B. Maurey

Nouveaux théorèmes de Nikishin (suite et fin)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 5, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A6_0>

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

NOUVEAUX THEOREMES DE NIKISHIN

(suite et fin)

par B. MAUREY

Exposé N^{o} V

28 Novembre 1973

Nous avons donné dans l'exposé précédent la condition nécessaire et suffisante de Nikishin pour qu'un ensemble $A \subset L^0(\Omega,\mu)$ soit"presque borné dans Λ_1". Nous allons voir dans cet exposé qu'avec une condition supplémentaire sur A (une certaine invariance par "mixage", au sens défini plus loin), la condition de l'exposé précédent implique que A est borné dans Λ_1. A partir de là, nous pourrons retrouver un théorème de S. Sawyer [2].

Soit $(\Omega,\mathscr{C},\mu)$ un espace de probabilité. Nous appellerons "mixage" de $(\Omega,\mathscr{C},\mu)$ la donnée d'une famille $\mathscr{M}$ d'applications $\mathscr{C}$-mesurables de Ω dans lui-même, telle que :

a) $\forall\, M \in \mathscr{M} \quad , \qquad M(\mu) = \mu$.

b) $\forall\, B,C \in \mathscr{C} \quad , \quad \forall\, a > 1 \ , \quad \exists\, M \in \mathscr{M}$ tel que :

$$\mu(B \cap M^{-1}(C)) \quad \leq \quad a\, \mu(B)\, \mu(C) \ .$$

(La signification intuitive est la suivante : soient C et B données. Le choix d'un $M \in \mathscr{M}$ convenable signifie que l'on a "suffisamment mélangé" les points de Ω. Alors, la proportion $\dfrac{\mu(B \cap M^{-1}(C))}{\mu(B)}$ des points de B dont l'image par le mélange M est dans C est $\leq a\, \mu(C)$.)

Un premier exemple de mixage est fourni par les translations d'un groupe compact:

<u>Proposition 1</u> : Soient G un groupe compact et m sa probabilité de Haar. L'ensemble des translations à droite (ou à gauche) définit un mixage de $(G,\mathscr{G},\chi)$ ($\mathscr{G}$: tribu borélienne de G).

<u>Démonstration</u> : Posons si $g \in G$ et $f \in L^0(G,\mathscr{G},m)$: $\tau_g(h) = gh$ (resp. hg) et $(\tau_g f)(h) = f(gh)$ (resp. $f(hg)$). Dans chaque cas on a bien $\tau_g(m) = m$ pour tout $g \in G$. Soient alors B et C deux parties boréliennes de G. On a :

$$\mu(B \cap \tau_g^{-1}(C)) \quad = \quad \int_B (\tau_g\, \chi_C)(h)\; dm(h) \quad .$$

Par ailleurs, en appliquant Fubini :

$$\int \mu(B \cap \tau_g^{-1}(C))\, dm(g) = \int_B dm(h) \int \tau_g\, \chi_C(h)\, dm(g)$$

$$= \int_B dm(h) \int \chi_C(g')\, dm(g')$$

$$= m(B)\, m(C) .$$

Par conséquent, on peut trouver pour tout $a > 1$ un élément $g \in G$ tel que $m(B \cap \tau_g^{-1}(C)) \leq a\, m(B)\, m(C)$, ce qui démontre la proposition.

Revenons au cas général. Si $\mathcal{M}$ est un mixage de $(\Omega,\mathcal{C},\mu)$ et si $M \in \mathcal{M}$, $f \in L^0(\Omega,\mathcal{C},\mu,F)$ (où F est un espace de Banach quelconque) nous définirons $Mf \in L^0(\Omega,\mathcal{C},\mu,F)$ par $(Mf)(\omega) = f(M\omega)$. Nous dirons qu'une partie $A \subset L^0(\Omega,\mathcal{C},\mu)$ est mixable s'il existe un mixage $\mathcal{M}$ de $(\Omega,\mathcal{C},\mu)$ tel que l'on ait :

$$\forall f \in A, \quad \forall M \in \mathcal{M}, \quad \exists g \in A, \quad |Mf| \leq |g| .$$

On obtient alors l'analogue du théorème 1 de l'exposé précédent :

