

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

« Type » des espaces normés

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1973-1974), exp. n° 3, p. 1-11

[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1973-1974\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974__A4_0)

© Séminaire Maurey-Schwartz  
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES  
17, rue Desaix  
75016 Paris

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

"TYPE" DES ESPACES NORMES  
-----

par G PISIER

Exposé N° III

14 Novembre 1973



L'objet de cet exposé est de comparer les différentes notions de "type" d'un espace normé introduites par plusieurs auteurs (cf. [1], [2], [4]).

On appelle suite stable d'ordre  $p$  sur un espace de probabilité  $(\Omega, P)$  une suite de v.a sur  $(\Omega, P)$  indépendantes, équidistribuées suivant une loi dont la transformée de Fourier est  $e^{-|t|^p}$ .

Soit  $p \in ]0, 2]$ , on note  $p^* = \begin{cases} p & \text{si } p < 2 \\ +\infty & \text{si } p = 2 \end{cases}$ .

**Définition** : Soient  $E, F$  deux espaces quasi-normés et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Nous dirons que  $u$  est de type  $p$ -Rademacher [resp. de type  $p$ -stable] s'il existe  $r \in ]0, \infty[$  (resp.  $r \in ]0, p^*[$ ) et une constante  $C$  vérifiant : pour toute famille finie  $(x_n)$  dans  $E$

$$\left( \int \left\| \sum \varepsilon_n(t) u(x_n) \right\|^r dt \right)^{1/r} \leq C \left( \sum \|x_n\|^p \right)^{1/p}$$

$$\text{(resp. } \left( \int \left\| \sum f_n(t) u(x_n) \right\|^r dt \right)^{1/r} \leq C \left( \sum \|x_n\|^p \right)^{1/p} \text{)}$$

où  $(\varepsilon_n)$  est la suite des variables de Rademacher sur  $([0, 1], dt)$  (resp. où  $(f_n)$  est une suite stable d'ordre  $p$  sur  $([0, 1], dt)$ .) Nous dirons qu'un espace quasi-normé est de type  $p$ -Rademacher (resp. stable) si l'identité de cet espace est de type  $p$ -Rademacher (resp. stable).

Il est évident que la restriction d'un opérateur de type  $p$ -Rademacher (resp. stable) est de type  $p$ -Rademacher (resp. stable). On peut vérifier également (cf. [4], exposés X, XI, proposition 1) que tout quotient d'un espace de type  $p$ -Rademacher (resp. stable) est de type  $p$ -Rademacher (resp. stable).

### III.1 bis

De plus il est trivial que si un opérateur est de type  $p$ -Rademacher, il est a fortiori de type  $q$ -Rademacher quand  $q$  est inférieur à  $p$ .

La définition précédente est simplifiée par les deux résultats suivants (cf. [4], exposé VI) :

Théorème (Kahane) : Soit  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $p$  et  $q$  deux réels positifs ; il existe des constantes universelles  $R_{p,q}^\alpha$  telles que l'on ait : pour tout espace  $\alpha$ -normé  $E$  et toute famille finie  $(x_n)$  dans  $E$ ,

$$(K) \quad \left( \int \|\sum \varepsilon_n(t) x_n\|^p dt \right)^{1/p} \leq R_{p,q}^\alpha \left( \int \|\sum \varepsilon_n(t) x_n\|^q dt \right)^{1/q} .$$

L'analogie pour les lois stables de ce théorème est du à Hoffmann-Jørgensen :

Théorème : Soit  $p \in ]0, 2]$ , soit  $\alpha \in ]0, 1]$  et soient  $r, q$  deux réels dans  $]0, p^*[$  ; il existe des constantes universelles  $S_{r,q}^{\alpha,p}$  telles que l'on ait :

pour tout espace  $\alpha$ -normé  $E$  et toute famille finie  $(x_n)$  dans  $E$ ,

$$(H) \quad \left( \int \|\sum f_n(t) x_n\|^r dt \right)^{1/r} \leq S_{r,q}^{\alpha,p} \left( \int \|\sum f_n(t) x_n\|^q dt \right)^{1/q}$$

où  $(f_n)$  est une suite stable d'ordre  $p$  sur  $([0,1], dt)$ .

### III.2

Rappel : Soit  $E$  un e.v.t. Une suite de v.a sur  $(\Omega, P)$  à valeurs dans  $E$  est une suite symétrique si, pour toute suite  $(\xi_n)$  de nombres égaux à  $+1$  ou  $-1$ , la suite  $(\xi_n \varphi_n)$  a même loi sur  $E^{\mathbb{N}}$  que la suite  $(\varphi_n)$ .

Toute suite de v.a indépendantes suivant chacune une loi symétrique est une suite symétrique. En particulier  $(\varepsilon_n)$  est une suite symétrique, de même que toute suite stable.

