

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. FARAHAT

**Exemples d'espaces b -convexes non réflexifs, d'après
James et Lindenstrauss**

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 20, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975___A19_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y S C H W A R T Z 1 9 7 4 - 1 9 7 5

EXEMPLES D'ESPACES B-CONVEXES NON REFLEXIFS

D'APRES JAMES ET LINDENSTRAUSS

par J. FARAHAT

Exposé N^o XX

23 Avril 1975

Dans [1] pour chaque $\rho \in]1; \infty[$ est construit un espace J_ρ qui est non réflexif et uniformément non octaédral, c'est-à-dire, en appelant $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes :

$$\forall x_1; x_2; x_3 \in J_\rho \quad \int \left\| \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i x_i \right\| dP(\varepsilon) \leq \lambda_1(\rho) \sup_{1 \leq i \leq 3} \|x_i\|$$

avec $\forall \rho \in]1; \infty[\quad \lambda_1(\rho) < 3$

Pour des raisons diverses il est intéressant de considérer au lieu de (x_1, x_2, x_3) des suites finies $(x_1; \dots; x_k)$ dans J_ρ et d'obtenir des informations sur $\int \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| dP(\varepsilon)$. Nous reproduisons pour cela la méthode de [2].

1) Définition de $\llbracket \cdot \rrbracket$

Nous dirons qu'un élément $x = (x(n)) \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ (identifié à l'ensemble des fonctions de \mathbf{N} dans \mathbf{R} à support fini) est une somme de "bosses" si x est un multiple d'une fonction indicatrice d'un sous-ensemble de \mathbf{N} . Le nombre de bosses $p(x)$ dans x est défini comme la moitié de la variation de la fonction indicatrice :

$$p(x) = \frac{1}{2} \sup_{n \in \mathbf{N}} |x(n)| \sum |x(0)| + |x(1) - x(0)| + \dots + |x(n+1) - x(n)| + \dots$$

si $\sup |x(n)| \neq 0$.

L'altitude $h(x)$ de x est définie par $h(x) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |x(n)|$ si $\sup |x(n)| \neq 0$.

(Pour des raisons de commodité, on considèrera $x = (0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ comme somme d'un nombre nul de bosses d'altitude quelconque). Nous définissons maintenant sur $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ la fonctionnelle $\llbracket \cdot \rrbracket$ par :

$$\llbracket x \rrbracket^\rho = \inf_{j=1}^m \left(\sum_{j=1}^m p(x_j) \left(\sum_{\ell=j}^m h(x_\ell) \right)^\rho - \left(\sum_{\ell=j+1}^m h(x_\ell) \right)^\rho \right)^{1/\rho}$$

où l'infimum porte sur les suites x_1, \dots, x_m vérifiant :

$$x = \sum_{\ell=1}^m x_{\ell}$$

et chaque x_{ℓ} est une somme de $p(x_{\ell})$ bosses d'altitude $h(x_{\ell})$.

Lemme 1 : 1°) $\|x\| \geq \sup_{i \in \mathbf{N}} |x(i)|$

$$2^{\circ}) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$3^{\circ}) \|U^n\| = 1 \text{ où } U^n \text{ est la fonction indicatrice de } \{1, 2, \dots, n\}$$

En effet, en remarquant que la fonction : $h \rightarrow (a+h)^{\rho} - (b+h)^{\rho}$ avec $a \geq b \geq 0$ et $h \geq 0$ est croissante, on voit que l'expression de $\|x\|^{\rho}$ ne peut que diminuer si l'on retire de la représentation $x = \sum_{j=1}^n x_j$ tous les termes vérifiant $p(x_j) = 0$.

On peut donc supposer que $p(x_j) \geq 1$ pour tout j .
En remplaçant $p(x_j)$ par 1, on obtient :

$$\|x\| \geq \sum_{\ell=1}^m h(x_{\ell}) \geq \sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{\ell=1}^m |x_{\ell}(n)| \geq \sup_{n \in \mathbf{N}} \left| \sum_{\ell=1}^m x_{\ell}(n) \right| = \sup_{n \in \mathbf{N}} |x(n)|$$

d'où 1°) est vérifié.