<u>Théorème 1</u> : Soient $(\Omega,\mathcal{C},\mu)$ un espace de probabilité, A une partie mixable de $L^0(\Omega,\mathcal{C},\mu)$, $\varepsilon \in]0,1[$ et $R \geq 0$.

a) Supposons que :
Pour toute suite $(c_n) \in l^1$, et toute suite (f_n) d'éléments de A :

(1) $$J_\varepsilon (\sup_n |c_n f_n|,\mu) \leq R \sum |c_n| .$$

On en déduit :

(2') $$\forall f \in A \qquad \Lambda_1(f,\mu) \leq R/(1-\varepsilon) .$$

b) Inversement, si (2') est réalisée, on a :

$$J_{\varepsilon(1-\varepsilon)} (\sup_n |c_n f_n|,\mu) \leq R \sum |c_n| ,$$

pour toute suite $(c_n) \in l^1$ et toute suite (f_n) d'éléments de A.

Démonstration : Le point b) se démontre comme le point correspondant du théorème 1, exposé IV. Le a) sera obtenu par un léger raffinement de la démonstration de ce même théorème.

Soit $K \geq 0$. Convenons de dire qu'un partie $C \in \mathcal{C}$ est un (N,K)-ensemble si $\mu(C) > 0$ et s'il existe un élément $f \in A$ tel que l'on ait presque sûrement sur C :

$$\mu(C)\ |f| > K \quad .$$

On a vu dans la démonstration du théorème 1, exposé IV, les faits suivants : si on désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des familles (B_i) de (N,R)-ensembles deux à deux disjoints, cet ensemble est inductif pour l'ordre défini par l'inclusion des familles de parties. (Et si $\mathcal{E}$ est vide, on a directement $\Lambda_1(f,\mu) \leq R$ pour tout $f \in A$). Si on considère un élément maximal (B_i), c'est nécessairement une famille dénombrable, et si on pose $B = \bigcup_i B_i$, on a $\mu(B) \leq \varepsilon$.

Soit maintenant ε_1 tel que $\varepsilon < \varepsilon_1 < 1$, et supposons qu'il existe un $(N,R/(1-\varepsilon_1))$ ensemble, c'est-à-dire une partie $C \in \mathcal{C}$ et $f \in A$ tels que l'on ait presque sûrement sur C :

$$\mu(C)\ |f| \ > \ R/(1-\varepsilon_1) \ .$$

Soit $\mathcal{M}$ un mixage adapté à A. On peut trouver $M \in \mathcal{M}$ tel que :

$$\mu(M^{-1}(C) \cap B) \quad \leq \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\ \mu(B)\ \mu(C) \quad \leq \quad \varepsilon_1\ \mu(C) \quad .$$

On en déduit, en posant $D = M^{-1}(C) - B$:

$$\mu(D) \quad \geq \quad (1-\varepsilon_1).\ \mu(C) > 0 \ .$$

D'autre part, A étant mixable, on peut trouver $g \in A$ tel que :

$$|Mf| \leq |g| .$$

On a alors presque sûrement si $\omega \in D$ (Compte tenu de $M\omega \in C$, et de toutes les relations précédentes) :

$$\mu(D) \; |g(\omega)| \; \geq \; (1-\varepsilon_1) \; \mu(C) \; |Mf(\omega)| \; = \; (1-\varepsilon_1) \; \mu(C) \; |f(M(\omega))| > R$$

ce qui prouve que D est un (N,R)-ensemble. Mais D étant disjoint de $B = \bigcup B_i$, cela contredit la maximalité de la famille (B_i). Par conséquent, il n'existe aucun $(N, R/(1-\varepsilon_1))$-ensemble. On en déduit comme dans l'exposé IV :

$$\forall\, f \in A \;, \quad \Lambda_1(f,\mu) \;\leq\; R/(1-\varepsilon_1) \;.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon_1 > \varepsilon$, la démonstration est achevée.

<u>Remarque 1</u> : On pourrait se permettre, en perdant sur les constantes, de remplacer les conditions de mixage et de "mixable" par :

$$\forall\, a > a_o \qquad \mu(B \cap M^{-1}(C)) \leq a \; \mu(B) \; \mu(C) \quad \text{et} \quad |Mf| \leq K \; |g|$$

(nous avons pris dans la démonstration $a_o = K = 1$).

