_N)\|_R \le \sup\{|p(z_1,\dots,z_N)| : |z_n|\le 1,\ 1\le n\le N\} .$$

D'après ce lemme, le résultat de Wermer concernant $\ell^1(\mathbb{Z})$ devient évident. Aussi, il inspira Davie à trouver un critère très utile. Il nous faut quelques notations. Soit p un entier positif. On notera $K_p$ l'ensemble $\{1,2,\dots,p\}$ muni de la topologie discrète, et $K_p^N$ le produit $K_p\times\dots\times K_p$ de N facteurs.

<u>Théorème</u> (Davie [6]) : Soit R une algèbre de Banach commutative. Alors, R est une Q-algèbre si et seulement s'il existe une constante $K>0$ telle que quels que soient les entiers positifs N et p, la fonction $a\in C(K_p^N)$ et les éléments $\{x_1,\dots,x_p\}\subset B_R$, on a

$$\Big\|\sum_{\beta\in K_p^N} a(\beta)x_{\beta_1}\dots x_{\beta_N}\Big\|_R \le K^N \|a\|_{\ell_p^1\check{\otimes}\dots\check{\otimes}\ell_p^1}$$

$$= K^N \sup\{\Big|\sum_{\beta\in K_p^N} a(\beta)\, f_1(\beta_1)\dots.f_N(\beta_N)\Big| \mid f_n\in C(K_p), \|f_n\|_\infty\le 1\}$$

[$\check{\otimes}$ signifie le produit tensoriel injectif].

Davie utilisa son critère pour donner plusieurs exemples des Q-algèbres. Par exemple, $C^{(r)}[0,1]$, l'espace des fonctions r fois continûment dérivables sur [0,1], muni de la multiplication ponctuelle et de la norme habituelle, et $\ell^p$ $(1\le p\le 2)$, muni de la multiplication ponctuelle, sont des Q-algèbres. Varopoulos [15] en déduisit par un processus d'interpolation que les $\ell^p$ $(1\le p\le\infty)$ sont des Q-algèbres.

Une version non-commutative du lemme de Craw fut un outil essentiel dans la démonstration du :

Théorème V (Varopoulos [17]) : Soit R une algèbre de Banach. Alors R est une algèbre d'opérateurs si et seulement s'il existe une constante $K > 0$ telle que, si on fixe

(i) $\varphi \in B_{R'}$

(ii) E, un sous-ensemble fini de $B_R$

(iii) M, un entier positif

et (iv) $\varepsilon > 0$,

on puisse choisir

(a) un Hilbert H

(b) h, $k \in B_H$

et (c) des applications $L_1, \ldots, L_M : E \to L(H)$ satisfaisant à

$$\|L_m(x) \leq K\|x\| \quad \forall\, x \in E$$

et $$|\langle\varphi, x_1 \ldots . x_M\rangle - \langle L_1(x_1) \circ \ldots \circ L_M(x_M)h, k\rangle| < \varepsilon$$

pour tout M-uple $(x_1, \ldots, x_M)$ d'éléments de E.
[Les applications $L_1, \ldots, L_M$ ne sont pas nécessairement linéaires.]

Je donne ici une version légèrement généralisée du théorème dans [17]. La démonstration est la même.

Varopoulos utilisa le théorème V pour démontrer son théorème O.

Revenons aux Q-algèbres. Nous avons vu qu'on peut trouver des algèbres de Banach commutatives qui ne sont pas des Q-algèbres. Davie suggéra la

Question 2 : Est-ce que toute algèbre d'opérateurs commutative est une Q-algèbre ?

Soient $T_1$, $T_2$ deux contractions linéaires sur un Hilbert H telles que $T_1T_2 = T_2T_1$. Or, d'après un théorème fameux de von Neumann (voir [7]), on sait que pour tout polynôme p d'une variable complexe on a

$$\|p(T_1)\|_{L(H)} \leq \sup\{|p(z)| : |z| \leq 1\} \quad .$$

Cette inégalité fut généralisée par Ando (voir [7]) qui démontra que pour tout polynôme p de deux variables complexes on a

$$\|p(T_1,T_2)\| \leq \sup\{|p(z_1,z_2)| : |z_1| \leq 1,\ |z_2| \leq 1\} \quad .$$

Il est naturel de se demander si l'on peut généraliser ces inégalités aux polynômes en plusieurs variables. D'après le lemme de Craw, une telle généralisation permettrait de répondre "oui" à la question 2.