2°) et 3°) sont triviaux.

2) Définition de J_{ρ} .

La norme sur J_{ρ} est définie par :

$$\|x\| = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n \|x^k\| : x = \sum_{k=1}^m x^k \right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{(\mathbf{N})}$$

(voir par exemple [3] pour vérifier que c'est une norme)

et J_ρ est défini comme étant le complété de $\mathbf{R}^{(\mathbb{N})}$ pour cette norme.

Clairement la norme de J_ρ vérifie :

$$1^\circ) \quad \|x\| \geq \sup_{i \in \mathbb{N}} |x(i)|$$

$$2^\circ) \quad \|U^n\| = 1$$

et il résulte de [4] que l'espace J_ρ n'est pas réflexif.

Lemme 2 : Il existe une constante K_ρ telle que :

$\forall x_1, \dots, x_k$ dans $\mathbf{R}^{(\mathbb{N})}$ tels que $\|x_i\| = 1$ pour $i = 1, \dots, k$

$$\int \left\| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i \right\| dP(\varepsilon) \leq K_\rho k^{1/2 + 1/2\rho} (\log k)^{1/2\rho'}$$

(où $1/\rho + 1/\rho' = 1$)

Pour alléger les notations nous laisserons au lecteur le soin de vérifier à l'aide d'arguments d'approximations convenables que l'on peut supposer les altitudes $h(x_j^i)$ des vecteurs x_j^i rationnelles et que la valeur

$$\|x_i\|^\rho = \sum_{j=1}^m p(x_i^j) \left[\left(\sum_{l=j}^m h(x_i^l) \right)^\rho - \left(\sum_{l=j+1}^m h(x_i^l) \right)^\rho \right]$$

est effectivement atteinte pour cette représentation.

Alors en remarquant que l'expression de $\|x_i\|^\rho$

$$\|x_i\|^\rho = \sum_{j=1}^m p(x_i^j) \left[\left(\sum_{l=j}^m h(x_i^l) \right)^\rho - \left(\sum_{l=j+1}^m h(x_i^l) \right)^\rho \right]$$

où $x_i = \sum_{j=1}^m x_i^j$ ne change pas de valeur si l'on remplace le vecteur $x_i^{j_0}$ par λ fois le vecteur $\frac{x_i^{j_0}}{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{N}$; c'est-à-dire si l'on remplace la représentation $x_i = \sum_{j=1}^m x_i^j$ par la représentation

$$x_i = \sum_{j=1}^{m+\lambda-1} x_i^j \quad \text{où} \quad x_i^j = x_i^j \quad \text{si } j < j_0$$

$$x_i^j = x_i^{j-\lambda+1} \quad \text{si } j \geq j_0 + \lambda$$

$$x_i^j = \frac{x_i^{j_0}}{\lambda} \quad \text{si } j \leq j_0 < j_0 + \lambda$$

on voit que l'on peut supposer que dans la représentation $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} x_i^j$ on a

$$\forall i, i' \quad \forall j, j' \quad h(x_i^j) = h(x_{i'}^{j'}) = \frac{1}{N}$$