Soient E et F deux espaces de Banach, $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ un espace de probabilité et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^o(\Omega,\mathcal{C},\mu,F)$. Nous dirons que u est "mixable" si l'ensemble $A = \{\omega \rightarrow \|u(x)(\omega)\|_F ;\; x \in E, \|x\| \leq 1\}$ est mixable. Donnons un exemple :

<u>Lemme 1</u> : Soient $(\Omega,\mathcal{C},\mu)$ un espace de probabilité, F un espace de Banach, E un espace de Banach de fonctions mesurables (éventuellement à valeurs vectorielles) sur Ω, et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^o(\Omega,\mathcal{C},\mu,F)$.

S'il existe un mixage $\mathcal{M}$ de $(\Omega,\mathcal{C},\mu)$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{M}$:

a) $x \in E \Rightarrow Mx \in E$ et $\|Mx\| \leq \|x\|$

b) $\|M(u(x))(\omega)\|_F \leq \|u(Mx)(\omega)\|_F$ p.s

l'opérateur u est mixable. Cela est vrai a fortiori si u commute à $\mathcal{M}$, c'est-à-dire $u(Mx) = M(u(x))$, et en particulier si $(\Omega,\mathcal{C},\mu) = (G,\mathcal{G},m)$ (groupe compact) et si u est un opérateur invariant par translation (à gauche ou à droite, cf. Proposition 1).

On obtient :

<u>Corollaire</u> : Soient E et F deux espaces de Banach, $(\Omega,\mathcal{C},\mu)$ un espace de probabilité et u un opérateur linéaire continu "mixable" de E dans $L^0(\Omega,\mathcal{C},\mu,F)$. Pour que u soit continu de E dans $\Lambda_q(\Omega,\mathcal{C},\mu,F)$ $(1 \leq q < \infty)$ il faut et il suffit qu'il existe un $\varepsilon \in]0,1[$ et K_ε tels que l'on ait pour toute suite (x_n) d'éléments de E :

$$J_\varepsilon(\sup_n \|u(x_n)(\omega)\|_G, d\mu(\omega)) \leq K_\varepsilon (\Sigma \|x_n\|^q)^{1/q} .$$

La démonstration est identique à celle du corollaire 2 du théorème 1, exposé IV, compte tenu de la remarque évidente qui suit : si $A \subset L^0(\Omega,\mathcal{C},\mu)$, et si $\alpha > 0$ est donné, A est mixable si et seulement si l'ensemble $\{f^\alpha ; f \in A\}$ est mixable (en effet $(Mf)^\alpha = M(f^\alpha)$).

<u>Remarque 2</u> : Supposons que l'espace de Banach F soit muni d'une topologie σ pour laquelle la norme soit mesurable (c'est-à-dire que pour tout borélien B sur $\mathbb{R}$, $\{x \in F ; \|x\| \in B\}$ est un borélien pour σ. C'est par exemple le cas si F est un dual H', et si σ est la topologie $\sigma(H',H)$.) On définit alors l'espace $L^0(\Omega,\mathcal{C},\mu,F_\sigma)$ comme l'espace des fonctions mesurables de Ω dans F_σ, muni de la topologie définie par les $J_\alpha(f,\mu)$, $\alpha \in]0,1[$, dont la définition reste inchangée. (Cet espace a été introduit dans [3], lemme (XVII,2,1)). Le résultat du corollaire reste valable si on remplace $L^0(\Omega,\mathcal{C},\mu,F)$ par $L^0(\Omega,\mathcal{C},\mu,F_\sigma)$*. En effet, seules interviennent les fonctions mesurables réelles $\omega \to \|u(x)(\omega)\|_F$.

---

* σ vectorielle moins fine que la topologie de la norme. Cette condition est supposée réalisée implicitement dans toute la suite.

