B. MAUREY

Nouveaux théorèmes de Nikishin

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 4, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A5_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

NOUVEAUX THEOREMES DE NIKISHIN

par B. MAUREY

Exposé N° IV

21 Novembre 1973

Cet exposé est consacré à la démonstration de résultats de E.M. Nikishin [1] et [2], sous une forme très légèrement différente de la version originale. Nous allons tout d'abord rappeler un certain nombre de conventions et de notations : si G est un espace de Banach et (Ω,μ) un espace de probabilité, $L^{o}(\Omega,\mu,G)$ désignera l'espace vectoriel des (classes de) fonctions μ-mesurables de Ω dans G. La topologie de $L^{o}(\Omega,\mu,G)$ (topologie de la convergence en probabilité) est définie par les "jauges" :

$$\alpha \in]0,1[,\ J_\alpha(\varphi,\mu) = J_\alpha(\varphi(\omega),d\mu(\omega)) = \inf\ (c \geq 0\ ;\ \mu\ \{\omega\ ;\ \|\varphi(\omega)\|_G > c\} \leq \alpha)\ .$$

On vérifie facilement que :

$$J_\alpha(\varphi+\psi,\mu) \leq J_{\alpha/2}(\varphi,\mu) + J_{\alpha/2}(\psi,\mu)$$

et si φ est réelle ≥ 0

$$J_\alpha(\varphi^p,\mu) = (J_\alpha(\varphi,\mu))^p\ .$$

Nous allons travailler avec les espaces "L^p faibles", c'est-à-dire les espaces que nous noterons [♦] $\Lambda_p(\Omega,\mu,G)$ des fonctions $\varphi \in L^{o}(\Omega,\mu,G)$ telles que

$$\sup_{c>0}\ c^p\ \mu\ (\omega\ ;\ \|\varphi(\omega)\|_G > c) < \infty\ .$$

Nous poserons :

$$\Lambda_p(\varphi,\mu) = \sup_{c>0}\ c\ (\mu\ \{\|\varphi\| > c\})^{1/p} = \sup_{c>0}\ \alpha^{1/p}\ J_\alpha(\varphi,\mu)\ .$$

♦ Cet espace est noté classiquement $L^{p,\infty}$ (espace de Lorentz) mais nous préférons simplifier la notation.

Retenons en particulier les inégalités :

$$J_{\alpha}(\varphi,\mu) \leq \alpha^{-1/p} \Lambda_p(\varphi,\mu) \leq \alpha^{-1/p} \|\varphi\|_{L^p} \quad .$$

On peut montrer que Λ_p est p-normable pour $p<1$, et normable pour $p>1$ (mais Λ_1 n'est pas normable si μ n'est pas triviale !)

Nous dirons qu'une partie de $L^0(\Omega,\mu)$ est "presque bornée dans Λ_1" si pour tout $\varepsilon>0$ il existe une partie mesurable $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, telle que $\mu(\Omega-\Omega_\varepsilon)\leq\varepsilon$, et telle que les restrictions $f\chi_{\Omega_\varepsilon}$ des éléments f de A constituent une partie bornée de Λ_1, c'est-à-dire :

$$\sup_{f\in A} \Lambda_1 (f\chi_{\Omega_\varepsilon},\mu) < \infty \, .$$

Le théorème fondamental qui suit donne (sous la forme de son corollaire 1) une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie A de $L^0(\Omega,\mu)$ soit "presque bornée dans Λ_1" :

<u>Théorème 1</u> : a) Soient (Ω,μ) un espace de probabilité, $\varepsilon\in\,]0,1[$ et $R>0$. Soit A une partie de $L^0(\Omega,\mu)$ telle que :

$$(1)\begin{cases}\text{Pour toute suite de réels } (c_n)\text{, et toute suite } (f_n) \text{ d'éléments de A :}\\[2ex] \Sigma\,|c_n| \leq 1 \Rightarrow \mu\,\{\,\omega\,;\, \sup\limits_n |c_n f_n(\omega)| > R\,\} \leq \varepsilon\end{cases}$$

$$\text{(c'est-à-dire : } J_\varepsilon\,(\sup_n |c_n f_n|,\mu) \leq R\,\Sigma\,|c_n|)$$

On a alors :

$$(2)\begin{cases}\text{Il existe une partie mesurable } \Omega_\varepsilon \text{ de } \Omega\text{, telle que } \mu(\Omega-\Omega_\varepsilon)\leq\varepsilon\text{, et}\\ \text{telle que :}\\ \forall\, c>0\ ,\ \forall\, f\in A,\ \mu\,\{\,\omega\in\Omega_\varepsilon\ ;\ |f(\omega)| > Rc\,\} \leq 1/c\end{cases}$$