Si l'on remarque de plus que la valeur de l'expression $\llbracket x_i \rrbracket^\rho$ ne change pas si l'on ajoute dans la représentation $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} x_i^j$ le vecteur nul un

certain nombre de fois au début, c'est-à-dire si l'on remplace la représentation $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} x_i^j$ par la représentation

$$x_i = \sum_{j=1}^{m_i+s} x_i^j \quad \text{où} \quad x_i^1 = \dots = x_i^s = \vec{0}$$

$$x_i^j = x_i^{j-s} \quad \text{pour } j > s ;$$

en le comptabilisant dans le calcul de $\llbracket x_i \rrbracket^\rho$ comme un vecteur comportant 0 bosse d'altitude $1/N$, on voit que l'on peut supposer :

$$1 = \llbracket x_i \rrbracket^\rho = \frac{1}{N^\rho} \sum_{j=1}^m p(x_i^j) [(m-j+1)^\rho - (m-j)^\rho]$$

où $x_i = \sum_{j=1}^m x_i^j$; x_i^j est somme de $p(x_i^j)$ bosses d'altitude $1/N$, et m ne

dépend pas de i .

Posons $U_j = (m-j+1)^\rho - (m-j)^\rho$ et $\phi_j^\varepsilon = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i^j$.

Nous avons donc $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i^j = \sum_{j=1}^m \phi_j^\varepsilon$.

Fixons j .

On peut découper \mathbb{N} en $m_j \leq 2 \left(\sum_{i=1}^k p(x_i^j) \right)$ intervalles disjoints de façon que $x_i^j(n)$, $i \in \{1; \dots; k\}$; soit constant quand n décrit l'un de ces intervalles et soit nul quand n n'est dans aucun de ces intervalles.

En effet, chaque $x_i^j(n)$, $i \in \{1, \dots, k\}$ change de valeur exactement $2p(x_i^j)$ fois.

Soient $I_{1,j}, \dots, I_{m_j,j}$ de tels intervalles.

On voit facilement que ϕ_j^ε est étagée sur $\{I_{(1,j)}, \dots, I_{(m_j,j)}\}$ et prend des valeurs comprises entre $-\frac{k}{N}$ et $\frac{k}{N}$, et est nul en dehors de $\bigcup_{\ell=1}^{m_j} I_{\ell,j}$.

On va réécrire ϕ_j^ε . On pose

$$\begin{aligned} \phi_{j\alpha}^\varepsilon &= \frac{1}{N} \mathbb{1}_{\{N\phi_j^\varepsilon \geq \alpha\}} && \text{si } \alpha \in \{1, \dots, k\} \\ \phi_{j\alpha}^\varepsilon &= -\frac{1}{N} \mathbb{1}_{\{N\phi_j^\varepsilon \leq \alpha\}} && \text{si } \alpha \in \{-1, \dots, -k\} \end{aligned}$$

On a

$$\phi_j^\varepsilon = \sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha \neq 0 \\ \alpha=+k}}^{\alpha=+k} \phi_{j\alpha}^\varepsilon$$

Lemme 3 :

$$\sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha \neq 0 \\ \alpha=+k}}^{\alpha=+k} E p(\phi_{j\alpha}^\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^k p(x_i^j)$$

En effet,

$$\text{var} \sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha \neq 0 \\ \alpha=+k}}^{\alpha=+k} \phi_{j\alpha}^\varepsilon = \text{var} \sum_{\alpha=1}^k \phi_{j\alpha}^\varepsilon + \text{var} \sum_{\alpha=-1}^{\alpha=-k} \phi_{j\alpha}^\varepsilon$$

(car $\text{var } f = \text{var } f^+ + \text{var } f^-$).

De plus, il suffit de remarquer que si

$$\sum_{\alpha=1}^k \phi_{j\alpha}^\varepsilon(n) = \frac{p}{N} \quad p \in \{0, \dots, k\}$$

$$\sum_{\alpha=1}^k \phi_{j\alpha}^\varepsilon(n+1) = \frac{q}{N} \quad q \in \{0, \dots, k\}$$

on a

$$\phi_{j\alpha}^\varepsilon(n) = \frac{1}{N} \quad \text{pour } 0 < \alpha \leq p$$

$$\phi_{j\alpha}^\varepsilon(n) = 0 \quad \text{pour } \alpha > p$$

$$\phi_{j\alpha}^\varepsilon(n+1) = \frac{1}{N} \quad \text{pour } 0 < \alpha \leq q$$