<u>Théorème 2</u> : Soient E un espace de Banach, F un espace de Banach muni d'une topologie σ pour laquelle la norme est mesurable, $(\Omega,\mathcal{C},\mu)$ un espace de probabilité et $q \in]0,2]$. Si E est de type q-Rademacher, tout opérateur linéaire continu <u>mixable</u> de E dans $L^0(\Omega,\mathcal{C},\mu,F_\sigma)$ est en fait continu de E dans $\Lambda_q(\Omega,\mathcal{C},\mu,F_\sigma)$.

La démonstration est identique à celle du théorème 2 de l'exposé IV : on y a vu en effet que les conditions de l'énoncé ci-dessus impliquent que pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe K_ε telle que l'on ait pour toute suite (x_n) d'éléments de E :

$$J_\varepsilon(\sup_n \|u(x_n)(\omega)\|_F, d\mu(\omega)) \leq K_\varepsilon \, (\Sigma \|x_n\|^q)^{1/q} .$$

Il suffit alors d'appliquer le corollaire du théorème 1 et la remarque 2.

<u>Corollaire</u> : Soient G un groupe compact, m sa probabilité de Haar et $q \in [1,2]$. Tout opérateur linéaire continu u, invariant par translation (à gauche ou à droite) de $L^q(G,\mathcal{G},m)$ dans $L^0(G,\mathcal{G},m)$ (ou plus généralement dans $L^0(G,\mathcal{G},m,F_\sigma)$) est de type faible (q,q) c'est-à-dire continu de L^q dans Λ^q.

<u>Démonstration</u> : L^q est de type q-Rademacher (exposé III) et u est mixable d'après le lemme 1.

<u>Théorème de Sawyer</u> [1], [2]. Soit $(\Omega,\mathcal{C},\mu)$ un espace de probabilité, et soit (T_n) une suite d'opérateurs linéaires continus de $L^q(\Omega,\mathcal{C},\mu)$ dans $L^0(\Omega,\mathcal{C},\mu)$, $1 \leq q < \infty$, telle que :

a) $\forall f \in L^q$ p.s $\sup_n |T_n(f)\ (\omega)| < \infty$.

b) Il existe un mixage $\mathcal{M}$ de $(\Omega,\mathcal{C},\mu)$ tel que :

$$\forall M \in \mathcal{M} , \ M(\sup_n |T_n f|) \leq \sup_n |T_n(Mf)| .$$

Il existe alors une constante K telle que :

$$\forall\ f \in L^q \qquad \Lambda_r\ (\sup_n |T_n(f)|, \mu) \leq K\ \|f\|,$$

en posant $r = \inf(q,2)$.

Démonstration : Définissons un opérateur linéaire u de $L^q(\Omega,\mathcal{C},\mu)$ dans $L^o(\Omega,\mathcal{C},\mu,\ \sigma(l^\infty,l^1))$ par :

$$u(f)\ (\omega) = (T_n(f)(\omega))_n \quad .$$

Cet opérateur est continu d'après le théorème du graphe fermé. (On utilise le lemme (XVII,2,1) de [3]).

D'autre part, l'hypothèse b) se traduit par :

$$\|M(u(x))(\omega)\|_{l^\infty} \leq \|u(Mx)(\omega)\|_{l^\infty} \quad ,$$

donc u est mixable d'après le lemme 1 (puisque $f \to Mf$ est une isométrie de L^q pour chaque $M \in \mathcal{M}$). Pour finir, il suffit de rappeler que L^q, $1 \leq q < \infty$, est de type r-Rademacher, $r = \inf(q,2)$, et d'appliquer le théorème 2.

Si on suppose dans l'énoncé du théorème de Sawyer que les opérateurs (T_n) sont positifs, on peut remplacer $r = \inf(q,2)$ par q dans le résultat : c'est le théorème de Sawyer dans le cas positif. Nous allons voir comment retrouver ce résultat. Nous considérerons des espaces de Banach E vérifiant :

(*) E est ordonné, et $0 < x < y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$.

(**) $\forall\ x,y \in E$, sup (x,y) existe et $\|\,|x|\,\| = \|x\|$ (où $|x| = \sup(x,-x)$).

Si F est ordonné, on ordonne $L^o(\Omega,\mathcal{C},\mu,F)$ ou $L^o(\Omega,\mathcal{C},\mu,F_\sigma)$ de façon évidente.

