B. MAUREY

Projections dans L^1, d'après L. Dor

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 21, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A20_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

PROJECTIONS DANS L^1, D'APRES L. DOR

par B. MAUREY

Exposé N° XXI

30 Avril 1975

Nous allons démontrer le théorème suivant, dû à L. Dor [1] :

Théorème : Il existe une constante $C > 1$ possédant la propriété suivante : soient (Ω,μ) un espace mesuré quelconque, et F un sous-espace fermé de $L^1(\Omega,\mu)$. S'il existe un espace mesuré (X,ν) tel que F soit isomorphe à $L^1(X,\nu)$, avec $d(F,L^1(X,\nu)) < C$, il existe une projection linéaire continue P de $L^1(\Omega,\mu)$ sur F.

Dor montre que $C \geq \sqrt{2}$, dans le cas complexe, et $C \geq 8/5$ dans le cas réel. Nous nous contenterons de montrer que $C \geq 4/3$, et nous renvoyons à l'article de Dor pour les estimations plus précises.

Nous noterons simplement L^1 l'espace $L^1([0,1],dt)$.

La construction de projections dans L^1 utilise le plus souvent des variantes du lemme évident suivant :

Lemme 1 : Soient $(f_1,\dots,f_n)$ des fonctions à supports disjoints dans L^1 (c'est-à-dire que l'ensemble $\{|f_i| > 0\} \cap \{|f_j| > 0\}$ est négligeable pour $i \neq j$). Il existe une projection linéaire de norme 1 de L^1 sur l'espace $[f_1,\dots,f_n]$ engendré par les (f_i).

Le cas des fonctions à supports disjoints est trop restrictif pour beaucoup d'applications.
Soit $\delta \in]0,1[$. Nous dirons que des éléments $(f_1,\dots,f_n)$ de L^1 ont des supports disjoints à δ près s'il existe des ensembles mesurables disjoints $A_1,\dots,A_n$ tels que :

$$\int_{A_i} |f_i(t)|\, dt \geq (1-\delta) \int_0^1 |f_i(t)|\, dt$$

Dans le cas $0 < \delta < \frac{1}{2}$, on peut encore trouver une projection de L^1 sur $[f_1,\dots,f_n]$:

Lemme 2 : (cf. par exemple [3]) Soient δ tel que $0 < \delta < \frac{1}{2}$, et $(f_1,\dots,f_n)$ des éléments de L^1 à supports disjoints à δ-près. Il existe une projection linéaire Q de L^1 sur $[f_1,\dots,f_n]$ telle que $\|Q\| \leq (1-2\delta)^{-1}$.

<u>Démonstration</u> : Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles disjoints tels que

$\int_{A_i} |f_i(t)| \, dt \geq (1-\delta) \int_0^1 |f_i(t)| \, dt$.

Nous pouvons supposer que $\int_0^1 |f_i(t)| \, dt = 1$ pour tout $i = 1,2,\dots,n$.
Posons

$$f_i^* = \chi_{A_i} f_i \quad , \quad \tilde{f}_i = \|f_i^*\|^{-1} f_i^*$$

Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ des scalaires. Nous aurons

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\Sigma \alpha_i f_i(t)| \, dt &\geq \int_0^1 |\Sigma \alpha_i f_i^*(t)| \, dt - \int_0^1 |\Sigma \alpha_i (f_i - f_i^*)(t)| dt \\ &\geq \Sigma |\alpha_i| \, \|f_i^*\| - \sup_i \|f_i - f_i^*\| \, \Sigma |\alpha_i| \\ &\geq (1-2\delta) \, \Sigma |\alpha_i| \end{aligned}$$

Choisissons pour chaque i une fonction h_i à support dans A_i, telle que :

$$|h_i| \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \|f_i^*\| = \int_{A_i} |f_i(t)| \, dt = \langle f_i, h_i \rangle$$

Définissons un opérateur linéaire P de L^1 dans lui-même par :

$$Px = \Sigma \langle x, h_i \rangle \tilde{f}_i$$

On aura :

$$\begin{aligned} \|Px\| &= \Sigma \, |\langle x, h_i \rangle| \\ &= \sup_{|\varepsilon_i|=1} \langle x, \Sigma \varepsilon_i h_i \rangle \leq \|x\| \end{aligned}$$