$$\phi_{j\alpha}^\varepsilon(n+1) = 0 \quad \text{pour } \alpha > q$$

d'où

$$\sum_{\alpha=1}^k |\phi_{j\alpha}^\varepsilon(n) - \phi_{j\alpha}^\varepsilon(n+1)| = \left| \sum_{\alpha=1}^k \phi_{j\alpha}^\varepsilon(n) - \sum_{\alpha=1}^k \phi_{j\alpha}^\varepsilon(n+1) \right| = \frac{|p-q|}{N}$$

ce qui nous donne

$$\sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha \neq 0}}^{\alpha=+k} \text{var } \phi_{j\alpha}^\varepsilon = \text{var } \sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha \neq 0}}^{\alpha=+k} \phi_{j\alpha}^\varepsilon$$

On obtient donc

$$\sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha \neq 0}}^{\alpha=+k} p(\phi_{j\alpha}^\varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha \neq 0}}^{\alpha=+k} \text{var } \phi_{j\alpha}^\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2} \text{var } \sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha \neq 0}}^{\alpha=+k} \phi_{j\alpha}^\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2} \text{var } \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i^j$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \text{var } x_i^j$$

$$\leq \sum_{i=1}^k p(x_i^j)$$

D'où le résultat annoncé :

$$\sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha \neq 0}}^{\alpha=+k} E p(\phi_{j\alpha}^\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^k p(x_i^j)$$

Lemme 4 : Soit $k' \in \{1, \dots, k\}$, si $\alpha > k'$ ou $\alpha < -k'$, on a :

$$\int p(\Phi_{j\alpha}^\varepsilon) dP(\varepsilon) \leq \left(4 \sum_{i=1}^k p(x_i^j) \right) e^{-k'/k}$$

En effet, soit $n_\ell \in I_{\ell, j}$.

On se convaincra sans peine que l'on a

$$p(\Phi_{j\alpha}^\varepsilon) \leq 2 \sum_{\ell=1}^{m_j} 1 \left\{ \sum \varepsilon_i x_i^j(n_\ell) \geq \frac{\alpha}{N} \right\}$$

D'où

$$E p(\Phi_{j\alpha}^\varepsilon) \leq 2 \sum_{\ell=1}^{m_j} P \left(\sum \varepsilon_i x_i^j(n_\ell) \geq \frac{\alpha}{N} \right)$$

Mais l'on a

$$\begin{aligned} P \left(\sum \varepsilon_i x_i^j(n_\ell) \geq \frac{\alpha}{N} \right) &= P \left(e^{\lambda \left[\sum \varepsilon_i x_i^j(n_\ell) \right]} \geq e^{\frac{\lambda \alpha}{N}} \right) \\ &\leq \frac{E e^{2\lambda \left[\sum \varepsilon_i x_i^j(n_\ell) \right]}}{e^{\frac{2\lambda \alpha}{N}}} \quad (\text{d'après Bienaymé-Tchebyschev}) \\ &\leq \prod_{i=1}^k \frac{\text{ch } 2\lambda x_j^i(n_\ell)}{e^{\frac{2\lambda \alpha}{N}}} \end{aligned}$$

et comme l'on a

$$\frac{e^U + e^{-U}}{2} \leq e^{U^2/2} \leq \prod_{i=1}^k e^{2\lambda^2 x_j^i(n_\ell)^2 - \frac{2\lambda \alpha}{N}}$$

et il suffit maintenant de minimiser cette expression en λ et de remarquer

que $N \sum_{i=1}^k x_i^j(n_\ell)^2 \leq k$ pour obtenir

$$E P(\Phi_{j\alpha}^\varepsilon) \leq 2 \sum_{\ell=1}^{m_j} e^{-\alpha^2/k} \leq \left[4 \sum_{i=1}^k p(x_i^j) \right] e^{-k'/2/k}$$

Conséquences des estimations des lemmes 3 et 4.