<u>Théorème 2 bis</u> : Soient E et F deux espaces de Banach vérifiant (*) et (**), F étant muni d'une topologie σ pour laquelle la norme est mesurable, $(\Omega,\mathcal{C},\mu)$ un espace de probabilité et $q \in [1,+\infty[$. On suppose qu'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie (x_i) d'éléments de E :

$$\|\sup x_i\| \leq C \left(\Sigma \|x_i\|^q\right)^{1/q} \quad .$$

Dans ce cas, tout opérateur linéaire continu, positif et mixable de E dans $L^0(\Omega,\mathcal{C},\mu,F_\sigma)$ est en fait continu de E dans $\Lambda_q(\Omega,\mathcal{C},\mu,F_\sigma)$.

<u>Démonstration</u> : Soient $(x_1,\ldots,x_n) \in E$. On a, puisque u est positif :

$$\text{p.s} \quad : \qquad \sup |u(x_i)(\omega)| \leq u(\sup |x_i|)(\omega) \quad .$$

Donc, en utilisant (*), (**), l'hypothèse sur E et la continuité de u :

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\sup \|u(x_n)(\omega)\|, d\mu(\omega)) &= J_\varepsilon(\sup \| \, |u(x_n)(\omega)| \, \|, d\mu(\omega)) \\ &\leq J_\varepsilon(\|\sup |u(x_n)(\omega)| \, \|, d\mu(\omega)) \\ &\leq J_\varepsilon(\|u(\sup |x_i|)(\omega)\|, d\mu(\omega)) \\ &\leq K_\varepsilon \, \|\sup |x_i| \, \| \\ &\leq C \, K_\varepsilon \, \left(\Sigma \|x_i\|^q\right)^{1/q} \quad . \end{aligned}$$

Les techniques précédentes semblent échouer lorsque la mesure est infinie. Nous allons cependant étudier un cas très particulier où la méthode peut s'étendre.
Posons si $f \in L^0(\mathbb{R}^n,\lambda,F)$, λ désignant la mesure de Lebesgue

$$f_\alpha(t) = \alpha^n f(\alpha t) \qquad\qquad (\alpha > 0) \quad .$$

La propriété essentielle de cette transformation est la suivante :

$$\lambda \, \{t \, ; \|f(t)\| > c\} = \alpha^n \, \lambda \, \{t \, ; \|f_\alpha(t)\| > \alpha^n c\} \, ,$$

ce qui implique :

$$\Lambda_1(f,\mu) = \Lambda_1(f_\alpha,\mu) \quad ; \quad \|f\|_{L^1} = \|f_\alpha\|_{L^1} \quad .$$

Proposition 2 : Soient E et F deux espaces de Banach, u un opérateur linéaire continu de $L^1(\mathbb{R}^n,\lambda,E)$ dans $L^0(\mathbb{R}^n,\lambda,F)$, invariant par translation, et tel que :

$$\forall\, \alpha > 0 \;, \quad \forall\, f \;, \; \text{p.s} \; : \|u(f_\alpha)(\omega)\| \;\geq\; \|(u(f))_\alpha(\omega)\| \;.$$

Dans ce cas, l'opérateur u est continu de $L^1(\mathbb{R}^n,\lambda,E)$ dans $\Lambda_1(\mathbb{R}^n,\lambda,F)$.

Démonstration : Considérons l'opérateur v de $L^1(\mathbb{R}^n,\lambda,E)$ dans $L^0([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],\lambda,F)$ défini par :

$$v(f) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \circ u(f) \;.$$

D'après le corollaire du théorème 2, exposé IV, il existe pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ une partie mesurable $A_\varepsilon \subset [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ telle que $\lambda\{ |t| \leq \frac{1}{2} \; ; \; t \notin A_\varepsilon\} \leq \varepsilon$ et une constante K_ε telle que :

$$\forall\, c > 0 \qquad \lambda\{t \;;\; \|\chi_{A_\varepsilon}\, u(f)\,(t)\| > c\} \;\leq\; \frac{K_\varepsilon}{c} \;, \text{ lorsque } \|f\| \leq 1 \;.$$