Nous aurons besoin du lemme élémentaire suivant :

Lemme 1 : a) Soit  $(X_n)$  une suite de v.a sur  $(\Omega, P)$  à valeurs dans  $E$ , la suite de v.a  $(Y_n)$  définie sur  $(\Omega, P) \times ([0, 1] dt)$  par  $Y_n(\omega, t) = X_n(\omega) \varepsilon_n(t)$  est une suite symétrique. De plus, si  $(X_n)$  est une suite symétrique,  $(Y_n)$  a la même loi sur  $E^{\mathbb{N}}$  que  $(X_n)$ .

b) Si  $(\varphi_n)$  est une suite symétrique de v.a.r sur  $(\Omega, P)$  la suite de v.a.r  $(\varepsilon_n \otimes |\varphi_n|)$  sur  $([0, 1] dt, \Omega, P)$  a la même loi (sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ) que la suite  $(\varphi_n)$ .

Démonstration : Soit  $P_{(X_n)}$  la loi sur  $E^{\mathbb{N}}$  de la suite  $(X_n)$ . On vérifie

aisément que :

$$\forall (\xi_n) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$$

$$P_{(Y_n)} = \int dt P_{(\varepsilon_n(t) X_n)} = \int dt P_{(\xi_n \varepsilon_n(t) X_n)} = P_{(\xi_n Y_n)} .$$

De plus si  $(X_n)$  est une suite symétrique :

$$P_{(Y_n)} = \int dt P_{(\varepsilon_n(t) X_n)} = \int dt P_{(X_n)} = P_{(X_n)} ,$$

ce qui démontre l'assertion a).

La deuxième partie résulte des égalités :

$$P(\varepsilon_n \otimes | \varphi_n |) = \int dP(\omega) P(\varepsilon_n | \varphi_n(\omega)) = \int dP(\omega) P(\varepsilon_n \varphi_n(\omega)) = P(\varphi_n) .$$

**Proposition 1** : Soit  $(\varphi_n)$  une suite symétrique de v.a.r intégrables sur  $(\Omega, P)$ , soit  $E$  un espace normé et  $(x_n)$  une suite finie dans  $E$  ; on a :

$$\forall p \in [1, \infty[ , \inf_n \|\varphi_n\|_{L^1} (\int \|\sum \varepsilon_n(t) x_n\|^p dt)^{1/p} \leq (\int \|\sum \varphi_n(\omega) x_n\|^p dP(\omega))^{1/p} .$$

**Démonstration** : Si  $t$  est fixé :

$$\| \int dP(\omega) [\sum \varepsilon_n(t) | \varphi_n(\omega) | x_n] \| \leq \int dP(\omega) \| \sum \varepsilon_n(t) | \varphi_n(\omega) | x_n \|$$

d'où :

$$\| \sum \varepsilon_n(t) x_n \|_{\varphi_n} \|_{L^1}^p \leq \int dP(\omega) \| \sum \varepsilon_n(t) | \varphi_n(\omega) | x_n \|^p$$

soit en intégrant :

$$(\int \|\sum \varepsilon_n(t) x_n \|_{\varphi_n} \|_{L^1}^p dt)^{1/p} \leq (\int dt dP(\omega) \|\sum \varepsilon_n(t) | \varphi_n(\omega) | x_n \|^p)^{1/p} .$$

D'après le principe de contraction (cf. par exemple [4], exposé VII, lemme 1) :

$$\inf \|\varphi_n\|_{L^1} (\int \|\sum \varepsilon_n(t) x_n \|^p dt)^{1/p} \leq (\int \|\sum \varepsilon_n(t) x_n \|_{\varphi_n} \|_{L^1}^p dt)^{1/p} .$$

On conclut alors aisément puisque, par le lemme 1.b,

$$(\int dt dP(\omega) \|\sum \varepsilon_n(t) | \varphi_n(\omega) | x_n \|^p)^{1/p} = (\int dP(\omega) \|\sum \varphi_n(\omega) x_n \|^p)^{1/p} .$$

Soit  $(\varphi_n)$  une suite de v.a.r sur  $(\Omega, P)$ , soit  $E, F$  deux espaces quasi-normés et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  ; nous dirons que  $u$  est de type  $p$ - $[\varphi_n]$  s'il existe une constante  $C$  telle que pour toute famille finie  $(x_n)$  dans  $E$  on ait

$$\int \|\sum u(x_n) \varphi_n(\omega)\| dP(\omega) \leq C (\sum \|x_n\|^p)^{1/p} .$$

### III.4

**Proposition 2 :** Soit E un espace quasi-normé, F un espace normé et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  ; soit p un réel dans  $]1, 2]$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) Il existe une suite de v.a.r  $(\varphi_n)$  sur  $(\Omega, P)$  vérifiant  $\inf_n \|\varphi_n\|_{L^1} > 0$  et telle que u soit de type p- $[\varphi_n]$ .
- ii) u est de type p-Rademacher.
- iii) u est de type p- $[\varphi_n]$  pour toute suite symétrique  $(\varphi_n)$  de v.a.r sur  $(\Omega, P)$  vérifiant  $\sup_n \|\varphi_n\|_{L^p} < +\infty$ .