Si $T_1,\ldots,T_N$ sont des contractions linéaires sur un Hilbert, on sait, d'après l'inégalité de Grothendieck que

$$\|\Sigma\, a_{ij}\, T_i\, T_j\|_{L(H)} \leq 2\mathrm{sh}\ \frac{\pi}{2}\ \sup\{|\Sigma\, a_{ij}\, s_i\, t_j| : |s_i| \leq 1,\ |t_j| \leq 1\} \quad .$$

C'est précisément la condition de Davie pour les polynômes homogènes de degré 2.

On est donc tenté de croire que toute algèbre d'opérateurs commutative est une Q-algèbre. Malheureusement, c'est faux. Varopoulos [16] démontra que l'inégalité de von Neumann n'admet pas la généralisation nécessaire ; on peut même trouver trois contractions linéaires commutantes, $T_1$, $T_2$, $T_3$, sur un Hilbert H de dimension 5 telles que

$$\|T_1T_2T_3 - T_1^3 - T_2^3 - T_3^3\|_{L(H)} > \sup\{|z_1z_2z_3 - z_1^3 - z_2^3 - z_3^3| : |z_i| \leq 1\} \quad .$$

Voir [5] pour les détails. On trouve un autre contre-exemple simple dans [16].

Cependant, le problème suivant reste ouvert.

<u>Problème 1</u> : Soit R une algèbre de Banach commutative qui est de type $\mathcal{L}_\infty$ (en tant qu'espace de Banach). Est-elle une Q-algèbre ?

On peut même se poser une question plus général :

<u>Problème 2</u> : Soit R une algèbre 2-sommante commutative. Est-elle une Q-algèbre ?

Le problème 2 est lié au sujet de la thèse de Charpentier. Il démontre le

<u>Théorème</u> (Charpentier [2]) : Toute algèbre 1-sommante commutative est une Q-algèbre.

Varopoulos [14,15] étudia une classe d'algèbres de Banach encore plus petite : les algèbres injectives.

Définition : L'algèbre de Banach R est une algèbre injective si la multiplication $M : R \otimes R \to R$ est continue lorsque $R \otimes R$ est muni de la norme injective, $\otimes$.

En termes des applications $\tilde{\varphi}$, une algèbre de Banach est une algèbre injective si toutes les $\tilde{\varphi}$ sont des applications intégrales (avec contrôle de la norme).

Théorème (Varopoulos [14]) : Soit R une algèbre de Banach commutative. Alors R est une algèbre injective si et seulement s'il existe une algèbre uniforme U, un épimorphisme $\pi : U \to R$ et une application linéaire continue $L : R \to U$ tels que $\pi \circ L = Id_R$ , c-à-d $\forall\ x \in R$,

$$\pi(L(x)) = x \quad .$$

Pour terminer, nous offrons un troisième problème.

Soit E un espace de Banach. On dira que E a la propriété OP si, lorsqu'on munit E d'une structure d'algèbre de Banach quelconque, E doit être une algèbre d'opérateurs. On a vu que tout espace de type $\mathcal{L}_\infty$ a la propriété OP ; de même pour les espaces de type $\mathcal{L}_2$. On ne connaît pas d'autres exemples des espaces de Banach qui ont la propriété OP.

Problème 3 [17] : Est-il vrai que tout espace de type $\mathcal{L}_p$ $(2 \leq p \leq \infty)$ a la propriété OP ?

Il serait intéressant de savoir si l'algèbre du disque A(D) a la propriété OP. Un problème voisin est la caractérisation des espaces de Banach R pour lesquelles toute application linéaire continue de R dans R' est 2-sommante.

## § 3. LES DEMONSTRATIONS

Rappelons le

Théorème 1 : Toute algèbre 2-sommante est une algèbre d'opérateurs.

Dans [13], on peut trouver une démonstration basée sur la caractérisation des algèbres d'opérateurs (théorème V). Nous préférons donner une démonstration directe, due à Maurey, qui utilise le théorème de point fixe ci-dessous.

Théorème KF (Ky Fan, cf. [1, p. 259]) : Soit $\Gamma$ une application multivoque d'un compact convexe X dans lui-même, à valeurs convexes compactes non-vides, dont le graphe $\{(x,t) : x \in X,\ t \in \Gamma(x)\}$ est fermé dans $X \times X$. Alors $\exists\ x_o \in X$ t.q. $x_o \in \Gamma(x_o)$.