On pose $\Phi_{\alpha}^{\varepsilon} = \sum_{j=1}^m \Phi_{j\alpha}^{\varepsilon}$, on a

$$\|\Phi_{\alpha}^{\varepsilon}\|^{\rho} \leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m p(\Phi_{j\alpha}^{\varepsilon}) U_j$$

D'où

$$\sum_{\substack{\alpha=+k \\ \alpha=-k \\ \alpha \neq 0}} E \|\Phi_{\alpha}^{\varepsilon}\|^{\rho} \leq \frac{1}{N} \sum_{\substack{\alpha=+k \\ \alpha=-k \\ \alpha \neq 0}} \sum_{j=1}^m E p(\Phi_{j\alpha}^{\varepsilon}) U_j$$

$$\leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{\substack{\alpha=+k \\ \alpha=-k \\ \alpha \neq 0}} E p(\Phi_{j\alpha}^{\varepsilon}) \right) U_j$$

$$\leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^k p(x_i^j) \right) U_j$$

$$\leq k$$

Si $\alpha > k'$ ou $\alpha < -k'$, on a

$$\begin{aligned} E \|\Phi_{\alpha}^{\varepsilon}\| &\leq \left(\int \|\Phi_{\alpha}^{\varepsilon}\|^{\rho} dP(\varepsilon) \right)^{1/\rho} \\ &\leq \left[\sum_{j=1}^m \left(\int p(\Phi_{j\alpha}^{\varepsilon}) dP(\varepsilon) \right) \frac{U_j}{N} \right]^{1/\rho} \\ &\leq 4^{1/\rho} \ell^{-k', 2/k\rho} \left(\sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^k p(x_i^j) \right] \frac{U_j}{N} \right)^{1/\rho} \\ &\leq 4^{1/\rho} \ell^{-k', 2/k\rho} k^{1/\rho} \end{aligned}$$

et

$$|\alpha| \geq k', \quad E \|\Phi_{\alpha}^{\varepsilon}\| \leq 2 \times 4^{1/\rho} \ell^{-k', 2/k\rho} k^{1 + \frac{1}{\rho}}$$

De ceci nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\alpha=+k \\ \alpha=-k}} \|\Phi_{\alpha}^{\varepsilon}\| &= \sum_{|\alpha| < k'} \|\Phi_{\alpha}^{\varepsilon}\| + \sum_{|\alpha| > k'} \|\Phi_{\alpha}^{\varepsilon}\| \\ &\leq k'^{1/\rho'} \left(\sum_{|\alpha| < k'} \|\Phi_{\alpha}^{\varepsilon}\|^{\rho} \right)^{1/\rho} + \sum_{|\alpha| > k'} \|\Phi_{\alpha}^{\varepsilon}\| \end{aligned}$$

(d'après Hölder)

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\alpha=+k \\ \alpha=-k \\ \alpha \neq 0}} E \|\Phi_{\alpha}^{\varepsilon}\| &\leq k'^{1/\rho'} E \left(\sum_{\alpha=-k}^{\alpha=+k} \|\Phi_{\alpha}^{\varepsilon}\|^{\rho} \right)^{1/\rho} + 2 \times 4^{1/\rho} k^{1+\frac{1}{\rho}} e^{-k'^2/k\rho} \\ &\leq k'^{1/\rho'} \left(\sum_{\alpha=-k}^{\alpha=+k} E \|\Phi_{\alpha}^{\varepsilon}\|^{\rho} \right)^{1/\rho} + 2 \times 4^{1/\rho} k^{1+\frac{1}{\rho}} e^{-k'^2/k\rho} \\ &\leq k^{1/\rho} k'^{1/\rho'} + 2 \times 4^{1/\rho} k^{1+\frac{1}{\rho}} e^{-k'^2/k\rho} \end{aligned}$$

le choix de $k' = (\rho(1 + \frac{1}{\rho}) k \log k)^{1/2}$ nous donne

$$\sum_{\substack{\alpha=+k \\ \alpha=-k \\ \alpha \neq 0}} E \|\Phi_{\alpha}^{\varepsilon}\| \leq K_{\rho} k^{1/2+1/2\rho} (\log k)^{1/2\rho'}$$

K_{ρ} étant une constante qui ne dépend que de ρ .