(soit encore $\Lambda_1(\chi_{\Omega_\varepsilon} f,\mu) \leq R)$.

b) Inversement, si (2) est réalisée, on en déduit :

$$\Sigma\ |c_n| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \mu\ \{\ \omega\ ;\ \sup\ |c_n\ f_n(\omega)|\ >\ R/\varepsilon\ \}\ \leq\ 2\varepsilon\ .$$

Démonstration : Montrons a). Soit $A \subset L^o(\Omega,\mu)$ vérifiant (1). Convenons de dire qu'une partie μ-mesurable $B \subseteq \Omega$ est un N-ensemble si $\mu(B) > 0$, et s'il existe $f \in A$ tel que :

pour μ-presque tout $\omega \in B$, $\qquad \mu(B)\ |f(\omega)|\ >\ R$.

Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des familles (B_i) de N-ensembles deux à deux disjoints (c'est-à-dire : p.s disjoints). Supposons tout d'abord $\mathcal{E}$ non vide, et ordonnons $\mathcal{E}$ par $(B_i) \prec (C_j)$ si et seulement si la famille (B_i) est une sous-famille de la famille (C_j). Pour cet ordre $\mathcal{E}$ est trivialement inductif.

Soit (B_i) un élément maximal de $\mathcal{E}$. Puisque μ est finie et que les B_i sont deux à deux disjoints, la famille est dénombrable et nous pouvons supposer $i \in \mathbb{N}$.

Par définition des N-ensembles, il existe pour chaque i un élément $f_i \in A$ tel que :

$$\mu(B_i)\ |f_i|\ >\ R \text{ sur } B_i\ ,$$

donc :

$$\sup_i\ \mu(B_i)\ |\ f_i\ |\ >\ R \quad \text{sur } B = \bigcup_i\ B_i\ .$$

Posons $c_i = \mu(B_i)$. On a $\Sigma\ |c_i| \leq 1$ puisque les B_i sont deux à deux disjoints, donc par (1) : $\mu(B) \leq \varepsilon$.

Posons $\Omega_\varepsilon = \Omega - B$, et soient $c > 0$, $f \in A$. Posons $D = \{\omega \in \Omega_\varepsilon ; |f(\omega)| > Rc\}$. On a nécessairement $\mu(D) \leq 1/c$, sinon D est un N-ensemble (sur D on aurait $|f| > Rc \geq R/\mu(D)$), disjoint de B, ce qui contredit la maximalité de (B_i). Donc :

$$\forall\, c > 0,\ \forall\, f \in A \quad \mu\,\{\omega \in \Omega_\varepsilon \; ; \; |f(\omega)| > Rc\} \leq 1/c \ .$$

Si l'ensemble $\mathcal{E}$ est vide, il n'existe aucun N-ensemble. Soient alors $c > 0$, $f \in A$, et posons $D = \{\omega \in \Omega ; |f(\omega)| > Rc\}$. On a directement $\mu(D) \leq 1/c$, sinon D est un N-ensemble (même raisonnement que ci-dessus). La condition (2) est alors réalisée avec $\Omega_\varepsilon = \Omega$.

Démontrons b). Supposons (2) réalisée. Soient (c_n) telle que $\Sigma\, |c_n| \leq 1$ et (f_n) une suite d'éléments de A. Posons :

$$B_n = \{\ \omega \in \Omega_\varepsilon \; ; \; |c_n\, f_n(\omega)| > R/\varepsilon\} \ .$$

D'après (2), on a $\mu(B_n) \leq \varepsilon\, |c_n|$, donc $\mu(\cup\, B_n) \leq \varepsilon$.

Or :

$$\{\omega \, ; \sup_n |c_n\, f_n(\omega)| > R/\varepsilon\} \subset (\Omega - \Omega_\varepsilon) \cup (\cup\, B_n) \ ,$$

donc :

$$\mu\ \{\ \omega \, ; \sup_n |c_n\, f_n(\omega)| > R/\varepsilon\ \} \leq 2\varepsilon \ ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème. On obtient immédiatement à partir du théorème 1 :

<u>Corollaire 1</u> : Soient (Ω,μ) un espace de probabilité, et A une partie de $L^0(\Omega,\mu)$. Pour que A soit "presque bornée dans Λ_1", il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe C_ε tel que :

$$\forall\, (c_n) \in l^1\ ,\ \forall\, (f_n) \in A, \qquad J_\varepsilon\, (\sup_n |c_n\, f_n|, \mu) \leq C_\varepsilon\, \Sigma\, |c_n| \ .$$

