SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. L. KRIVINE

Sur les espaces isomorphes à l^p

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 12, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A11_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

SUR LES ESPACES ISOMORPHES A l^p

par J.L. KRIVINE

Exposé N° XII

5 Février 1975

Tous les espaces de Banach considérés dans cet article sont sur le corps des réels. On se propose de montrer le

Théorème 1. *Soient* p *un réel* $\geqslant 1$ *et* E *un espace de Banach isomorphe à* ℓ^p. *Alors* ℓ^p *est finiment représentable dans* E.

Rappelons qu'un espace F est dit finiment représentable dans E si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-espace F' de F de dimension finie il existe un sous-espace E' de E et une application linéaire bijective $T : E' \longrightarrow F'$ avec $\|T\| \, \|T^{-1}\| \leqslant 1+ \varepsilon$. Cette notion est intimement liée à celle d'ultrapuissance [1], comme le montre la proposition suivante ([2], [3]).

Proposition 1. E *et* F *étant des espaces de Banach,* F *est finiment représentable dans* E *si et seulement s'il est isométrique à un sous-espace d'une ultrapuissance de* E.

Le théorème 1 fournit une nouvelle démonstration du théorème suivant de Dvoretzky [4].

Théorème 2. *Soit* B *un espace de Banach de dimension infinie; alors* ℓ^2 *est finiment représentable dans* B.

En effet d'après un résultat de Tzafriri [5], [6] il existe un espace de Banach E, isomorphe à ℓ^2 qui est finiment représentable dans B. D'après le théorème 1, ℓ^2 est finiment représentable dans E donc dans B.

Soient B un espace de Banach, $x_1, \dots, x_n \in B$. La fonction $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\|$ *sera appelée le type du n-uplet* $(x_1, \dots, x_n)$. Une famille $(x_i)_{i \in D}$ d'éléments de B sera dite *symétrique*, si, quels que soient $i_1, \dots, i_n \in D$, distincts, les 2^n n-uplets $(\varepsilon_1 x_{i_1}, \dots, \varepsilon_n x_{i_n})$ $(\varepsilon_1 = \pm 1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1)$ ont tous le même type (autrement dit $\|\lambda_1 x_{i_1} + \dots + \lambda_n x_{i_n}\| = \| |\lambda_1| x_{i_1} + \dots + |\lambda_n| x_{i_n}\|$ pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$)

D étant un ensemble totalement ordonné, une famille $(x_i)_{i\in D}$ d'éléments de B sera dite <u>écartable</u>, si, quels que soient $i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n \in D$ avec $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ et $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$, les deux n-uplets $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$ ont le même type.

<u>Proposition</u> 2. <u>Soient B un espace de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de B, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$. Il existe un espace de Banach $B' \supset B$, finiment représentable dans B, et une suite $(y_n)_{n\geq 1}$ écartable d'éléments de B' telle que</u>

$$\|x+\lambda_1 y_1+\ldots+\lambda_{k-1}y_{k-1}+\lambda_k y_k\| = \lim_{n\to\mathcal{U}} \|x+\lambda_1 y_1+\ldots+\lambda_{k-1}y_{k-1}+\lambda_k x_n\|$$

<u>pour tout $x\in B$ et</u> $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

On définit une suite croissante $B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_k \subset \ldots$ d'espaces de Banach, en posant $B_0 = B$, $B_{k+1} = B_k^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$. Soit B' le complété de $\bigcup_k B_k$. Il est immédiat, par induction sur n que B_k est finiment représentable dans B, donc B' l'est aussi.

Comme $B_k \supset B$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée d'éléments de B_k, donc définit un élément de $B_k^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} = B_{k+1}$ qu'on désigne par y_{k+1}. Il est donc évident par définition des ultrapuissances, que l'on a

$$\|x+\lambda_1 y_1+\ldots+\lambda_k y_k+\lambda_{k+1}y_{k+1}\| = \lim_{n\to\mathcal{U}} \|x+\lambda_1 y_1+\ldots+\lambda_k y_k+\lambda_{k+1}x_n\|$$

(puisque $x+\lambda_1 y_1+\ldots+\lambda_k y_k \in B_k$).

Soient maintenant $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_k$ des entiers ≥ 1. On montre par induction sur k que $\|x+\lambda_1 y_{i_1}+\ldots+\lambda_k y_{i_k}\| = \|x+\lambda_1 y_{j_1}+\ldots+\lambda_k y_{j_k}\|$ pour $x\in B$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Or on a

$$\|x+\lambda_1 y_{i_1}+\ldots+\lambda_k y_{i_k}\| = \lim_{n\to\mathcal{U}} \|x+\lambda_1 y_{i_1}+\ldots+\lambda_{k-1}y_{i_{k-1}}+\lambda_k x_n\| =$$

$\lim_{n\to\mathcal{U}} \|x+\lambda_1 y_{j_1}+\ldots+\lambda_{k-1}y_{j_{k-1}}+\lambda_k x_n\|$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

$= \|x+\lambda_1 y_{j_1}+\ldots+\lambda_k y_{j_k}\|$. En particulier $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_k})$ et $(y_{j_1}, \ldots, y_{j_k})$ ont le même type. C.Q.F.D.

Proposition 3. Soient E un espace de Banach isomorphe à ℓ^p ($p \geq 1$) et D un ensemble totalement ordonné. Il existe un espace de Banach F finiment représentable dans E et une famille $(X_i)_{i \in D}$ écartable symétrique d'éléments de F, équivalente à la base canonique de $\ell^p(D)$ c'est-à-dire

$$M^{-1}(|\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_n|^p)^{1/p} \leq \|\lambda_1 X_{i_1} + \ldots + \lambda_n X_{i_n}\| \leq M(|\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_n|^p)^{1/p}$$

si $i_1, \ldots, i_n$ sont des éléments de D, distincts (M réel ≥ 1).