Posons $F = [f_1, \dots, f_n]$ et définissons un opérateur linéaire U de F dans L^1 de la façon suivante :

Si $x = \Sigma\, \alpha_i f_i$, $\qquad Ux = \Sigma\, \alpha_i f_i^*$

On a :

$$\|Ux\| \geq (1-\delta)\, \Sigma\, |\alpha_i| \geq (1-\delta)\, \|x\|$$

On a d'autre part, si $x = \Sigma\, \alpha_i f_i$:

$$\begin{aligned}
\|Px - Ux\| &= \| \Sigma < x, h_i > \tilde{f}_i - \Sigma\, \alpha_i \|f_i^*\|\, \tilde{f}_i \| \\
&= \| \Sigma < x - \alpha_i f_i\,,\, h_i > \tilde{f}_i \| \\
&= \Sigma\, | < x - \alpha_i f_i\,,\, h_i > | \\
&= \sum_i \varepsilon_i < \sum_{j \neq i} \alpha_j f_j\,,\, h_i >
\end{aligned}$$

pour un choix convenable de scalaires (ε_i) de module 1

$$= \sum_j \alpha_j < f_j\,,\, \sum_{i \neq j} \varepsilon_i h_i > \;\leq\; \delta\, \Sigma\, |\alpha_i| \leq \frac{\delta}{1-\delta} \|Ux\|$$

On a donc pour $x \in F$:

$$\|Px\| \geq \|Ux\| - \|Px - Ux\| \geq \frac{1-2\delta}{1-\delta} \|Ux\| \geq (1-2\delta)\, \|x\|$$

Ceci prouve que la restriction $P_{|F}$ de P à F est inversible, avec $\|P_{|F}^{-1}\| \leq (1-2\delta)^{-1}$. Pour trouver la projection Q voulue, il suffit de poser :

$$Q = P_{|F}^{-1} \circ P$$

et on a bien $\qquad \|Q\| \leq (1-2\delta)^{-1}$

Le lemme suivant est fondamental pour la démonstration. Il caractérise les familles de fonctions à supports disjoints à δ près :

<u>Lemme 3</u> : Soient $(f_1, \dots, f_n) \in L^1$ avec $\int |f_i(t)|\, dt = 1$, et $0 < \delta < 1$. Pour que les fonctions $(f_1, \dots, f_n)$ soient à supports disjoints à δ-près, il

faut et il suffit que :

$$(*) \qquad \forall\, (\alpha_i) \qquad \int_0^1 \max_i |\alpha_i f_i(t)|\, dt \;\geq\; (1-\delta)\, \Sigma\, |\alpha_i|$$

<u>Démonstration</u> : Il est évident que des fonctions à supports disjoints à δ près vérifient la propriété (*). Pour démontrer la réciproque, on peut tout d'abord remarquer que seuls les modules $|f_i|$ interviennent. On peut donc supposer $f_i \geq 0$ pour tout i, et les scalaires réels.
Considérons dans $L^1(\ell_n^\infty)$ l'ensemble :

$$C = \{ (\alpha_1 f_1, \dots, \alpha_n f_n) \;;\; \alpha_i \geq 0,\; \Sigma\, \alpha_i = 1 \}$$

Cet ensemble est convexe, et l'hypothèse (*) signifie exactement que C est disjoint de la boule ouverte de rayon $(1-\delta)$ de $L^1(\ell_n^\infty)$.
D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un élément $g = (g_1, \dots, g_n) \in L^\infty(\ell_n^1)$ tel que :

$$\|g\| \leq 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Sigma\, |g_i(t)| \leq 1 \quad \text{p.p.}$$

et $< g,f > \;\geq\; 1-\delta$ pour tout $f \in C$, ce qui implique (et équivaut à) :

$$(1) \qquad \int g_i(t)\, f_i(t)\, dt \geq 1-\delta \quad , \quad i=1,2,\dots,n \;,$$

Il est clair que l'on peut supposer $g_i \geq 0$. On peut aussi supposer que $\Sigma\, g_i(t) = 1$ p.p. (Sinon, on peut augmenter l'une des g_i, ce qui ne fait qu'améliorer (1)).

