Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

P. Assouad

Espaces p-lisses et q-convexes. Inégalités de Burkholder

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 15, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A14_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

ESPACES p-LISSES ET q-CONVEXES

INEGALITES DE BURKHOLDER

par P. ASSOUAD

Exposé N° XV **5 Mars 1975**

<u>Notations</u>. Soient E un espace de Banach réflexif, $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilité, $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{A}$, $p\in\,]1,2]$, $q\in[2,\infty[$, $\varepsilon>0$. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite adaptée (aux $\mathcal{A}_i$) de v.a. intégrables à valeurs dans E. On pose $\Delta X_{i+1} = X_{i+1}-X_i$, $dX_i = E(\Delta X_{i+1}\mid\mathcal{A}_i)$.

<u>Définitions</u>. 1) E est p-lisse si on a :

$$(1)\quad \exists\, K<\infty\ \ \forall\, x,\ y\in E\quad \frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)\le \|x\|^p+K\|y\|^p$$

2) E est q-convexe si on a :

$$(2)\quad \exists\, k>0\ \ \forall\, x,y\in E\quad \frac{1}{2}(\|x+y\|^q+\|x-y\|^q)\ge \|x\|^q+k\|y\|^q$$

3) $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dans $d(\varepsilon,-)$ si on a :

$$\forall\, i\in\mathbb{N}\quad \|\varepsilon X_i-dX_i\|\ \ge\ \|\varepsilon X_i\|$$

4) $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dans $d(\varepsilon,+)$ si on a :

$$\forall\, i\in\mathbb{N}\quad \|(1+\varepsilon)X_i+dX_i\|\ \ge\ \|(1+\varepsilon)X_i\|$$

<u>Exemples</u> : a) Une martingale est dans $d(\varepsilon,-)$ et $d(\varepsilon,+)$ pour tout ε. Une surmartingale positive (resp. Sousmartingale positive) est dans $d(\varepsilon,-)$ (resp. $d(\varepsilon,+)$) pour tout ε.

b) Plus généralement soit $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une martingale à valeurs dans E, $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite prévisible de v.a. réelles ($A_i\in\mathcal{A}_{i-1}$ $\forall\, i\in\mathbb{N}$ $\mathcal{A}_{-1}=\mathcal{A}_o$) et $X_i = A_iM_i$. Alors $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dans $d(\varepsilon,-)$ (resp. $d(\varepsilon,+)$) si et seulement si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $d(\varepsilon,-)$ (resp. $d(\varepsilon,+)$). C'est le cas en particulier si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante (resp. positive croissante).

c) Enfin soit $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite monotone (au sens des espaces de Banach) d'éléments de E, $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $X_i = \sum_{j=1}^{i} t_jy_j$ (v.a. certaine). Alors $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dans $d(\varepsilon,-)$ et $d(\varepsilon,+)$ pour tout ε.

<u>Proposition 1</u> : Soit E un espace de Banach p-lisse (resp. q-convexe), $\varepsilon > 0$ et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite adaptée de v. a. à valeurs dans E. On supoose que $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est dans $d(\varepsilon,-)$ (resp. $d(\varepsilon,+)$). Alors il existe $K_\varepsilon < \infty$ (resp. $k_\varepsilon > 0$) ne dépendant que de ε et de E tel qu'on ait :

$$\forall\, i \in \mathbb{N} \qquad E(\|X_{i+1}\|^p \mid \mathcal{a}_i) \leq \|X_i\|^p + K_\varepsilon\, E(\|\Delta X_{i+1}\|^p \mid \mathcal{a}_i)$$

$$(\text{resp. } \forall\, i \in \mathbb{N} \quad E(\|X_{i+1}\|^q \mid \mathcal{a}_i) \geq \|X_i\|^q + k_\varepsilon\, E(\|\Delta X_{i+1}\|^q \mid \mathcal{a}_i))$$

<u>Démonstration</u> : 0) Comme le résultat ne fait jouer que deux indices on peut se contenter de prendre $i = 0$, $i+1 = 1$. De plus soit $A \in \mathcal{a}_o$ si (X_o,X_1) est dans $d(\varepsilon,-)$ (resp. $d(\varepsilon,+)$) il en est de même de $(X_o 1_A, X_1 1_A)$. Il suffit donc de montrer qu'on a :

$$E(\|X_1\|^p) \leq E(\|X_o\|^p + K_\varepsilon \|\Delta X_1\|^p)$$

$$(\text{resp. } E(\|X_1\|^q) \geq E(\|X_o\|^q + k_\varepsilon \|\Delta X_1\|^q))$$