Comme nous avons

$$\left\| \sum_i \varepsilon_i X_i \right\| = \left\| \sum_{\substack{\alpha=+k \\ \alpha=-k \\ \alpha \neq 0}} \Phi_{\alpha}^{\varepsilon} \right\| \leq \sum_{\substack{\alpha=+k \\ \alpha=-k \\ \alpha \neq 0}} \|\Phi_{\alpha}^{\varepsilon}\|$$

le lemme 2 est démontré.

Soient maintenant $x_1, \dots, x_k \in J_\rho$, $\|x_1\| = \dots = \|x_k\|$.

On choisit des représentations telles que

$$\|x_i\| = \sum_{k=1}^{p_i} \|x_i^k\| - \varepsilon$$

Ensuite on les remplace par des représentations $x_i = \sum_{k=1}^s x_i^k + \overline{x_i}$ de telle façon que $\|\overline{x_i}\| \leq \varepsilon \quad \forall i$

$$\|x_i\| \geq \sum_{k=1}^s \|x_i^k\| - \varepsilon$$

et $\|x_i^k\| = \|x_{i'}^{k'}\| \quad \forall i, i' \in \{1, \dots, k\} \quad \forall k, k' \in \{1, \dots, s\}$

On en déduit

$$E \left\| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i \right\| \leq \sum_{\ell=1}^s E \left\| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i^\ell \right\| + 3\varepsilon$$

et d'après le lemme 2

$$E \left\| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i \right\| \leq \sum_{\ell=1}^s K_\rho k^{1/2+1/2\rho} (\log k)^{1/2\rho'} \sup \|x_i^j\| + 3\varepsilon$$

$$E \left\| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i \right\| \leq K_\rho k^{1/2+1/2\rho} (\log k)^{1/2\rho'} \sum_1^s \|x_i^k\| + 3\varepsilon$$

$$\leq K_\rho k^{1/2+1/2\rho} (\log k)^{1/2\rho'} \sup(\|x_i\| - \varepsilon) + 3\varepsilon$$

D'où le théorème 5 :

Théorème 5 : Il existe une constante K_ρ tel que $\forall x_1, \dots, x_k \in J_\rho$

$$\int \left\| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i \right\| dP(\varepsilon) \leq K_\rho k^{1/2+1/2\rho} (\log k)^{1/2\rho'} \sup \|x_i\|$$

Corollaire 6 : J_ρ est de type p pour tout p tel que $\frac{1}{p} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$.

En effet avec les notations de [5] on voit que μ_k tend vers 0 plus vite que $k^{-1/q'}$ quelque soit q tel que $1/q > 1/2 + 1/2\rho$, et on en déduit (lemme 4, en fait d'après la démonstration du lemme 2) que l'espace est de type p pour tout $p < q$.

on peut dire aussi cf [5] :

Corollaire 7 : J_ρ est B convexe pour tout $\rho \in]1, \infty[$.

BIBLIOGRAPHIE
 =====

- [1] R.C. James and J. Lindenstrauss : The octahedral problem for Banach spaces (to appear)
- [2] W. Davis and J. Lindenstrauss : to appear.
- [3] B. Beauzamy : Exposés n° XIII et XIV du Séminaire Maurey-Schwartz 1973-1974.
- [4] R.C. James : Weak compactness and reflexivity.
Israel Journal of Math. 2 (1964), théo.3 p.109.
- [5] G. Pisier : Exposé n° VII, Séminaire Maurey-Schwartz 1973-1974.