Démonstration du théorème 1 : Soit R l'algèbre 2-sommante ; supposons que $\pi_2(\widetilde{\varphi}) \leq K\|\varphi\|\ \forall\ \varphi \in R'$. On a le droit de supposer que R est unitaire (puisqu'une sous-algèbre fermée d'une algèbre d'opérateurs est une algèbre d'opérateurs, et , aisément, $R \oplus_{\ell^1} \mathbb{C}$, muni de sa structure habituelle d'algèbre de Banach [2, p. 15] est une algèbre 2-sommante unitaire).

(a) On va démontrer qu'il existe un Hilbert H et un homomorphisme $T : R \to L(H)$ de norme $\leq K$.

On sait que si $\varphi \in B_{R'}$, alors pour tout ensemble fini $\{x_1,\ldots,x_N\} \subset R$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \|\widetilde{\varphi}(x_n)\|^2 \leq K^2 \sup_{\psi \in B_{R'}} \sum_{n=1}^{N} |\langle \psi, x_n \rangle|^2 \quad .$$

Soit $\mu$ une probabilité de Radon sur $B_{R'}$. Alors

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{N} \int_{B_{R'}} \|\widetilde{\varphi}(x_n)\|^2 d\mu(\varphi) \leq K^2 \sup_{\psi \in B_{R'}} \sum_{n=1}^{N} |\langle \psi, x_n \rangle|^2 \quad .$$

Soit l'application linéaire $F : R \to L^2(B_{R'},\mu;R')$ définie par

$$F(x) : B_{R'} \to R' \ ;\ \varphi \to \widetilde{\varphi}(x) \quad .$$

En réécrivant (*) sous la forme

$$(**) \qquad \sum_{n=1}^{N} \|F(x_n)\|^2 \leq K^2 \sup_{\psi \in B_{R'}} \sum_{n=1}^{N} |\langle \psi, x_n \rangle|^2 \quad ,$$

on s'aperçoit que F est un opérateur 2-sommant et que $\pi_2(F) \leq K$. D'après le théorème de Pietsch, $\exists$ une famille $\Gamma(\mu)\subset \mathcal{P}(B_{R'})$ telle qu'on ait $\forall\ x\in R$, $\forall\ \nu\in\Gamma(\mu)$,

$$\int_{B_{R'}} \|\tilde{\varphi}(x)\|^2 d\mu(\varphi) \leq K^2 \int_{B_{R'}} |<\varphi,x>|^2 d\nu(\varphi) \quad .$$

On voit que l'application multivoque $\Gamma : \mathcal{P}(B_{R'})\to\mathcal{P}(B_{R'})$ ; $\mu\to\Gamma(\mu)$ satisfait aux hypothèses du théorème KF, ce qui permet de déduire qu'il existe $\omega\in\mathcal{P}(B_{R'})$ telle que

$$\forall\ x\in R, \qquad \int_{B_{R'}} \|\tilde{\varphi}(x)\|^2\ d\omega(\varphi) \leq K^2 \int_{B_{R'}} |<\varphi,x>|^2\ d\omega(\varphi) \quad ,$$

d'où

$$(***)\quad \forall\ x\in R,\ \forall\ y\in B_R\ , \quad \int_{B_{R'}} |<\varphi,yx>|^2\ d\omega(\varphi) \leq K^2 \int_{B_{R'}} |<\varphi,x>|^2\ d\omega(\varphi)\ .$$

Lorsque $x\in R$, on note $f_x\in C(B_{R'})$ la fonction $f_x(\psi) = <\psi,x>$. Soit H la fermeture dans $L^2(\omega)$ de $\{f_x : x\in R\}$ ; H est un Hilbert. Définissons $T : R\to L(H)$ par $T(z)f_x = f_{zx}$ . Aisément, T est un homomorphisme, et, d'après (***), $\|T\|\leq K$. Ceci achève la partie (a).

(b) On va montrer qu'à chaque $y\in R$ on peut associer un Hilbert $H_y$ et un homomorphisme $T_y : R\to L(H_y)$ de norme $\leq K\sqrt{2}$ tel que $\|T_y(y)\|\geq \|y\|/\sqrt{2}$.

