Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

P. Turpin

Convergences de séries dans les espaces d'Orlicz

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 6 bis, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A8_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
ENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

CONVERGENCES DE SERIES DANS LES ESPACES D'ORLICZ

par P. TURPIN

Exposé N° VI bis

Soit (Ω, μ) un espace mesuré quelconque (μ est une mesure positive) et soit une fonction $\varphi : [0,\infty[\times \Omega \longrightarrow [0,\infty[$, $\varphi(t, .)$ étant mesurable sur Ω pour tout $t \geq 0$ et $\varphi(., \omega) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ étant, pour tout $\omega \in \Omega$, croissante, continue à gauche, nulle et continue en 0, non identiquement nulle.

Si G est un espace de Banach, on pose

$$L^{\varphi}(\Omega, \mu, G) = \{X \mid \exists u > 0 : \int_{\Omega} \varphi(\|u\, X(\omega)\|, \omega)\, d\mu(\omega) < \infty\},$$

où les $X : \Omega \longrightarrow G$ sont mesurables. $L^{\varphi}(\Omega, \mu, G)$ est un espace vectoriel topologique métrisable complet avec comme système fondamental de voisinages de 0 l'ensemble des

$$aB(\alpha) = \{X \in L^{\varphi}(\Omega, \mu, G) \mid \int \varphi(\|\frac{X(\omega)}{a}\|, \omega)\, d\mu(\omega) \leq \alpha\}, \quad \alpha > 0,\ a > 0.$$

Dire que $X_n \longrightarrow 0$ dans $L^{\varphi}(\Omega, \mu, G)$, c'est dire que, pour tout scalaire u, $\int \varphi(\|uX_n(\omega)\|, \omega)\, d\mu(\omega) \longrightarrow 0$.

On a la généralisation suivante du corollaire 3, p. VI.8, avec essentiellement la même démonstration (quand μ est une probabilité, on obtient $L^0(\Omega, \mu, G)$ en prenant φ bornée et indépendante de ω).

<u>Théorème</u>. Si (X_n) est une suite de points de $L^{\varphi}(\Omega, \mu, G)$ et si la série $\sum \varepsilon_n X_n$ converge dans $L^{\varphi}(\Omega, \mu, G)$ pour tout $(\varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, alors $\sum c_n X_n$ converge dans $L^{\varphi}(\Omega, \mu, G)$ pour toute suite scalaire bornée (c_n).

On utilise le lemme suivant, qui est une forme d'inégalité de Fubini.

<u>Lemme</u>. Soit (K, ν) un espace de probabilité et soit $\beta > 0$. Si (Ω, μ) est σ-fini, on a, pour toute fonction f positive et mesurable sur $(\Omega \times K, \mu \otimes \nu)$,

$$\int_{\Omega} \varphi(J_{\beta}(f(\omega, y), d\nu(y)), \omega)\, d\mu(\omega) \leq \frac{1}{\beta} \iint_{\Omega \times K} \varphi(f(\omega, y), \omega)\, d\mu(\omega)\, d\nu(y).$$

Démonstration. ① Supposons que φ ne dépende que de la variable t : $\varphi(t,\omega) = \varphi(t)$. $d\varphi$ étant la mesure de Lebesgue-Stieltjès associée à φ, on connaît la formule

$$\int_\Omega \varphi(g(\omega))\, d\mu(\omega) = \int_0^\infty \mu(\{\omega \mid g(\omega) > \xi\})\, d\varphi(\xi)$$

où $g \geq 0$ est mesurable (écrire $\varphi(g(\omega)) = \int_{[0,\, g(\omega)[} d\varphi(\xi)$ et appliquer Fubini):

$$\int_\Omega \varphi(J_\beta(f(\omega, y), d\nu(y)))\, d\mu(\omega) = \int_0^\infty \mu(\{\omega \mid \nu(\{y \mid f(\omega, y) > \xi\} > \beta\})\, d\varphi(\xi)$$

$$\leq \frac{1}{\beta}\int_0^\infty d\varphi(\xi) \int_\Omega \nu(\{y \mid f(\omega, y) > \xi\})\, d\mu(\omega)$$

$$= \frac{1}{\beta}\int_0^\infty \mu\otimes\nu(\{(\omega, y) \mid f(\omega, y) > \xi\})\, d\varphi(\xi) = \frac{1}{\beta}\iint_{\Omega\times K} \varphi(f(\omega, y))\, d\mu(\omega)\, d\nu(y).$$

② Supposons que $\varphi(t,\omega) = \sum_{i\in I} \varphi_i(t)\, \chi_{A_i}(\omega)$ où I est fini ou dénombrable, les $A_i \subset \Omega$ mesurables et deux à deux disjoints (les χ_{A_i} sont les fonctions caractéristiques), les φ_i croissantes, continues à gauche, nulles et continues en 0 :

$$\int_\Omega \varphi(J_\beta(f(\omega, y), d\nu(y)), \omega)\, d\mu(\omega) = \sum_i \int_{A_i} \varphi_i(J_\beta(f(\omega, y), d\nu(y)))\, d\mu(\omega)$$

$$\leq \frac{1}{\beta}\sum_i \iint_{A_i\times K} \varphi_i(f(\omega, y))\, d\mu(\omega)\, d\nu(y) = \frac{1}{\beta}\iint_{\Omega\times K} \varphi(f(\omega,y), \omega)\, d\mu(\omega)\, d\nu(y).$$

③ Cas général : il suffit d'observer que $\varphi(t,\omega)$ est partout limite d'une suite croissante de fonctions $\varphi_n(t,\omega) = \sum_i \varphi_{n,i}(t)\, \chi_{A_{n,i}}(\omega)$ telles qu'en ② ci-dessus.