On note τ_ε une v.a. telle que $P(\tau_\varepsilon = 1) = \frac{1}{1+\varepsilon}$ $\quad P(\tau_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

1) Soit E p-lisse et (X_o,X_1) dans $d(\varepsilon,-)$

a) Soit (X'_o,X'_1) dans $d(1,-)$, on intègre (1) avec $x = X'_o$, $y = \Delta X'_1$. On obtient

$$\frac{1}{2} E(\|X'_1\|^p + \|X'_o - \Delta X'_1\|^p) \leq E(\|X'_o\|^p + K\|\Delta X'_1\|^p)$$

Or

$$E(\|X'_o - \Delta X'_1\|^p) \geq E(\|X'_o - dX'_o\|^p) \geq E(\|X'_o\|^p)$$

Donc

$$(1') \qquad E(\|X'_1\|^p) \leq E(\|X'_o\|^p + 2K\|\Delta X'_1\|^p) .$$

b) Soit x,y des éléments de E. On applique (1') à la martingale $X'_o = x$, $X'_1 = x + \tau_\varepsilon y$. On obtient

$$(1'') \qquad \frac{1}{1+\varepsilon}\|x+y\|^p + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|x - \frac{y}{\varepsilon}\|^p \leq \|x\|^p + 2K\|\tau_\varepsilon|_p^p\, \|y\|^p$$

On intègre (1") avec $x = X_o$, $y = \Delta X_1$. On obtient

$$E\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\ ||X_1||^p + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}||X_o - \frac{\Delta X_1}{\varepsilon}||^p\right) \le E\left(\ ||X_o||^p + 2K\ ||\tau_\varepsilon||_p^p\ ||\Delta X_1||^p\ \right)$$

Or

$$E(\ ||X_o - \frac{\Delta X_1}{\varepsilon}||^p) \ \ge\ E(\ ||X_o - \frac{dX_o}{\varepsilon}||^p) \ \ge\ E(\ ||X_o||^p)$$

Donc

$$E(\ ||X_1||^p) \ \le E(\ ||X_o||^p + 2K(1+\varepsilon)\ \ ||\tau_\varepsilon||_p^p\ ||\Delta X_1||^p\ )$$

2) Soit E q-convexe et (X_o, X_1) dans $d(\varepsilon,+)$

a) Soit (X'_o, X'_1) dans $d(1,+)$

On intègre (2) avec $x = X'_o + \frac{\Delta X'_1}{2}$, $y = \frac{\Delta X'_1}{2}$. On obtient

$$\frac{1}{2}\ E(\ ||X'_1||^q + \ ||X'_o||^q\ ) \ \ge\ E(\ ||X'_o + \frac{\Delta X'_1}{2}||^q + k2^{-q}\ ||\Delta X'_1||^q\ )$$

Or

$$E(\ ||X'_o + \frac{\Delta X'_1}{2}||^q) \ \ge\ E(\ ||X'_o + \frac{dX'_o}{2}||^q) \ge E(\ ||X'_o||^q)$$

Donc

$$(2')\qquad E(\ ||X'_1||^q) \ \ge E(\ ||X'_o||^q + 2^{1-q}\ k\ ||\Delta X'_1||^q\ )$$

b) Soit x,y des éléments de E. On applique (2') à la martingale $X'_o = x$, $X'_1 = x + \tau_\varepsilon y$. On obtient

$$(2")\quad \frac{1}{1+\varepsilon}\,||x+y||^q + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,||x - \frac{y}{\varepsilon}||^q \ge\ ||x||^q + 2^{1-q}k\ ||\tau_\varepsilon||_q^q\ \ ||y||^q$$

On intègre (2") avec $x = X_o + \frac{\Delta X_1}{1+\varepsilon}$ $\quad y = \frac{\varepsilon\Delta X_1}{1+\varepsilon}$. On obtient

$$E\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\,||X_1||^q + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,||X_o||^q\ \right) \ge E\left(\ ||X_o + \frac{\Delta X_1}{1+\varepsilon}||^q + 2^{1-q}k\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^q ||\tau_\varepsilon||_q^q\ \ ||\Delta X_1||^q\right)$$