Remarque 1 : En utilisant le théorème du graphe fermé, on peut voir que la condition du corollaire est équivalente à la suivante :

$$\forall\, c_n \in l^1 \;, \; \forall\, (f_n) \in A, \qquad c_n\, f_n(\omega) \to 0 \quad \mu \text{ p.s.}$$

Soient (Ω,μ) un espace de probabilité, E et G deux espaces normés, u un opérateur linéaire de E dans $L^0(\Omega,\mu,G)$. Nous dirons que u est "presque continu de E dans $\Lambda_q(\Omega,\mu,G)$", $0 < q < \infty$, si l'image u(B) de la boule unité de E est "presque bornée dans $\Lambda_q(\Omega,\mu,G)$", c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, $\mu(\Omega - \Omega_\varepsilon) \le \varepsilon$, et :

$$\sup_{\|x\|_E \le 1} \Lambda_q\,(\chi_{\Omega_\varepsilon} u(x),\mu) < \infty .$$

Corollaire 2 : Soient E et G deux espaces de Banach, (Ω,μ) un espace de probabilité, u un opérateur linéaire de E dans $L^0(\Omega,\mu,G)$ et $q \in \,]0,+\infty[$. Pour que u soit "presque continu de E dans $\Lambda_q(\Omega,\mu,G)$" il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε tel que l'on ait pour toute suite (x_n) de vecteurs de E :

$$J_\varepsilon\,(\sup_n \|u(x_n)(\omega)\|_G \,,d\mu(\omega)) \;\le\; C_\varepsilon\,(\Sigma\,\|x_n\|^q)^{1/q} \qquad .$$

(En d'autres termes, l'opérateur $\tilde{u}$ qui associe à $(x_n) \in l^q(E)$ la suite $(u(x_n)(\omega))$ est continu de $l^q(E)$ dans $L^0(\Omega,\mu,c_0(G))$) ♦.

Démonstration : Considérons l'ensemble

$$A \;=\; \{\; \|u(x)(\omega)\|^q \;;\; x \in E,\; \|x\| \le 1 \;\} \quad .$$

♦ $c_0(G)$ est l'espace des suites $(y_n) \in G$, telles que $\lim_n \|y_n\| = 0$, normé par $\sup_n \|y_n\|$.

Si $g_n \in A$, $g_n = \|u(x_n)(\omega)\|^q$, et $c_n \in \mathbb{R}$:

$$J_\varepsilon(\sup_n |c_n g_n|, \mu) = J_\varepsilon(\sup_n |c_n| \, \|u(x_n)\|^q, \mu)$$

$$= (J_\varepsilon(\sup_n \|u(|c_n|^{1/q} x_n)\|, \mu))^q$$

$$\leq C_\varepsilon^q \; \Sigma \, |c_n| ,$$

ce qui permet de conclure en se ramenant au corollaire 1.

Théorème 2 : Soit E un espace normé de type q-Rademacher, $0 < q \leq 2$. Pour tout espace de Banach G et tout espace de probabilité (Ω,μ), tout opérateur linéaire continu de E dans $L^0(\Omega,\mu,G)$ est "presque continu de E dans $\Lambda_q(\Omega,\mu,G)$."

La démonstration utilisera le lemme :

Lemme : Soient G un espace de Banach, $(x_1,\ldots,x_n) \in G$, $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ la suite des variables de Rademacher :

$$\forall \alpha < \frac{1}{2} , \; \sup_i \|x_i\| \leq J_\alpha(\Sigma \, x_i \, \varepsilon_i(t), dt) . \;\diamond$$

Démontrons maintenant le théorème 2. Rappelons l'inégalité de Fubini :

$$J_\alpha(J_\beta(f(x,y), d\mu(x)), d\nu(y)) \leq J_\gamma(J_\delta(f(x,y), d\nu(y)), d\mu(x)),$$

lorsque $\gamma + \delta \leq \alpha\beta$ ([4], proposition (XXIV, 2,4)).

Soit $\varepsilon > 0$ donné, et choisissons γ et δ tels que $\gamma + \delta \leq \varepsilon/3$. On aura puisque u est continu :

$$\forall x \in E , \quad J_\delta(u(x), \mu) \leq K_\delta \|x\| ;$$

$\diamond$ Démonstration du lemme : page 9.

et puisque E est de type q-Rademacher :

$$J_\gamma\,(\Sigma\, x_i\ \varepsilon_i(t),dt) \leq K_\gamma\,(\Sigma\,\|x_i\|^q)^{1/q} ,$$

pour toute suite (x_i) dans E. Pour montrer que u est "presque continu de E dans $\Lambda_q(\Omega,\mu,G)$", nous utiliserons le corollaire 2 du théorème 1 : soit (x_i) une suite (dont un nombre fini d'éléments seulement sont non nuls) dans E. On a en utilisant le lemme :