Posons maintenant :

$$K = \{ g = (g_1, \dots, g_n) \in L^\infty(\ell_n^1) \;;\; g_i \geq 0 \;,\; \Sigma\, g_i = 1 \;\; \text{p.p.}$$
$$\text{et} \int g_i(t)\, f_i(t)\, dt \geq 1-\delta,\; i = 1,2,\dots,n \}$$

L'ensemble K est non vide d'après le raisonnement précédent. On voit de plus qu'il est convexe et compact pour $\sigma(L^\infty(\ell_n^1), L^1(\ell_n^\infty))$.

Nous allons montrer que :

<u>Sous-lemme</u> : Si $g = (g_1, \dots, g_n)$ est un point extrémal de K, il existe des ensembles mesurables disjoints $A_1, \dots, A_n$ tels que $g_i = \chi_{A_i}$.

Notons P(A) la mesure d'une partie A de [0,1]. Nous devons montrer que $P\ \{g_i \in \{0,1\}\} = 1$ pour tout i. Sinon :

$$\exists\ i\ , \qquad P(0 < g_i < 1) > 0$$

Notons que puisque $\Sigma\ g_i = 1$, on a :

$$(0 < g_i < 1) \subset \bigcup_{j \neq i} (0 < g_j < 1)$$

Par conséquent :

$$\exists\ j \neq i \qquad P(0 < g_i \text{ et } g_j < 1) > 0$$

On en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$P(\varepsilon \leq g_i \quad \text{et} \quad g_j \leq 1-\varepsilon) > 0$$

Posons $X = (\varepsilon \leq g_i \quad \text{et} \quad g_j \leq 1-\varepsilon)$. La mesure de Lebesgue étant diffuse, on peut trouver une fonction mesurable bornée k telle que :

1) $k \neq 0$, $|k| \leq 1$, et $k = 0$ sur X^c

2) $< k, f_i > = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$

(Si une telle k n'existait pas, les $(\chi_X f_i)$ seraient totales dans $L^1(X)$, ce qui est impossible).

Considérons :

$$g^* = (g_1, g_2, \dots, g_i + \varepsilon k, \dots, g_j - \varepsilon k, \dots, g_n)$$

$$g^{**} = (g_1, g_2, \dots, g_i - \varepsilon k, \dots, g_j + \varepsilon k, \dots g_n)$$

On voit facilement que g^*, $g^{**} \in K$, et $g = \frac{1}{2}(g^* + g^{**})$, ce qui démontre le sous-lemme. Le lemme 3 en résulte immédiatement : l'ensemble K étant convexe compact non vide possède des points extrémaux.

Le point crucial de la démonstration de Dor est de prouver le théorème lorsque $L^1(\Omega,\mu) = L^1$ et $L^1(X,\nu) = \ell^1_n$. Il suffit pour cela de montrer que si $(f_1,\dots,f_n)$ sont des éléments de L^1 tels que $d(\ell^1_n,[f_1,\dots,f_n]) < C$, ces éléments sont à supports disjoints à δ-près pour un $\delta \in]0,1/2[$. C'est l'objet du lemme suivant :

<u>Lemme 4</u> : Soit $\varepsilon \in]0,1/2[$ et soient $(f_1,\dots,f_n) \in L^1$ tels que $\int |f_i(t)|\, dt = 1$ pour tout i et

$$\forall\ (\alpha_i) \qquad \int \left| \Sigma\ \alpha_i f_i(t) \right| \ \geq\ (1-\varepsilon)\ \Sigma\ |\alpha_i|$$

On a alors :

$$\forall\ (\alpha_i) \qquad \int \max_i\ |\alpha_i f_i(t)|\ dt\ \geq\ (1-2\varepsilon)\ \Sigma\ |\alpha_i|$$