Or

$$E(\|X_o + \frac{\Delta X_1}{1+\varepsilon}\|^q) \quad \geq \quad E(\|X_o + \frac{dX_o}{1+\varepsilon}\|^q) \quad \geq \quad E(\|X_o\|^q)$$

Donc

$$E(\|X_1\|^q) \geq E(\|X_o\|^q + (2+2\varepsilon)^{1-q} \varepsilon^q k \|\tau_\varepsilon\|_q^q \|\Delta X_1\|^q)$$

Corollaire : Soit E un espace de Banach p-lisse (resp. q-convexe), $\varepsilon > 0$ et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite adaptée de v.a. à valeurs dans E. On suppose que $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est dans $d(\varepsilon,-)$ (resp. $d(\varepsilon,+)$). On note alors

$$S_p X_i = (\|X_o\|^p + K_\varepsilon \sum_{j=1}^{i} \|\Delta X_j\|^p)^{1/p}$$

$$(\text{resp. } S_q X_i = (\|X_o\|^q + k_\varepsilon \sum_{j=1}^{i} \|\Delta X_j\|^q)^{1/q})$$

Alors $(S_p X_i)^p - \|X_i\|^p$ (resp. $\|X_i\|^q - (S_q X_i)^q$) est une sous martingale nulle pour $i = 0$.

Remarque : Supposons $\|\Delta X_{i+1}\| \leq W_i \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$ où $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite adaptée de v.a. positives. Gardant les notations du corollaire, on a pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$(S_p X_{i+1})^p \leq (S_p X_i)^p + K_\varepsilon W_i^p \qquad (\text{resp. } (S_q X_{i+1})^q \leq (S_q X_i)^q + k_\varepsilon W_i^q)$$

$$\|X_{i+1}\|^p \leq 2^{p-1}(\|X_i\|^p + W_i^p) \qquad (\text{resp. } \|X_{i+1}\|^q \leq 2^{q-1}(\|X_i\|^q + W_i^q))$$

Le lemme suivant adapte à un cas plus général une idée de [1] :

Lemme : Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des suites adaptées de v.a. réelles, $a \in \mathbb{R}$ et Φ une fonction de Young (c'est-à-dire $[0,\infty[\to [0,\infty[$ continue, croissante , nulle en 0).

On suppose qu'on a : $A_i \geq 0,\ B_i \geq 0,\ V_i \geq 0 \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$

$(B_i - A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une sous martingale

$A_o \leq a\, B_o$

$A_{i+1} \leq a(A_i + V_i)$, $B_{i+1} \leq a(B_i + V_i) \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$

$\exists\, r \quad \frac{\Phi(x)}{x^r} \searrow$

On pose $A^* = \sup_i A_i$, $B^* = \sup_i B_i$, $V^* = \sup_i V_i$.

On a alors

$$E\,\Phi\,(A^*) \leq c\,[E\,\Phi\,(V^*) + \Phi(B^*)]$$

(où c ne dépend que de a et r).

<u>Démonstration</u> : On pose $\mu = \inf\{i \mid A_i > 1\}$, $\nu = \inf\{i \mid A_i > \beta\}$

$\sigma = \inf\{i \mid B_i \vee V_i > \delta\}$ avec $\beta > 1$ et $0 < \delta < \frac{\beta}{\alpha} - 1$

1) On a $A_{\nu\wedge\sigma} - A_{\mu\wedge\sigma} > \beta - a(\delta+1)$ sur $\{\nu < \infty,\ \sigma = \infty\}$

en effet, on a $A_{\nu\wedge\sigma} = A_\nu > \beta$.

Par ailleurs $A_{\mu\wedge\sigma} = A_\mu \leq a(A_{\mu-1} + V_{\mu-1}) \leq a(\delta+1)$ si $\mu > 0$

$= A_o \leq a\,B_o \leq a\delta$ si $\mu = 0$

2) On a $B_{\nu\wedge\sigma} - B_{\mu\wedge\sigma} \leq 2a\delta\ 1_{\{\mu<\infty\}}$

en effet, $B_{\nu\wedge\sigma} - B_{\mu\wedge\sigma} \leq a(B_{(\nu\wedge\sigma)-1} + V_{(\nu\wedge\sigma)-1}) \leq 2a\delta$ si $\nu\wedge\sigma > 0$.