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(\sup_i \|u(x_i)(\omega)\|_G,d\mu(\omega)) &\leq J_\varepsilon\,(J_{1/3}(\sum_i u(x_i)(\omega)\ \varepsilon_i(t),dt),d\mu(\omega))\\
&\leq J_\gamma\,(J_\delta\,(u(\sum_i x_i\ \varepsilon_i(t))(\omega),d\mu(\omega)),dt)\\
&\leq K_\delta\ \ J_\gamma(\ \|\Sigma\, x_i\ \varepsilon_i(t)\|,dt)\\
&\leq K_\delta\, K_\gamma\ (\Sigma\,\|x_i\|^q)^{1/q} ,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque 2</u> : Lorsque $q=2$ et $G=\mathbb{R}$, nous avons vu dans ([3], exposé XII, proposition 6) un résultat plus fort : si E est de type 2-Rademacher (ou de type 2-stable : les deux notions coïncident d'après l'exposé III) tout opérateur linéaire continu u de E dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$ est "presque continu de E dans $L^2(\Omega,\mu)$", au lieu de Λ_2. Cela n'est plus vrai lorsque G est un espace de Banach quelconque. Soit en effet (f_n) une suite de variables aléatoires 1-stable sur un espace de probabilité (Ω,μ), et posons $g_n = \sqrt{|f_n|}$.

On vérifie facilement que si $\Sigma\,|c_n|^2<\infty$, $c_n\,g_n \to 0$ presque sûrement.
On peut alors définir un opérateur $u : l^2 \to L^0(\Omega,\mu,c_o)$ par $u(c_n) = (c_n\ g_n(\omega))$.

L'espace l^2 est de type 2, mais cet opérateur n'est pas "presque continu de l^2 dans $L^2(\Omega,\mu,c_o)$". Si cela était, on aurait d'après ([3], exposés X-XI, XII), pour toute suite $(x_n) \in l^2$:

$$\Sigma \|x_n\|^2 < \infty \Rightarrow \text{p.s,} \quad \Sigma \|u(x_n)(\omega)\|^2_{c_o} < \infty .$$

Prenons $x_n = c_n e_n$ (e_n : même vecteur de la base canonique). On devrait avoir :

$$\Sigma \ c_n^2 < \infty \Rightarrow \text{p.s,} \quad \Sigma \ |c_n g_n|^2 < \infty ,$$

soit encore :

$$\Sigma \ |c_n| < \infty \Rightarrow \Sigma \ |c_n f_n| < \infty$$

presque sûrement.

Or cela est faux. On sait que :

$\Sigma|c_n f_n| < \infty$ p.s si et seulement si $\Sigma \ |c_n| \ (\mathrm{Log} \frac{1}{|c_n|} + 1) < \infty$, ([4], proposition (XXVI,2,4)), ce qui n'est pas impliqué par $\Sigma \ |c_n| < \infty$.

<u>Corollaire</u> : Soient E et G deux espaces de Banach. Tout opérateur linéaire continu de E dans un espace $L^0(\Omega,\mu,G)$ est "presque continu de E dans $\Lambda_1(\Omega,\mu,G)$".

<u>Démonstration</u> : Tout Banach est de type 1-Rademacher |

****

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. NIKISHIN : Resonance theorems and superlinear operators, Transl. of Uspekhi. Mat. Nauk, Vol XXV, n°6, Nov. Déc. 1970.

[2] E.M. NIKISHIN : Izvestia. Akad. Nauk. S.S.S.R., tome 36, n°4, 1972.

[3] Séminaire Maurey-Schwartz 1972/1973.

[4] Séminaire Laurent Schwartz 1969/1970.

****

Démontrons le lemme : soit $\beta = 2\alpha < 1$. On aura :

$$2\,\|x_i\| = J_\beta\,(2x_i\varepsilon_i(t),dt)$$

$$= J_\beta\,[(x_i\varepsilon_i(t) + \sum_{j\neq 1} x_j\varepsilon_j(t) + (x_i\varepsilon_i(t) - \sum_{j\neq 1} x_j\varepsilon_j(t)),dt]$$

$$\leq J_\alpha\,(x_i\varepsilon_i(t) + \sum_{j\neq i} x_j\varepsilon_j(t),dt) + J_\alpha\,(x_i\varepsilon_i(t) - \sum_{j\neq i} x_j\varepsilon_j(t),dt)$$

$$= 2\,J_\alpha\,(\Sigma\, x_j\varepsilon_j(t),dt),$$

puisque la suite est symétrique.

****