On a une base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telle que $M^{-1}(|\lambda_o|^p + \ldots + |\lambda_n|^p)^{1/p} \leq \|\lambda_o x_o + \ldots + \lambda_n x_n\| \leq M(|\lambda_o|^p + \ldots + |\lambda_n|^p)^{1/p}$ (M étant un réel ≥ 1) et $\|x_n\| = 1$. En appliquant la proposition 1, avec un ultrafiltre $\mathcal{D}$ non trivial sur $\mathbb{N}$, on trouve, dans un espace E' contenant E et finiment représentable dans E, une suite écartable $(y_n)_{n \geq 1}$, $\|y_n\| = 1$.

On montre, par récurrence sur k que l'on a

$$M^{-1}(|\mu_o|^p + \ldots + |\mu_\ell|^p + |\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_k|^p)^{1/p} \leq$$

$$\|\mu_o x_o + \ldots + \mu_\ell x_\ell + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_k y_k\| \leq M(|\mu_o|^p + \ldots + |\mu_\ell|^p + |\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_k|^p)^{1/p}$$

En effet, d'après la proposition 1, on a

$$\|\mu_o x_o + \ldots + \mu_\ell x_\ell + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_k y_k\| = \lim_{n,\mathcal{D}} \|\mu_o x_o + \ldots + \mu_\ell x_\ell + \lambda_k x_n +$$

$$\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_{k-1} y_{k-1}\|$$, d'où le résultat d'après l'hypothèse de récurrence. En particulier la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ équivaut (avec la constante M) à la base canonique de ℓ^p.

On définit $z_k^r \in E'$ pour $k \geq 1$, $r \in \mathbb{N}$ en posant $z_k^o = 0$ et

$$z_k^r = (2r)^{-1/p} \sum_{i=0}^{2r-1} (-1)^i y_{2kr+i}$$ pour $r \geq 1$. Dans l'espace de Banach $E'' = (E')^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ (qui est finiment représentable dans E' donc dans E) on définit $Z_k = (z_k^r)_{r \in \mathbb{N}}$ pour $k \geq 1$.

Pour r fixé ≥ 1, la suite d'éléments de E' : $z_1^r, z_2^r, \ldots, z_k^r, \ldots$ équivaut (avec la constante M) à la base canonique de ℓ^p (c'est immédiat d'après le fait que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ a cette propriété). Il en résulte, d'après la définition de la norme dans une ultrapuissance, que la suite $(Z_k)_{k \geq 1}$ équivaut aussi, avec la même constante M, à la base canonique de ℓ^p. On montre que cette suite est de plus symétrique, c'est-à-dire que

$$\|\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_{\ell-1} z_{\ell-1} + \lambda_\ell z_\ell + \lambda_{\ell+1} z_{\ell+1} + \ldots + \lambda_k z_k\| =$$

$$= \|\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_{\ell-1} z_{\ell-1} - \lambda_\ell z_\ell + \lambda_{\ell+1} z_{\ell+1} + \ldots + \lambda_k z_k\| .$$

Pour cela on pose pour $r \geqslant 1$: $\xi_\ell^r \doteq (2r)^{-1/p} \sum_{i=0}^{2r-2} (-1)^i y_{2kr+i}$; $\eta_\ell^r = (2r)^{-1/p} \sum_{i=0}^{2r-2} (-1)^i \cdot y_{2kr+i+1}$.

La suite $(y_n)_{n \geqslant 1}$ étant écartable, les deux k-uplets $(z_1^r, \ldots, z_{\ell-1}^r, \xi_\ell^r, z_{\ell+1}^r, \ldots, z_k^r)$ et $(z_1^r, \ldots, z_{\ell-1}^r, \eta_\ell^r, z_{\ell+1}^r, \ldots, z_k^r)$ ont le même type et par suite

$$\|\lambda_1 z_1^r + \ldots + \lambda_{\ell-1} z_{\ell-1}^r + \lambda_\ell \xi_\ell^r + \lambda_{\ell+1} z_{\ell+1}^r + \ldots + \lambda_k z_k^r\| =$$

$$= \|\lambda_1 z_1^r + \ldots + \lambda_{\ell-1} z_{\ell-1}^r + \lambda_\ell \eta_\ell^r + \lambda_{\ell+1} z_{\ell+1}^r + \ldots + \lambda_k z_k^r\| .$$

D'autre part $\xi_\ell^r - z_\ell^r = (2r)^{-1/p} y_{2\ell r+2r-1}$ et donc $\|\xi_\ell^r - z_\ell^r\| \leqslant (2r)^{-1/p}$.
De même $\|\eta_\ell^r + z_\ell^r\| \leqslant (2r)^{-1/p}$. . On en déduit

$$\Big| \|\lambda_1 z_1^r + \ldots + \lambda_{\ell-1} z_{\ell-1}^r + \lambda_\ell z_\ell^r + \lambda_{\ell+1} z_{\ell+1}^r + \ldots + \lambda_k z_k^r\| - \|\lambda_1 z_1^r + \ldots + \lambda_{\ell-1} z_{\ell-1}^r -$$
$$- \lambda_\ell z_\ell^r + \lambda_{\ell+1} z_{\ell+1}^r + \ldots + \lambda_k z_k^r\| \Big| \leqslant 2.(2r)^{-1/p}$$

et on obtient le résultat annoncé quand $r \longrightarrow \infty$ suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$.