Par ailleurs , comme $\beta > 1$ entraîne $\mu \leq \nu$, on a $B_{\nu\wedge\sigma} = B_{\mu\wedge\sigma}$ dès que $\nu\wedge\sigma = 0$ ou $\mu = \infty$.

3) On en déduit successivement :

$$P(\nu<\infty, \sigma=\infty) \leq P(A_{\nu\ \sigma} - A_{\mu\ \sigma} > \beta - a(\delta+1))$$

$$\leq \frac{1}{\beta - a(\delta+1)}\,E(A_{\nu\ \sigma} - A_{\mu\ \sigma})$$

$$\leq \frac{1}{\beta - a(\delta+1)}\,E(B_{\nu\ \sigma} - B_{\mu\ \sigma})$$

(car $(B_i - A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une sous martingale et $\nu\wedge\sigma \geq \mu\wedge\sigma$)

$$\leq \frac{2a\delta}{\beta - a(\delta+1)}\,P\,(\mu<\infty)$$

4) On trouve donc

$$P(A^* > \beta) \leq P(B^* \vee V^* > \delta) + P(\nu < \infty, \sigma = \infty)$$

$$\leq P(B^* \vee V^* > \delta) + \frac{2a\delta}{\beta - a(\delta+1)} P(A^* > 1)$$

On écrit cette inégalité pour $\frac{A}{\lambda}$, $\frac{B}{\lambda}$, $\frac{V}{\lambda}$ et on intègre par rapport à $d\Phi(\lambda)$.

On obtient :

$$E\Phi\left(\frac{A^*}{\beta}\right) \leq E\Phi\left(\frac{B^* \vee V^*}{\delta}\right) + \frac{2a\delta}{\beta - a(\delta+1)} E\Phi(A^*)$$

Or $\quad \frac{\Phi(x)}{x^r} \searrow \Rightarrow \Phi\left(\frac{x}{\beta}\right) \geq \frac{1}{\beta^r} \Phi(x) \qquad (\text{car } \beta > 1)$

Le résultat est démontré si on a choisi δ assez petit pour que :

$$\frac{2a\delta}{\beta - a(\delta+1)} < \frac{1}{\beta^r}$$

<u>Proposition 2</u> : Soit E un espace de Banach p-lisse (resp. q-convexe) $\varepsilon > 0$, $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite adaptée de v.a. à valeurs dans E, $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite adaptée de v.a. positives et Φ une fonction de Young à croissance modérée (c'est-à-dire $\exists\, r \ \frac{\Phi(x)}{x^r} \searrow$) .

On pose $X^* = \sup_i \|X_i\|$, $W^* = \sup_i W_i$, $S_p X = \sup_i S_p X_i$ (resp. $S_q X = \sup_i S_q X_i$).

a) Si on a $\|\Delta X_{i+1}\| \leq W_i \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$ et si $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est dans $d(\varepsilon,-)$ (resp. $d(\varepsilon,+)$), alors on a :

$$E\Phi(X^*) \leq c_1 E[\Phi(W^*) + \Phi(S_p X)]$$

$$(\text{resp. } E\Phi(S_q X) \leq c_2 E[\Phi(W^*) + \Phi(X^*)])$$

b) Si $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une martingale et si Φ est convexe, alors on a :

$$E\Phi(X^*) \leq c_3 E\Phi(S_p X)$$

$$(\text{resp. } E\Phi(S_q X) \leq c_2 E\Phi(X^*))$$

Les constantes c_1, c_2, c_3, c_4 ne dépendant que de E, r et p (resp. q).

Démonstration : a) C'est une simple application du lemme avec

$$A_i = \|X_i\|^p \quad , \quad B_i = (S_p X_i)^p \quad , \quad V_i = W_i^p$$

$$(\text{resp. } A_i = (S_q X_i)^q \ , \ B_i = \|X_i\|^q \ , \ V_i = W_i^q \ )$$

b) La décomposition de Davis de la martingale $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ permet de ramener b) à a) et au lemme de convexité de Burkholder-Davis-gundy. On renvoie à [1] et [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.L. Burkholder : Annals of Probability 1973 vol. 1 n° 1 19-42.

[2] Adriano M. Garsia : Annals of Probability 1973 vol. 1 n° 1 171-174.