Fixons donc $y\in R$. On sait qu'il existe $\eta\in B_{R'}$ tel que $<\eta,y> = \|y\|$. Soit $\mathcal{P}_y = \frac{1}{2}\ \delta_\eta + \frac{1}{2}\ \mathcal{P}(B_{R'})\subseteq\mathcal{P}(B_{R'})$ ; $\mathcal{P}_y$ est un compact convexe. Conservant les notations de (a), si $\lambda = \frac{1}{2}\ \delta_\eta + \frac{1}{2}\ \mu$, et si $\nu\in\Gamma(\lambda)$, alors

$$\forall\ x\in R, \qquad \int_{B_{R'}} \|\tilde{\varphi}(x)\|^2\ d\lambda(\varphi) \leq K^2 \int_{B_{R'}} |<\varphi,x>|^2\ d\nu(\varphi)$$

$$\leq 2K^2 \int_{B_{R'}} |<\varphi,x>|^2\ d(\tfrac{1}{2}\ \delta_\eta + \tfrac{1}{2}\ \nu)(\varphi) \quad .$$

Définissons alors $\Gamma'(\lambda) = \frac{1}{2}\ \delta_\eta + \frac{1}{2}\ \Gamma(\lambda)$. $\Gamma'$ est une application multivoque de $\mathcal{P}_y$ dans lui-même satisfaisant aux hypothèses du théorème KF. Il existe donc $\omega_y\in\mathcal{P}_y$ t.q.

$$\forall\ x\in R, \qquad \int_{B_{R'}} \|\tilde{\varphi}(x)\|^2\ d\omega_y(\varphi) \leq 2K^2 \int_{B_{R'}} |<\varphi,x>|^2\ d\omega_y(\varphi)$$

(d'où $\forall\ x\in R$, $\forall\ z\in B_R$ , $\int_{B_{R'}} |<\varphi,zx>|^2\ d\omega_y(\varphi) \leq 2K^2 \int_{B_{R'}} |<\varphi,x>|^2\ d\omega_y(\varphi)$ )

et $$\int_{B_{R'}} |\langle\varphi,y\rangle|^2 \, d\omega_y(\varphi) \geq \frac{1}{2} \|y\|^2 \quad .$$

Par conséquent, si $H_y$ est la fermeture dans $L^2(\omega_y)$ de $\{f_x : x \in R\}$ et si $T_y : R \to L(H_y)$ est définie par

$$T_y(z)\, f_x = f_{zx} \quad ,$$

alors on a $$\|T_y\| \leq K\sqrt{2}$$

et $$\|T_y(y)\| \geq \|T_y(y)\| \, \|f_e\| \geq \|T_y(y) f_e\| = \|f_y\| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|y\| \quad .$$

(c) Pour terminer, on définit $H = \bigoplus_{y \in R} H_y$ et $T : R \to L(H)$ par

$$T(x)((h_y)_{y \in R}) = (T_y(x) h_y)_{y \in R} \quad .$$

On voit aussitôt que T est un homomorphisme et que

$\forall\, x \in R,$ $$\frac{1}{\sqrt{2}} \|x\| \leq \|T(x)\| \leq K\sqrt{2}\, \|x\| \quad ,$$

ce qui permet de conclure.

Le théorème suivant sert à faire un sandwich d'algèbres d'opérateurs.

Théorème 3 [3] : Toute algèbre d'opérateurs est une algèbre hilbertienne.

C'est une conséquence de l'inégalité de Grothendieck et du Théorème LP [9, p. 294] : Soient E, F deux espaces de Banach et $u : E \to F$ une application linéaire continue. Alors u est hilbertienne et $\|u\|_{\mathcal{H}} \leq K$ si $\forall\, N \in \mathbb{Z}^+$, $\forall\, (a_{ij})_{i,j=1}^N$, $\forall\, \{e_1,\dots,e_N\} \subset B_E$, $\forall\, \{f'_1,\dots,f'_N\} \subset B_{F'}$, on a

$$\Big|\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \langle u(e_i), f'_j\rangle\Big| \leq K \sup_{\substack{|s_i| \leq 1 \\ |t_j| \leq 1}} \Big|\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, s_i\, t_j\Big| \quad .$$

Démonstration du théorème 3 : Soit R une sous-algèbre fermée de L(H). Soient $h, k \in B_H$ ; notons $h \otimes k$ l'élément de $B_{R'}$ défini par

$$\langle h \otimes k, x\rangle = \langle xh, k\rangle \quad \forall\, x \in R \quad .$$