<u>Démonstration</u> : Soient $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ des variables de Bernoulli indépendantes. On a :

$$\begin{aligned}\forall\ (\alpha_i) \qquad (1-\varepsilon)\ \Sigma\ |\alpha_i| &= (1-\varepsilon) \int \Sigma\ |\alpha_i \varepsilon_i(s)|\ ds \\ &\leq \int \left| \Sigma\ \alpha_i \varepsilon_i(s)\ f_i(t) \right| dt\ ds \\ &\leq \int dt\ \left(\int |\Sigma\ \alpha_i \varepsilon_i(s)\ f_i(t)|^2 ds\right)^{1/2} \\ &= \int (\Sigma\ |\alpha_i f_i(t)|^2)^{1/2}\ dt\end{aligned}$$

Si (x_i) est une suite de scalaires, on a :

$$(\Sigma\ |x_i|^2)^{1/2} \leq (\max_i |x_i|\ .\ \Sigma_i\ |x_i|)^{1/2} \leq \frac{1}{2}\ (\max_i |x_i| + \Sigma_i\ |x_i|)$$

On aura donc :

$$(1-\varepsilon)\ \Sigma\ |\alpha_i| \ \leq\ \frac{1}{2}\ [\int \Sigma\ |\alpha_i f_i(t)|\ dt + \int \max_i\ |\alpha_i f_i(t)|\ dt]\ ,$$

d'où

$$\int \max_i\ |\alpha_i f_i(t)|\ dt\ \geq\ (1-2\varepsilon)\ \Sigma\ |\alpha_i|\ ,$$

et le lemme est démontré.

<u>Remarque</u> : C'est dans ce lemme que nous ne suivons pas les calculs plus précis de Dor. La démonstration ci-dessus est fondée sur une inégalité du type :

$$(**) \qquad \int \left|\Sigma\, \alpha_i \varepsilon_i(s)\right| ds \;\leq\; \theta \max_i |\alpha_i| + (1-\theta)\, \Sigma\, |\alpha_i| \;,\; 0<\theta<1 \;,$$

qui conduit à

$$\int \max |\alpha_i f_i(t)|\, dt \;\geq\; \left(1-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \Sigma\, |\alpha_i|$$

Il faut donc chercher le plus grand θ possible tel que l'inégalité (**) soit satisfaite. Pour cette partie nous renvoyons le lecteur à l'article de Dor, qui fournit $\theta \geq (1+1/\sqrt{2})^{-1}$ dans le cas complexe, et $\theta = 3/4$ dans le cas réel.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Elle se fera en plusieurs étapes :

A - Soit $F \subset L^1$ avec $d(F,\ell_n^1) = \lambda < \frac{4}{3}$. On peut alors trouver dans F n éléments $(f_1,\dots,f_n)$ tels que $\int |f_i(t)|\, dt = 1$ et :

$$\forall\, (\alpha_i) \qquad \int \left| \Sigma\, \alpha_i f_i(t) \right| dt \geq \frac{1}{\lambda}\, \Sigma\, |\alpha_i|$$

D'après les lemmes 3 et 4, les fonctions (f_i) ont des supports disjoints à δ près, avec :

$$\delta = 2\left(1-\frac{1}{\lambda}\right) < \frac{1}{2}$$

D'après le lemme 2, on peut trouver une projection linéaire P de L^1 sur F, de norme $\leq C(\lambda) = (1-4(1-1/\lambda))^{-1}$.

B - Supposons que $L^1(\Omega,\mu) = \ell_m^1$, et que $F \subset \ell_m^1$ et tel que $d(F,\ell_n^1) = \lambda < \frac{4}{3}$. On peut plonger isométriquement ℓ_m^1 dans L^1. D'après A, il existe une projection de L^1 sur F, donc a fortiori de ℓ_m^1 sur F, de norme $\leq C(\lambda)$.

C - Soit (Ω,μ) un espace mesuré quelconque, et $F \subset L^1(\Omega,\mu)$, avec $d(F,\ell^1_n) = \lambda < 4/3$.