Posons, pour $n \geq 1$ entier,

$$\varphi_n(t,\omega) = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n}$$

$$\varphi_n(t,\omega) = \inf\{\frac{q}{n}, n\} \quad \text{si} \quad \frac{p}{n} < t \leq \frac{p+1}{n} \quad \text{et si} \quad \frac{q}{n} \leq \varphi(\frac{p}{n}, \omega) < \frac{q+1}{n},$$

avec $p \geq 1$, $q \geq 0$ entiers.

Pour tout ω et tout t, $\varphi_n(t,\omega)$ tend en croissant vers $\varphi(t,\omega)$ (car $\varphi(.,\omega)$ est continue à gauche). Pour tout ω, $\varphi_n(.,\omega)$ est croissante, continue à gauche, nulle et continue en 0. De plus, quand ω parcourt Ω, n fixé, l'ensemble des fonctions $\varphi_n(.,\omega)$ est fini ou dénombrable, puisque chaque $\varphi_n(.,\omega)$ est constante sur tout intervalle $]\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}]$, prend ses valeurs dans l'ensemble fini $\{\frac{q}{n} \mid 0 \leq q \leq n^2\}$ et est croissante ; on vérifie que la partition $(A_{n,i})_{i\in I}$

de Ω ainsi définie est mesurable : φ_n a donc la forme voulue.

Démonstration du théorème. Soit $c = (c_n)$ une suite scalaire telle que $|c_n| \leq 1$ et soit $u \geq 0$. Il faut montrer que $\int_\Omega \varphi(u\|\sum_N^M c_n X_n(\omega)\|, \omega)d\mu(\omega) \longrightarrow 0$ quand $N \to \infty$ et $M \to \infty$.

On peut supposer (Ω, μ) σ-fini. En effet, pour N et M assez grands, et pour tout $\varepsilon \in H = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\int_\Omega \varphi(u\|\sum_N^M \varepsilon_n X_n(\omega)\|, \omega)\, d\mu(\omega) < \infty$, donc $\varphi(u\|\sum_N^M \varepsilon_n X_n(\omega)\|, \omega) > 0$ sur un ensemble σ-fini Ω_ε de valeurs de ω ; c appartenant à l'enveloppe convexe fermée d'une partie dénombrable de H, $\varphi(u\|\sum_N^M c_n X_n(\omega)\|, \omega) > 0$ sur un ensemble σ-fini.

Il existe (p. VI.8) une probabilité Λ sur H, $\rho > 0$, $\beta > 0$ vérifiant

$$\forall \omega \in \Omega, \ \forall N, \ \forall M, \ \|\sum_N^M c_n X_n(\omega)\| \leq \rho J_\beta(\|\sum_N^M \varepsilon_n X_n(\omega)\|, d\Lambda(\varepsilon)),$$

d'où, d'après le lemme,

$$\int_\Omega \varphi(u\|\sum_N^M c_n X_n(\omega)\|, \omega)\, d\mu(\omega) \leq \frac{1}{\beta}\iint \varphi(\rho u\|\sum_N^M \varepsilon_n X_n(\omega)\|, \omega)\, d\mu(\omega)\, d\Lambda(\varepsilon)$$
$$\leq \frac{1}{\beta}\sup_{\varepsilon\in H}\int_\Omega \varphi(\rho u\|\sum_N^M \varepsilon_n X_n(\omega)\|, \omega)\, d\mu(\omega),$$

qui tend vers 0 quand N et M tendent vers ∞.

Remarque. La propriété énoncée dans le théorème pour tout espace $L^\varphi(\Omega, \mu, G)$ ne passe pas au quotient.

On sait en effet qu'il existe des evt métrisables et complets ne vérifiant pas cette propriété ([1], [2]) et on établit facilement que (de même que tout Banach est un quotient d'un $l^1(I)$), tout evt métrisable complet E est le quotient d'un $l^\varphi(I) = \{(t_i) \mid \sum_i \varphi(\|t_i\|, i) < \infty\}$ ($I \subset E\setminus\{0\}$ est dense dans E, $\varphi(t, i) = \|ti\|$ où $\|\cdot\|$ est une "F-norme" définissant la topologie de E).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. ROLEWICZ, C. RYLL-NARDZEWSKI, On unconditional convergence in linear metric spaces, Colloq. Math. 17 (1967), 327-331.

[2] P. TURPIN, Mesures vectorielles pathologiques, C. R. Acad. Sci. Paris 275 (1972), 981-984.