- Soit maintenant F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (non normé) ayant une base (algébrique) équipotente à D, et soit $(X_i)_{i \in D}$ cette base. Tout $X \in F$ s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme $X = \lambda_1 X_{i_1} + \ldots + \lambda_k X_{i_k}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. On définit une norme sur F en posant $\|X\| = \|\lambda_1 Z_1 + \ldots + \lambda_k Z_k\|$. On a alors immédiatement

$$M^{-1}(|\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_k|^p)^{1/p} \leqslant \|\lambda_1 X_{i_1} + \ldots + \lambda_k X_{i_k}\| \leqslant M(|\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_k|^p)^{1/p}.$$

D'autre part F est évidemment finiment représentable dans E" donc aussi dans E. Enfin la famille $(X_i)_{i \in D}$ est écartable et symétrique, puisque la famille $(Z_k)_{k \geqslant 1}$ l'est. C.Q.F.D

Dans la suite on prend $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ muni de l'ordre lexicographique :
$(q,n) \leq (q',n') \Longleftrightarrow q < q'$ ou ($q = q'$ et $n \leq n'$) (pour $q,q' \in \mathbb{Q}, n,n' \in \mathbb{N}$).
On obtient ainsi un espace de Banach F, finiment représentable dans E et une famille $(X_{(q,n)})_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ n \in \mathbb{N}}}$ écartable symétrique d'éléments de F, équivalente (avec la constante M) à la base canonique $e_{(q,n)}$ de $\ell^p(\mathbb{Q} \times \mathbb{N})$. On note $\varphi \longrightarrow X_\varphi$ l'application linéaire de $\ell^p(\mathbb{Q} \times \mathbb{N})$ dans F qui envoie $e_{(q,n)}$ sur $X_{(q,n)}$. On a donc $M^{-1} \|\varphi\|_p \leq \|X_\varphi\| \leq M \|\varphi\|_p$. La preuve du théorème 1 se ramène à montrer que ℓ^p est finiment représentable dans F.

Fixons un entier $\nu > 1$ et un réel δ, $0 < \delta < 1$. Alors il existe deux suites croissantes K_n, N_n d'entiers > 0, tendant vers $+\infty$, telles que

$$\nu^{K_n} \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n} \longrightarrow \delta \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty.$$

En effet, a étant un réel ≥ 0, désignons par $[a]$ sa partie entière et par $\{a\}$ sa partie fractionnaire ($\{a\} = a - [a]$). Posons $\theta = \frac{L(\nu+1)}{L\nu} - 1$.
Alors θ est irrationnel (sinon $\frac{L(\nu+1)}{L\nu} = \frac{m}{n}$, $m,n > 0$, donc $(\nu+1)^n = \nu^m$ ce qui est impossible puisque ν et $\nu+1$ sont premiers entre eux); donc lorsque N décrit $\mathbb{N}$, $\{N\theta\}$ décrit une partie dense de l'intervalle $[0,1[$. On peut donc trouver une suite d'entiers N_n strictement croissante telle que $\{N_n\theta\} \rightarrow \{- \frac{L\delta}{L\nu}\}$ quand $n \rightarrow \infty$. On pose alors $K_n = [N_n\theta] - [- \frac{L\delta}{L\nu}]$; K_n est donc une suite croissante tendant vers $+\infty$. On a $N_n\theta - K_n = \{N_n\theta\} + [- \frac{L\delta}{L\nu}] \rightarrow - \frac{L\delta}{L\nu}$ quand $n \rightarrow \infty$.
Donc $\nu^{K_n - N_n\theta} \longrightarrow \delta$ ce qui est le résultat cherché. C.Q.F.D.

Dans la suite nous appellerons pour abréger "intervalle de $\mathbb{R}$" un intervalle $I \neq \emptyset$ de la forme $[a,b[$ (semi-ouvert à droite); sa longueur sera désignée par $\mu(I)$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n \subset \mathbb{Q}$ en posant $S_n = \left\{ k\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Pour chaque intervalle I de $\mathbb{R}$ (semi-ouvert à droite), on définit dans F :

$$X_I^n(\delta,\nu) = \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\frac{n}{p}} \sum_{r \in S_n \cap I} X_{(r,n)} \quad \text{et} \quad Y_I^n(\delta,\nu) = K_n^{-\frac{1}{p}} \sum_{i=0}^{K_n - 1} X_I^{N_n + i} .$$

$\mathcal{D}$ étant un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$, on définit $Y_I(\delta,\nu)$, dans l'espace $F' = F^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ en posant $Y_I(\delta,\nu) = (Y_I^n(\delta,\nu))_{n \in \mathbb{N}}$ (le fait que cette définition est légitime, c'est-à-dire que $Y_I^n(\delta,\nu)$ est une suite bornée résulte du lemme 1 ci-dessous).

Les valeurs de δ et ν restant fixées pour le moment, nous écrirons pour abréger X_I^n, Y_I^n et Y_I au lieu de $X_I^n(\delta,\nu)$, $Y_I^n(\delta,\nu)$, $Y_I(\delta,\nu)$ respectivement.

Notons que, si $a < b < c$ sont des réels, on a évidemment $X^n_{[a,b[} + X^n_{[b,c[} = X^n_{[a,c[}$ donc $Y^n_{[a,b[} + Y^n_{[b,c[} = Y^n_{[a,c[}$, et par suite $Y_{[a,b[} + Y_{[b,c[} = Y_{[a,c[}$.