Il suffit de montrer que $\|h \widetilde{\otimes} k\|_{\mathcal{H}} \leq K \; \|(h \otimes k)\|$. (Puisque $L(H) = (H \hat{\otimes} H)'$).
Fixons $\{x_1,\dots,x_N\} \subset B_R$ et $\{y_1,\dots,y_N\} \subset B_R$. Alors

$$\begin{aligned} |\Sigma\, a_{ij} <(h \widetilde{\otimes} k)x_i, y_j>| &= |\Sigma\, a_{ij} <y_j\, x_i\, h, k>| \\ &= |\Sigma\, a_{ij} <x_i h, {}^t y_j k>| \qquad ({}^t y_j \text{ est la transposé de } y_j) \\ &\leq 2\mathrm{sh}\, (\tfrac{\pi}{2}) \sup_{\substack{|s_i|\leq 1 \\ |t_j|\leq 1}} |\Sigma\, a_{ij}\, s_i\, t_j| \quad , \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Grothendieck. Le théorème LP entraîne que R est une algèbre hilbertienne.

Comme dessert, nous offrons le

<u>Théorème 2</u> [13] : Toute algèbre strictement p-sommante ($1 \leq p < \infty$) et unitaire est une algèbre uniforme.

<u>Démonstration</u> : Nous allons montrer que tout point extrêmal de la boule unité du dual est (un multiple de module 1 d') un élément du spectre de l'algèbre. C'est une idée due essentiellement à Kaijser [8].

Soit R notre algèbre ; soit $\varphi \in B_{R'}$. On sait que $\pi_p(\widetilde{\varphi}) \leq \|\varphi\|$, et d'après le théorème de Pietsch, $\exists\, \mu \in \mathcal{P}(B_{R'})$ t.q.

$$\forall\, x \in R \,, \qquad \|\widetilde{\varphi}(x)\| \leq \pi_p(\widetilde{\varphi}) \Big[\int_{B_{R'}} |<\psi, x>|^p \, d\mu(\psi)\Big]^{1/p} \quad .$$

Nous allons exprimer cette inégalité suivant un diagramme commutatif.
Soit $x \in R$. Notons, comme d'habitude, $f_x \in C(B_{R'})$ la fonction $f_x(\psi) = <\psi, x>$ ; soit $\Lambda_p$ la fermeture dans $L^p(\mu)$ de $\{f_x : x \in R\}$ ; et soit $I : R \to \Lambda_p$ l'application canonique $x \to f_x$. Alors le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[dr, "I"'] & & R' \\ & \Lambda_p \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

($\Phi$ étant une application linéaire de norme $\pi_p(\widetilde{\varphi})$).
Or, pour tout $x, y \in R$, on a

$$<\varphi, xy> = <\widetilde{\varphi}(y), x> = <\Phi I(y), x> = <I(y), {}^t\Phi(x)>$$

où ${}^t\Phi : R'' \to (\Lambda_p)'$ est la transposée de $\Phi$. $(\Lambda_p)'$ étant un quotient de $L^{p'}(\mu)$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1)$, on peut trouver un représentant $B_x \in L^{p'}(\mu)$ de ${}^t\Phi(x)$ tel que $\|B_x\|_{L^{p'}} = \|{}^t\Phi(x)\|_{(\Lambda_p)'} \leq \pi_p(\tilde{\varphi})\,\|x\|$.

Par conséquent

$$<\varphi, xy> = \int_{B_{R'}} <\psi, y> B_x(\psi)\, d\mu(\psi)$$

et si e est l'unité de R,

$$<\varphi, y> = \int_{B_{R'}} <\psi, y> B_e(\psi)\, d\mu(\psi)$$

ou, pour abréger,

$$\varphi = \int_{B_{R'}} \psi\, B_e(\psi)\, d\mu(\psi) \quad .$$

Supposons maintenant que $\varphi$ est un point extrêmal de $B_{R'}$ et que $B_{R'} = S_1 \cup S_2$, où $S_1$ et $S_2$ sont deux ensembles $\mu$-mesurables disjoints. Posons $\varphi_i = \int_{S_i} \psi\, B_e(\psi)\, d\mu(\psi)$ $(i = 1,2)$. Evidemment $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ et $\|\varphi_i\|_{R'} \leq \int_{S_i} |B_e(\psi)|\, d\mu(\psi)$. En fait, $\|\varphi_i\| = \mu(S_i)$, car