Cela s'écrit encore, en utilisant la fonction J définie sur $\mathbb{R}$ par $J(t) = 0$ pour $|t| \leq 1$, $J(t) = 1$ pour $|t| > 1$:

$$\int_{|t| \leq \frac{1}{2}} \chi_{A_\varepsilon}(t)\; J\Big(\frac{\|u(f)(t)\|}{c}\Big) dt \;\leq\; \frac{K_\varepsilon}{c} \;.$$

L'opérateur u étant invariant par translation, on aura aussi :

$$\int_{|t| \leq \frac{1}{2}} \chi_{A_\varepsilon}(t-s)\; J\Big(\frac{\|u(f)(t)\|}{c}\Big) dt \;\leq\; \frac{K_\varepsilon}{c} \;.$$

On obtient en integrant lorsque $s \in [-1,+1]$:

$$\int_{|t| \leq \frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^{+1} \chi_{A_\varepsilon}(t-s)\, ds\right) J\left(\frac{\|u(f)(t)\|}{c}\right) dt \leq 2\frac{K_\varepsilon}{c} .$$

Or :

$$\int_{-1}^{+1} \chi_{A_\varepsilon}(t-s)\, ds = \lambda\{A_\varepsilon \cap [t-1,t+1]\} \geq \lambda(A_\varepsilon) \geq (1-\varepsilon)$$

(car $|t| \leq \frac{1}{2}$)

d'où :

$$\int_{|t| \leq \frac{1}{2}} J\left(\frac{\|u(f)(t)\|}{c}\right) dt \leq 2\frac{K_\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{c} ,$$

c'est-à-dire :

$$\lambda\{|t| \leq \tfrac{1}{2} \; ; \; \|u(f)(t)\| > c\} \leq \frac{\|f\| \, K'_\varepsilon}{c} .$$

Soit alors c tel que $0 < c < \infty$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n,\lambda,E)$ et $m \in \mathbb{N}$. On aura en utilisant l'hypothèse sur u :

$$\lambda\{|t| \leq \tfrac{m}{2} \; ; \; \|u(f)(t)\| > c\} \leq m^n \lambda\{|t| \leq \tfrac{1}{2} \; ; \; \|u(f_m)(t)\| > m^n c\}$$

$$\leq m^n \frac{K'_\varepsilon \|f_m\|}{m^n c} = \frac{K'_\varepsilon \|f\|}{c} ,$$

et on achève la démonstration en faisant tendre m vers l'infini.

<u>Remarque 3</u> : La situation de la proposition 2 est celle que l'on rencontre dans deux cas importants : si u est un opérateur de convolution sur $\mathbb{R}^n$, défini par un noyau K(x) homogène de degré -n (intégrales singulières), u vérifie les hypothèses de la proposition 2. Mais pratiquement il ne semble pas beaucoup plus simple de montrer que u opère continument de L^1 dans L^0 plutôt que de montrer directement qu'il opère de L^1 dans Λ_1. Un autre cas est celui de la fonction maximale de Hardy-Littlewood, sur $\mathbb{R}$:

$$f^*(x) = \sup_{\alpha < x < \beta} \frac{1}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta f(t)\, dt \quad .$$

On peut considérer $f \to f^*$ comme la donnée d'un opérateur linéaire de L^1 dans $L^0(\mathbb{R},\lambda,\sigma(L^\infty(\mathbb{R}^2),L^1(\mathbb{R}^2)))$ en posant :

$u(f)(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ définie par :

$$(\alpha,\beta) \to \frac{1}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta f(t)dt \quad \text{si } \alpha < x < \beta, \ 0 \text{ sinon} .$$

Ici encore, l'opérateur u vérifie les hypothèses de la proposition 2.

Ce qui précède ne nous permet pas de répondre à la question suivante, suggérée par le corollaire du théorème 2 : un opérateur linéaire continu invariant par translation de $L^1(\mathbb{R}^n,\lambda)$ dans $L^0(\mathbb{R}^n,\lambda)$ est-il automatiquement continu de L^1 dans Λ_1 ?

****

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. GARSIA : Topics in almost everywhere convergence (Lectures in advanced mathematics).

[2] S. SAWYER : Maximal inequalities of weak type, Ann. Math. 84 p.157-173, (1966).

[3] Séminaire L. SCHWARTZ 1969/1970.

****