Lemme 1. $M^{-p}\left[\mu(I) - (\frac{\nu}{\nu+1})^n\right] \leq \|X_I^n\|^p \leq M^p\left[\mu(I) + (\frac{\nu}{\nu+1})^n\right]$;

$M^{-p}\left[\mu(I) - (\frac{\nu}{\nu+1})^{N_n}\right] \leq \|Y_I^n\|^p \leq M^p\left[\mu(I) + (\frac{\nu}{\nu+1})^{N_n}\right]$;

$M^{-p}\ \mu(I) \leq \|Y_I\|^p \leq M^p\,\mu(I)$.

On définit dans $\ell^p(\mathbb{Q}\times\mathbb{N})$: $\varphi_I^n = (\frac{\nu}{\nu+1})^{\frac{n}{p}} \sum_{r\in S_n\cap I} e_{(r,n)}$ et

$$\psi_I^n = K_n^{-\frac{1}{p}} \sum_{i=0}^{K_n-1} \varphi_I^{N_n+i} .$$

On a donc $X_I^n = X_{\varphi_I^n}$, $Y_I^n = X_{\psi_I^n}$ et d'après les propriétés de l'application $\varphi \longrightarrow X_\varphi$ de $\ell^p(\mathbb{Q}\times\mathbb{N})$ dans F il suffit de montrer que

$$\mu(I) - (\tfrac{\nu}{\nu+1})^n \leq \|\varphi_I^n\|_p^p \leq \mu(I) + (\tfrac{\nu}{\nu+1})^n \qquad (*)$$

et que $$\mu(I) - (\tfrac{\nu}{\nu+1})^{N_n} \leq \|\psi_I^n\|_p^p \leq \mu(I) + (\tfrac{\nu}{\nu+1})^{N_n} \qquad (**)$$

Comme S_n est une subdivision de $\mathbb{R}$ de pas $(\frac{\nu}{\nu+1})^n$ on a (card A désignant le cardinal de l'ensemble fini A) :

$$\left[\operatorname{card}(S_n \cap I)-1\right](\tfrac{\nu}{\nu+1})^n \leq \mu(I) \leq \left[\operatorname{card}(S_n\cap I)+1\right](\tfrac{\nu}{\nu+1})^n .$$

D'autre part, on a $\|\varphi_I^n\|_p^p = (\frac{\nu}{\nu+1})^n \operatorname{card}(S_n\cap I)$, d'où l'inégalité $(*)$

Quand n décrit $\mathbb{N}$, les φ_I^n sont deux à deux étrangers dans $\ell^p(\mathbb{Q}\times\mathbb{N})$. Il en résulte que $\|\psi_I^n\|_p^p = K_n^{-1} \sum_{i=0}^{K_n-1} \|\varphi_I^{N_n+i}\|_p^p$.

Comme on a $\left|\|\varphi_I^{N_n+i}\|_p^p - \mu(I)\right| \leq (\frac{\nu}{\nu+1})^{N_n+i} \leq (\frac{\nu}{\nu+1})^{N_n}$, pour $0\leq i\leq K_n-1$, on en déduit $\left| \| \Psi_I^n \|_p^p - \mu(I) \right| \leq \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}$.   C. Q. F. D.

Lemme 2. Si $I_1, \ldots, I_k$ sont des intervalles disjoints, on a $\| \lambda_1 Y_{I_1} + \ldots + \lambda_k Y_{I_k} \| = \| |\lambda_1| Y_{I_1} + \ldots + |\lambda_k| Y_{I_k} \|$; autrement dit $(Y_{I_1}, \ldots, Y_{I_k})$ est un k-uplet symétrique.

Il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\| \lambda_1 Y_{I_1}^n + \ldots + \lambda_k Y_{I_k}^n \| = \| |\lambda_1| Y_{I_1}^n + \ldots + |\lambda_k| \ Y_{I_k}^n \|$$

ce qui résulte immédiatement de la définition de Y_I^n, et du fait que la famille $(X_i)_{i \in Q \times \mathbb{N}}$ est symétrique. C.Q.F.D.

Etant donnés $x, y \in F$, on dira que x est antérieur à y (ou que y est postérieur à x), si on a $x = c_1 X_{i_1} + \ldots + c_k X_{i_k}$, $y = d_1 X_{j_1} + \ldots + d_\ell X_{j_\ell}$, avec $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_\ell \in Q \times \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_\ell \in \mathbb{R}$ et $i_1 < \ldots < i_k < j_1 \ldots < j_\ell$.

On dira que x et y sont semblables si $x = c_1 X_{i_1} + \ldots + c_k X_{i_k}$ et $y = c_1 X_{j_1} + \ldots + c_k X_{j_k}$ avec $i_1 < \ldots < i_k$ et $j_1 < \ldots < j_k$ $(i, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k \ Q \times \mathbb{N})$. Du fait que la famille $(X_i)_{i \in Q \times \mathbb{N}}$ est écartable, on déduit immédiatement le

Lemme 3. Si $x, y, u, v \in F$, x est semblable à y, u antérieur à x et y, v postérieur à x et y, alors (u,x,v) et (u,y,v) ont le même type.

I, I' étant deux intevalles, $I = [a, b[$, $I' = [a', b'[$, on écrit $I < I'$ si $b < a'$ et $I \leq I'$ si $b \leq a'$. Il est clair que si $I \leq I'$ alors Y_I^n est antérieur à $Y_{I'}^n$.

Nous dirons que I est un δ-intervalle si l'origine de I est un réel $a = r\delta$ pour un $r \in \mathbb{Z}$. Posons alors $\alpha_n = r \, \nu^{K_n} \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}$; quand $n \to \infty$, $\alpha_n \to a$. Désignons par $I^{(n)}$ l'intervalle d'origine α_n de même longueur que I.