$$1 = \|\varphi\| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\| \leq \|B_e\|_{L^1(\mu)} \leq \|B_e\|_{L^{p'}(\mu)} \leq \|e\| = 1 \quad ,$$

d'où $1 = \|B_e\|_{L^1} = \|B_e\|_{L^{p'}}$, ce qui entraîne que $|B_e(\psi)| = 1$ $\mu$-p.p. (puisque $p' > 1$). Donc

$$\|\varphi_i\| = \int_{S_i} |B_e(\psi)|\, d\mu(\psi) = \mu(S_i) \quad .$$

D'après l'hypothèse que $\varphi$ est un point extrêmal de $B_{R'}$, on a

$$\int_{S_i} \varphi\, d\mu(\psi) = \int_{S_i} \psi\, B_e(\psi)\, d\mu(\psi)$$

et on en déduit que $\varphi = \psi\, B_e(\psi)$ $\mu$-p.p.

Par conséquent, $<\varphi,e><\varphi,xy> = <\varphi,e>\int_{B_{R'}} <\psi,y>B_x(\psi)\,d\mu(\psi)$

$$= \int_{B_{R'}} <\psi,e>B_e(\psi)\,<\psi,y>B_x(\psi)\,d\mu(\psi)$$

$$= \int_{B_{R'}} <\psi,e><\varphi,y>B_x(\psi)\,d\mu(\psi)$$

$$= <\varphi,x><\varphi,y> \quad .$$

On voit aussitôt que $|<\varphi,xy>| = |<\varphi,x>|\;|<\varphi,y>|$ , et donc que $|<\varphi,x^n>| = |<\varphi,x>|^n$. Ceci implique que $\|x\|^n = \|x^n\|$, d'où le rayon spectral $\rho(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \|x\|$. D'après [2, p. 76], R est commutative, et, la transformée de Guelfand étant une isométrie, R doit être une algèbre uniforme.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] Berge, C. : Espaces topologiques. Dunod (1959).

[2] Charpentier, Ph. : Q-algèbres et produits tensoriels topologiques. Thèse, Orsay (1973).

[3] Bonsall, F.F. and Duncan, J. : Complete normed algebras. Springer (1973).

[4] Chevet, S. : Sur certains produits tensoriels topologiques d'espaces de Banach. Z. Wahr. Verw. Geb. 11 (1969).

[5] Crabb, M.J. and Davie, A.M. : Von Neumann's inequality for Hilbert space operators. Bull. London Math. Soc. 7 (1975), 49-50.

[6] Davie, A.M. : Quotient algebras of uniform algebras. J. London Math. Soc. 7 (1973), 31-40.

[7] Foias, C. and Nagy, B. Sz. : Harmonic analysis of operators on Hilbert space. North Holland (1970).

[8] Kaijser, S. : Some remarks on injective Banach algebras. Uppsala University, Dept. Math., Report No 1975:10.

[9] Lindenstrauss, J. and Pełczyński, A. : Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications. Studia Math. 29 (1968), 275-326.

[10] Lindenstrauss, J. and Rosenthal, H.P. : The $\mathcal{L}_p$-spaces. Israel J. Math. 7 (1969), 325-349.

[11] Lumer, G. : Etats, algèbres quotients et sous-espaces invariants. Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, Série A 274 (1972), 1308-1311.

[12] Saphar P. : Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linéaires. Studia Math. 38 (1970), 71-100.

[13] Tonge, A.M. : Banach algebras and absolutely summing operators, à paraître, Math. Proc. Camb. Phil. Soc.

[14] Varopoulos, N. Th. : Sur les équations d'algèbres uniformes. Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 274 (1972), 1344-1346.

[15] Varopoulos, N. Th. : Some remarks on Q-algebras. Ann. Inst. Fourier 22 (1972), 1-11.

[16] Varopoulos, N. Th. : On an inequality of von Neumann and an application of the theory of tensor products to operators theory. J. Funct. Anal. 16 (1974), 83-100.

[17] Varopoulos, N. Th. : A theorem on operators algebras. Math. Scand. 37 (1975), 173-182.

[18] Wermer, J. : Quotient algebras of uniform algebras. Symposium on function algebras and rational approximation. Univ. of Michigan (1969).

------