D'après un raisonnement standard (celui qui prouve que L^1 est un espace $\mathcal{L}^1$), on peut trouver pour tout $\alpha > 0$ un sous-espace $\widetilde{F}$ de $L^1(\Omega,\mu)$, tel que $\widetilde{F}$ soit contenu dans un sous-espace G engendré par un nombre fini de fonctions à supports disjoints et tel qu'il existe un opérateur U de $L^1(\Omega,\mu)$ dans lui-même, avec :

$$\|U\| \leq 1+\alpha$$

$$U(\widetilde{F}) = F$$

et $U_{|\widetilde{F}}$ est inversible, avec $\|U^{-1}_{|\widetilde{F}}\| \leq 1+\alpha$

(cf. par exemple [2], exposés XXIV et XXV)

L'espace G est alors isométrique à un ℓ^1_m et il existe une projection Q de norme 1 de $L^1(\Omega,\mu)$ sur G d'après le lemme 1. On a $\widetilde{F} \subset \ell^1_m$ et $d(\widetilde{F},\ell^1_n) \leq (1+\alpha)\lambda$, donc il existe une projection $\widetilde{P}$ de G sur $\widetilde{F}$, de norme $\leq C((1+\alpha)\lambda)$.

L'opérateur $P = U \circ \widetilde{P} \circ Q \circ U^{-1}_{|\widetilde{F}}$ est alors une projection de $L^1(\Omega,\mu)$ sur F, telle que $\|P\| \leq (1+\alpha)^2\, C((1+\alpha)\lambda)$. Ceci étant possible pour tout $\alpha > 0$ tel que $(1+\alpha)\lambda < 4/3$, on en déduit par compacité une projection de norme $\leq C(\lambda)$.

D - Supposons maintenant que (Ω,μ) et (X,ν) sont deux espaces mesurés quelconques, et que $F \subset L^1(\Omega,\mu)$ est tel que $d(F,L^1(X,\nu)) = \lambda < 4/3$. Soit T un isomorphisme de $L^1(X,\nu)$ sur F, tel que

$$\|T\|\ \|T^{-1}\| \leq \lambda+\varepsilon < 4/3$$

On peut considérer $L^1(X,\nu)$ comme l'adhérence $\overline{\bigcup_{i \in I} G_i}$ d'une famille filtrante croissante de sous-espaces de dimension finie isomorphes à des $\ell^1_{m_i}$.

On a alors $F = \overline{\bigcup_{i \in I} F_i}$, avec $d(F_i,\ell^1_{m_i}) \leq \lambda+\varepsilon$.

D'après C, il existe une projection Q_i de $L^1(\Omega,\mu)$ sur F_i, de norme $\leq C(\lambda+\varepsilon)$.

Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre tendant vers l'infini sur I, et posons pour $x \in L^1(\Omega,\mu)$:

$$Rx = \lim_{\mathfrak{U}} Q_i(x)$$

la limite étant prise dans $\sigma(F'',F')$. Si $x \in \bigcup_{i \in I} F_i$, on a $Rx = x$, et R étant continue, on a $Rx = x$ sur F. Pour finir, on sait qu'il existe une projection de norme 1 de $(L^1(X,\nu))''$ sur $L^1(X,\nu)$. Il existe donc une projection S de norme $\leq \lambda+\varepsilon$ de F'' sur F, et on prendra finalement :

$$P = S \circ R$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Questions</u> : On ne connaît pas d'exemple de sous-espace de L^1 isomorphe à ℓ^1 ou L^1, qui ne soit pas complémenté. Il est donc possible que $C = +\infty$ dans le théorème.
Au contraire pour $1 < p < 4/3$ on sait d'après [4] qu'il existe des sous-espaces de L^p isomorphes à ℓ^p et non-complémentés. Par contre, dans ce cas on ne sait pas s'il existe une constante $C > 1$ telle que si $F \subset L^p$, $d(F,\ell^p) < C$ implique que F est complémenté. Cela est néanmoins connu dans le cas isométrique : un sous-espace de L^p, isométrique à ℓ^p ou L^p, est complémenté.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Dor : On projections in L^1, à paraître.

[2] Séminaire Maurey-Schwartz 1973-1974.

[3] H.P. Rosenthal : On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory, Studia Math. 37 (1970) 13-36.

[4] H.P. Rosenthal : On the subspaces of L^p $(p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables, Israel J. Math. 8 (1970) 273-303.