Lemme 4 Si I est un δ-intervalle $\|Y^n_{I^{(n)}} - Y^n_I\| \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'origine de $I^{(n)}$ appartient à $S_{N_n}, S_{N_n+1}, \dots, S_{N_n+K_n}$.

La deuxième partie du lemme exprime simplement le fait que
$\alpha_n = r\,\nu^{K_n}\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}$ est un multiple entier de $\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n+i}$ pour $i = 0,1,\dots,K_n$.

On a $I = [a,b[$, $I^{(n)} = [\alpha_n, \beta_n[$ avec $\beta_n = \alpha_n + b-a$ et $\alpha_n \longrightarrow a$ quand $n \longrightarrow \infty$. Donc $Y^n_{I^{(n)}} - Y^n_I = Y^n_{J^n_1} + Y^n_{J^n_2}$ où $\mu(J^n_1) = \mu(J^n_2) = |a - \alpha_n|$.
D'après le lemme 1, on a $\|Y^n_{J^n_1}\|^p \leq M^p\left[\mu(J^n_1) + \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}\right] = M^p\left[|a-\alpha_n| + \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}\right]$, qui tend vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$ puisque $a - \alpha_n \longrightarrow 0$; de même $\|Y^n_{J^n_2}\| \longrightarrow 0$

C.Q.F.D.

Lemme 5 Soient $I_1 \leq \dots \leq I_k < J_1 \leq \dots \leq J_l$ des intervalles de $\mathbb{R}$, et I,J deux δ-intervalles tels que $I_k < I < J_1$, $I_k < J < J_1$ et $\mu(J) = \frac{\nu}{\nu+1}\,\mu(I)$.
Alors les deux $(k+l+1)$-uplets $(Y_{I_1},\dots, Y_{I_k}, Y_I, Y_{J_1},\dots,Y_{J_l})$ et $(Y_{I_1},\dots, Y_{I_k}, \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{1/p} Y_J, Y_{J_1},\dots, Y_{J_l})$ ont le même type.

On considère $n \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $I_k < I^{(n)} < J_1$ et $I_k < J^{(n)} < J_1$.
Comme $\mu(I^{(n)}) = \mu(I)$ et $\mu(J^{(n)}) = \mu(J)$ on a $\mu(J^{(n)}) = \frac{\nu}{\nu+1}\,\mu(I^{(n)})$.
Posons $Z_n = K_n^{-1/p} \sum_{i=0}^{K_n-1} X^{N_n+i+1}_{J^{(n)}}$. On a donc

$$Z_n - Y^n_{J^{(n)}} = K_n^{-1/p}\left[X^{N_n+K_n}_{J^{(n)}} - X^{N_n}_{J^{(n)}}\right]$$

D'après le lemme 1, on a $\|X^{N_n+K_n}_{J^{(n)}}\|^p \leq M^p\mu(J^{(n)}) + M^p\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n+K_n}$
$\leq M^p(\mu(J)+1)$; de même $\|X^{N_n}_{J^{(n)}}\|^p \leq M^p(\mu(J)+1)$. Comme $K_n \longrightarrow +\infty$, on voit que $\|Z_n - Y^n_{J^{(n)}}\| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. D'après le lemme 4, $\|Z_n - Y^n_J\| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$ et donc $Y_J = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'autre part

(lemme 4) on a $Y_I = (Y^n_{I(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ .Il suffit donc de prouver que, pour tout n assez grand les deux $(k+l+1)$-uplets

$$(Y^n_{I_1}, \dots, Y^n_{I_k}, Y^n_{I(n)}, Y^n_{J_1}, \dots, Y^n_{J_l}) \quad \text{et} \quad (Y^n_{I_1}, \dots, Y^n_{I_k}, (\tfrac{\nu+1}{\nu})^{1/p} Z_n, Y^n_{J_1}, \dots, Y^n_{J_l})$$

ont le même type.

On a à prouver que $\| c_1 Y^n_{I_1} + \dots + c_k Y^n_{I_k} + c\, Y^n_{I(n)} + d_1 Y^n_{J_1} + \dots + d_l Y^n_{J_l} \|$ $= \| c_1 Y^n_{I_1} + \dots + c_k Y^n_{I_k} + c\, (\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p} Z_n + d_1 Y^n_{J_1} + \dots + d_l Y^n_{J_l} \|$ (avec

$c_1, \dots, c_k, c, d_1, \dots, d_l \in \mathbb{R}$) . Posons

$\mathcal{U} = c_1 Y^n_{I_1} + \dots + c_k Y^n_{I_k}$, $V = d_1 Y^n_{J_1} + \dots + d_l Y^n_{J_l}$. Alors $\mathcal{U}$ est antérieur à $Y^n_{I(n)}$ et à $(\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p} Z_n$, V leur est postérieur et on a à montrer que $(\mathcal{U}, Y^n_{I(n)}, V)$ et $(\mathcal{U}, (\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p} Z_n, V)$ ont le même type.

D'après le lemme 3, il suffit de montrer que $Y^n_{I(n)}$ et $(\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p} Z_n$ sont semblables. Or on a :

$$Y^n_{I(n)} = K_n^{-1/p} \sum_{i=0}^{K_n-1} \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{(N_n+i)/p} \sum_{r\in I^{(n)}\cap S_{N_n+i}} X_{(r,N_n+i)} \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{1/p} Z_n = K_n^{-1/p} \sum_{i=0}^{K_n-1} \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{(N_n+i)/p} \sum_{r\in J^{(n)}\cap S_{N_n+i+1}} X_{(r,N_n+i+1)}$$

Soient α_n , β_n les origines respectives de $I^{(n)}$, $J^{(n)}$ qui, d'après le lemme 4 appartiennent à S_{N_n+i} pour $i = 0,1,\dots,K_n$. Comme $\mu(J^{(n)}) = \frac{\nu}{\nu+1}\,\mu(I^{(n)})$, il en résulte qu'on a $r \in I^{(n)} \cap S_{N_n+i}$ si et seulement si $\tau(r) \in J^{(n)} \cap S_{N_n+i+1}$ où $\tau(r) = \beta_n + \frac{\nu}{\nu+1}(r-\alpha_n)$. On a donc

$$\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{1/p} Z_n = K_n^{-1/p} \sum_{i=0}^{K_n-1} \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{(N_n+i)/p} \sum_{r\in I^{(n)}\cap S_{N_n+i}} X_{(\tau(r),\,N_n+i+1)}$$

En comparant cette égalité avec l'expression de $Y^n_{I(n)}$ écrite plus haut, et en remarquant que la fonction $\tau : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ respecte la relation d'ordre, on voit que $Y^n_{I(n)}$ et $(\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p} Z_n$ sont semblables. C.Q.F.D.

Nous revenons maintenant à la notation $Y_I(\delta, \nu)$ au lieu de Y_I , parce que nous nous proposons de faire varier δ $(0 < \delta < 1)$ et $\nu \in \mathbb{N}$.

Soit δ_n une suite tendant vers 0, $0 < \delta_n < 1$; pour fixer les idées on prendra $\delta_n = 2^{-n}$; un δ_n - intervalle est donc un intervalle dont l'origine est un rationnel de dénominateur 2^n.

Dans l'espace $F'' = (F')^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$, on définit ($I$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$) :

$$Z_I(\nu) = (Y_I(\delta_n, \nu))_{n \in \mathbb{N}} .$$

On a donc $M^{-p}\,\mu(I) \leq \|Z_I(\nu)\|^p \leq M^p\,\mu(I)$ et, si $I_1, \ldots, I_k$ sont des intervalles disjoints, $\|\lambda_1 Z_{I_1}(\nu) + \ldots + \lambda_k Z_{I_k}(\nu)\| = \||\lambda_1| Z_{I_1}(\nu) + \ldots + |\lambda_k| Z_{I_k}(\nu)\|$ (en effet, d'après les lemmes 1,2, ces relations sont vraies, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ pour les $Y_I(\delta_n, \nu)$).

De plus, si $a < b < c$, a,b,c étant des réels, on a

$$Z_{[a,b[}(\nu) + Z_{[b,c[}(\nu) = Z_{[a,c[}(\nu)$$ (puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{[a,b[}(\delta_n, \nu) + Y_{[b,c[}(\delta_n, \nu) = Y_{[a,c[}(\delta_n, \nu)$).

<u>Lemme 6</u> <u>Soient</u> $I_1 \leq \ldots \leq I_k < J_1 \leq \ldots \leq J_l$ <u>des intervalles de</u> $\mathbb{R}$, <u>et</u> I, J <u>deux intervalles tels que</u> $I_k \leq I \leq J_1$, $I_k \leq J \leq J_1$ <u>et</u> $\mu(J) = \frac{\nu}{\nu+1}\,\mu(I)$. <u>Alors les deux</u> $(k+l+1)$<u>-uplets</u> $(Z_{I_1}(\nu), \ldots, Z_{I_k}(\nu), Z_I(\nu), Z_{J_1}(\nu), \ldots, Z_{J_l}(\nu))$ <u>et</u> $(Z_{I_1}(\nu), \ldots, Z_{I_k}(\nu), (\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p} Z_J(\nu), Z_{J_1}(\nu), \ldots, Z_{J_l}(\nu))$ <u>ont le même type</u>.

On a $I = [a,b[$, $J = [c,d[$ avec $b-a = \frac{\nu+1}{\nu}(d-c)$. On définit $I_{(n)} = [a_n, b_n[$, $J_{(n)} = [c_n, d_n[$ de façon que $a < a_n < b_n < b$, $c < c_n < d_n < d$, $b_n - a_n = \frac{\nu+1}{\nu}(d_n - c_n)$, a_n et c_n étant des rationnels de dénominateur 2^n, $a_n \to a$, $b_n \to b$, $c_n \to c$, $d_n \to d$ quand $n \to \infty$. Il en résulte que $I_{(n)}$, $J_{(n)}$ sont des δ_n-intervalles, $I_k < I_{(n)} < J_1$, $I_k < J_{(n)} < J_1$ et $\mu(J_{(n)}) = \frac{\nu}{\nu+1}\,\mu(I_{(n)})$.

D'après le lemme 5, les deux $(k+l+1)$-uplets

$(Y_{I_1}(\delta_n, \nu), \ldots, Y_{I_k}(\delta_n, \nu)\ Y_{I_{(n)}}(\delta_n, \nu), Y_{J_1}(\delta_n, \nu), \ldots, Y_{J_l}(\delta_n, \nu))$ et

$$(Y_{I_1}(\delta_n,\nu),\dots,Y_{I_k}(\delta_n,\nu)\,,\ (\tfrac{\nu+1}{\nu})^{1/p}\,Y_{J_{(n)}}(\delta_n,\nu),Y_{J_1}(\delta_n,\nu),\dots,\ Y_{J_l}(\delta_n,\nu))$$

ont le même type. On aura donc le résultat cherché en faisant tendre n vers l'infini suivant l'ultrafiltre $\mathcal{D}$, si l'on montre que

$$Z_I(\nu) = (Y_{I_{(n)}}(\delta_n,\nu))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad Z_J(\nu) = (Y_{J_{(n)}}(\delta_n,\nu))_{n\in\mathbb{N}}$$

Or on a $Y_I(\delta_n,\nu) - Y_{I_{(n)}}(\delta_n,\nu) = Y_{[a,a_n[}(\delta_n,\nu) + Y_{[b_n,b[}(\delta_n,\nu)$.

Donc $\|Y_I(\delta_n,\nu) - Y_{I_{(n)}}(\delta_n,\nu)\| \leq \|Y_{[a,a_n[}(\delta_n,\nu)\| + \|Y_{[b_n,b[}(\delta_n,\nu)\|$

$\leq M(a_n-a)^{1/p} + M(b-b_n)^{1/p}$ (lemme 1) quantité qui tend vers 0 quand $n \to \infty$. On a donc $Z_I(\nu) = (Y_I(\delta_n,\nu))_{n\in\mathbb{N}} = (Y_{I_{(n)}}(\delta_n,\nu))_{n\in\mathbb{N}}$; de même pour $Z_J(\nu)$. C.Q.F.D.

Dans l'espace $F''' = (F'')^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ on définit (I étant un intervalle) :

$\mathcal{U}_I = (Z_I(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ (en fait $Z_I(\nu)$ n'est défini que pour $\nu \geq 2$; poser par exemple $Z_I(\nu) = 0$ pour $\nu = 0,1$) .

On a donc $M^{-p}\,\mu(I) \leq \|\mathcal{U}_I\|^p \leq M^p\,\mu(I)$, et, si $I_1,\dots,I_k$ sont des intervalles disjoints, $\|\lambda_1\mathcal{U}_{I_1}+\dots+\lambda_k\mathcal{U}_{I_k}\| = \||\lambda_1|\mathcal{U}_{I_1}+\dots+|\lambda_k|\mathcal{U}_{I_k}\|$

(car ces relations sont vraies pour $Z_I(\nu)$, pour chaque $\nu \geq 2$) .

De plus, si $a<b<c$, a,b,c étant réels, on a $\mathcal{U}_{[a,b[}+\mathcal{U}_{[b,c[} = \mathcal{U}_{[a,c[}$

(puisque, pour $\nu \geq 2$, on a $Z_{[a,b[}(\nu) + Z_{[b,c[}(\nu) = Z_{[a,c[}(\nu)$) .

<u>Lemme 7</u> <u>Soient $I_1 \leq \dots \leq I_k < J_1 \leq \dots \leq J_l$ des intervalles de $\mathbb{R}$, et I,J deux intervalles tels que $I_k \leq I \leq J_1$, $I_k \leq J \leq J_1$ et $\mu(J) = \sigma\,\mu(I)$ (σ réel >0) . Alors les deux $(k+l+1)$-uplets</u>

$$(\mathcal{U}_{I_1},\dots,\mathcal{U}_{I_k},\mathcal{U}_I,\mathcal{U}_{J_1},\dots,\mathcal{U}_{J_l}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{U}_{I_1},\dots,\mathcal{U}_{I_k},\sigma^{-1/p}\mathcal{U}_J,\mathcal{U}_{J_1},\dots,\mathcal{U}_{J_l})$$

<u>ont le même type.</u>

On peut supposer $0 < \sigma \leq 1$ en échangeant au besoin les rôles des deux intervalles I,J . Pour chaque $\nu \geq 2$ on définit l'entier $k_\nu \geq 1$ tel que

$(\frac{\nu}{\nu+1})^{k_\nu-1} \geq \sigma > (\frac{\nu}{\nu+1})^{k_\nu}$. Alors $(\frac{\nu}{\nu+1})^{k_\nu} \to \sigma$ quand $\nu \to \infty$ (puisque $\sigma\frac{\nu}{\nu+1} \leq (\frac{\nu}{\nu+1})^{k_\nu} < \sigma$) .

On a $J = [c,d[$, avec $d-c = \sigma\,\mu(I)$. On définit pour $\nu \geq 2$ un intervalle $J_{(\nu)} = [c,d_\nu[$ avec $d_\nu - c = \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{k_\nu} \mu(I)$. Donc $d_\nu < d$. On a donc $I_k \leq J_{(\nu)} \leq J_1$, et d'après le lemme 6 (appliqué k_ν fois) les deux $(k+l+1)$-uplets $(Z_{I_1}(\nu),\dots,Z_{I_k}(\nu)\ ,\ Z_J(\nu),\ Z_{J_1}(\nu),\dots,Z_{J_l}(\nu))$ et

$$(Z_{I_1}(\nu),\dots,Z_{I_k}(\nu)\ ,\ \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{k_\nu/p} Z_{J_{(\nu)}}(\nu)\ ,\ Z_{J_1}(\nu)\ ,\dots,\ Z_{J_l}(\nu))$$ ont le

même type. On obtiendra donc le résultat cherché en faisant tendre ν vers l'infini suivant l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$, à condition de montrer que

$$\sigma^{-1/p}\ \mathcal{U}_J = \left(\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{k_\nu/p} Z_{J_{(\nu)}}(\nu)\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$$. Comme $\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{k_\nu/p} \longrightarrow \sigma^{-1/p}$

quand $\nu \longrightarrow \infty$, il suffit de montrer que $\mathcal{U}_J = \left(Z_{J_{(\nu)}}(\nu)\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$.

Or on a $Z_J(\nu) - Z_{J_{(\nu)}}(\nu) = Z_{[d_\nu,d[}(\nu)$ donc $\| Z_J(\nu) - Z_{J_{(\nu)}}(\nu)\| \leq M(d-d_\nu)^{1/p}$ qui tend vers 0 quand $\nu \longrightarrow \infty$. On a donc $\mathcal{U}_J = (Z_J(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}} = (Z_{J_{(\nu)}}(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$

C.Q.F.D.

Lemme 8 Soient $I_1 \leq I_2 \leq \cdots \leq I_k$; $J_1 \leq J_2 \leq \cdots \leq J_k$ des intervalles de $\mathbb{R}$ avec $\mu(J_i) = \sigma_i\ \mu(I_i)$ $(i = 1,\dots,k)$, $\sigma_i > 0$. Alors les deux k-uplets $(\mathcal{U}_{I_1},\dots,\mathcal{U}_{I_k})$ et $(\sigma_1^{-1/p}\,\mathcal{U}_{J_1},\dots,\sigma_k^{-1/p}\,\mathcal{U}_{J_k})$ ont le même type.

Supposons d'abord $I_k \leq J_1$. On a alors $I_{i-1} \leq I_i \leq J_{i+1}$, $I_{i-1} \leq J_i \leq J_{i+1}$, et donc, d'après le lemme 7, les deux k-uplets

$$(\mathcal{U}_{I_1},\dots,\mathcal{U}_{I_{i-1}},\ \mathcal{U}_{I_i},\ \sigma_{i+1}^{-1/p}\mathcal{U}_{J_{i+1}},\dots,\sigma_k^{-1/p}\mathcal{U}_{J_k})$$

et $(\mathcal{U}_{I_1},\dots,\mathcal{U}_{I_{i-1}},\ \sigma_i^{-1/p}\mathcal{U}_{J_i},\ \sigma_{i+1}^{-1/p}\mathcal{U}_{J_{i+1}},\dots,\sigma_k^{-1/p}\mathcal{U}_{J_k})$ ont le même type; ce qui donne le résultat cherché en appliquant ainsi k fois le lemme 7.

Dans le cas général, on prend des intervalles $I'_1 \leq \cdots \leq I'_k$ de mêmes longueurs respectives que $I_1,\dots,I_k$, tels que $I'_k \leq I_1$ et $I'_k \leq J_1$. D'après ce qu'on vient de montrer, $(U_{I'_1}, \ldots, U_{I'_k})$ a d'une part le même type que $(U_{I_1}, \ldots, U_{I_k})$, d'autre part le même type que

$$(\sigma_1^{-1/p} U_{J_1}, \ldots, \sigma_k^{-1/p} U_{J_k}) .$$

C.Q.F.D.

Lemme 9 Soient $I_1, \ldots, I_k$ des intervalles de $\mathbb{R}$ deux à deux disjoints. Alors $\|\lambda_1 U_{I_1} + \ldots + \lambda_k U_{I_k}\| = C(|\lambda_1|^p \mu(I_1) + \ldots + |\lambda_k|^p \mu(I_k))^{1/p}$ avec $C = \|U_{[0,1[}\|$, donc $M^{-1} \leq C \leq M$.

Comme on a vu que $\|\lambda_1 U_{I_1} + \ldots + \lambda_k U_{I_k}\| = \||\lambda_1| U_{I_1} + \ldots + |\lambda_k| U_{I_k}\|$, on peut supposer $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$.

On définit les réels $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ de façon que $a_i - a_{i-1} = \lambda_i^p \mu(I_i)$ pour $i = 1, \ldots, k$ et on pose $J_i = [a_{i-1}, a_i[$ $(1 \leq i \leq k)$. D'après le lemme 8, $(U_{J_1}, \ldots, U_{J_k})$ a le même type que $(\lambda_1 U_{I_1}, \ldots, \lambda_k U_{I_k})$ et par suite

$$\|\lambda_1 U_{I_1} + \ldots + \lambda_k U_{I_k}\| = \|U_{J_1} + \ldots + U_{J_k}\| .$$

Mais on a $U_{J_1} + \ldots + U_{J_k} = U_{[0,a_k[}$. D'après le lemme 8, $U_{[0,a_k[}$ et $a_k^{1/p} U_{[0,1[}$ ont le même type, c'est-à-dire la même norme.

Finalement, on a $\|\lambda_1 U_{I_1} + \ldots + \lambda_k U_{I_k}\| = a_k^{1/p} \|U_{[0,1[}\|$

$$= \|U_{[0,1[}\| (|\lambda_1|^p \mu(I_1) + \ldots + |\lambda_k|^p \mu(I_k))^{1/p}$$

C.Q.F.D.

Le lemme 9 montre que le sous-espace fermé de F''' engendré par les U_I, pour tous les intervalles I de $\mathbb{R}$, est isométrique à $L^p(\mathbb{R})$. Comme F''' est finiment représentable dans F, on voit que $L^p(\mathbb{R})$ l'est aussi, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Dacunha-Castelle et J.L. Krivine. Application des ultraproduits à l'étude des espaces de Banach - Studia Math. 41 (1972) p. 315-334.

[2] J. Stern. Some applications of model theory in Banach space theory. à paraître aux Annals of Math. Logic.

[3] Séminaire Maurey-Schwartz - Ecole Polytechnique - Paris - 1973-74 Exposé n°24.

[4] A. Dvoretzky. Somme results on convex bodies and Banach spaces. Proc. Symp. on linear spaces, Jerusalem 1961.

[5] L. Tzafriri. On spaces with unconditional bases ; à paraître, Israël J. of Math.

[6] Séminaire Maurey-Schwartz. Ecole Polytechnique - Paris - 1973-74 Exposé n° 19.