**Démonstration :** i)  $\Rightarrow$  ii) : i) entraîne trivialement que u est de type p- $[\varepsilon_n \otimes \varphi_n]$  ; alors, le lemme 1, la proposition 1 et la condition  $\inf_n \|\varepsilon_n \otimes \varphi_n\|_{L^1} = \inf_n \|\varphi_n\|_{L^1}$  montrent que u est de type p-Rademacher.

ii)  $\Rightarrow$  iii) : D'après (K), si ii) est vérifiée il existe  $C > 0$  tel que :  $\forall (x_n) \in E^{(\mathbb{N})}$ ,

$$\int \left\| \sum \varepsilon_n(t) u(x_n) \right\| dt \leq C \left( \sum \|x_n\|^p \right)^{1/p} ;$$

d'où si  $\omega$  est fixé :

$$\int \left\| \sum \varepsilon_n(t) \varphi_n(\omega) u(x_n) \right\| dt \leq C \left( \sum \|x_n\|^p |\varphi_n(\omega)|^p \right)^{1/p}$$

d'où en intégrant :

$$\begin{aligned} \int \left\| \sum \varepsilon_n(t) \varphi_n(\omega) u(x_n) \right\| dt dP(\omega) &\leq C \int \left( \sum \|x_n\|^p |\varphi_n(\omega)|^p \right)^{1/p} dP(\omega) \\ &\leq C \left( \sum_n \|x_n\|^p \|\varphi_n\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \\ &\leq C \sup_n \|\varphi_n\|_{L^p} \left( \sum \|x_n\|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

on conclut alors par le lemme 1.a.



Enfin iii)  $\Rightarrow$  i) est trivial. (c.q.f.d.)

**Corollaire 1** : Avec les hypothèses de la proposition, si  $u$  est de type  $p$ -stable il est de type  $p$ -Rademacher.

**Démonstration** : En effet,  $u$  est de type  $p$ -stable ssi il est de type  $p$ -[ $f_n$ ] où  $(f_n)$  est une suite stable d'ordre  $p$  ; de plus, on a :

$$\inf_n \|f_n\|_{L^1} = \|f_1\|_{L^1} > 0$$

puisque la suite  $(f_n)$  est équidistribuée.

**Remarque** : La réciproque du corollaire précédent est fautive car l'identité de  $L^p$  est de type  $p$ -Rademacher mais n'est pas de type  $p$ -stable (cf. par exemple [4], exposé XVIII, proposition 3).

Néanmoins, on a la :

**Proposition 3** : Soit  $E, F$  deux espaces quasi-normés, soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et soit  $p \in ]0, 2]$ . Si  $u$  est de type  $p$ -Rademacher il est de type  $q$ -stable pour tout  $q < p$ .

**Démonstration** : Soit  $r \in ]0, q[$ , l'hypothèse (et (K)) entraîne l'existence de  $C$  telle que

$$\left( \int \| \sum \varepsilon_n(t) u(x_n) \|^r dt \right)^{1/r} \leq C \left( \sum \|x_n\|^p \right)^{1/p} ;$$

d'où si  $\theta$  est fixé

$$\left( \int \sum \varepsilon_n(t) f_n(\theta) u(x_n) \|^r dt \right)^{1/r} \leq C^r \left( \sum \|x_n\|^p |f_n(\theta)|^p \right)^{r/p}$$

où  $(f_n)$  est une suite stable d'ordre  $q$  sur  $([0, 1] dt)$ , d'où en intégrant :

$$\left( \int \sum \varepsilon_n(t) f_n(\theta) u(x_n) \|^r dt d\theta \right)^{1/r} \leq \left( \int \left( \sum |f_n(\theta)|^p \|x_n\|^p \right)^{r/p} d\theta \right)^{1/r} ;$$

III.6

comme  $(f_n)$  est une suite symétrique, le premier membre vaut (cf. lemme 1.a)  
 $(\int \|\Sigma |f_n(\theta) u(x_n)\|^r d\theta)^{1/r}$  ; il suffit pour conclure d'appliquer le :

Lemme 2 : Soit  $(\alpha_n)$  une suite de réels, soient  $r, q, p$  des réels tels que  
 $0 < r < q < p \leq 2$ , soit  $(f_n)$  une suite stable d'ordre  $q$ . On a :

$$\|f_1\|_r (\Sigma |\alpha_n|^q)^{1/q} \leq (\int (\Sigma |\alpha_n|^p |f_n(\theta)|^p)^{r/p} d\theta)^{1/r} \leq \frac{\|f_1\|_r \|g_1\|_q}{\|g_1\|_r} (\Sigma |\alpha_n|^q)^{1/q}$$

où  $g_1$  est une v.a.r. dont la loi est stable d'ordre  $p$ .

Démonstration : Soit  $(g_n)$  une suite stable d'ordre  $p$ .

Soit  $(\beta_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ , on utilisera les relations bien connues (cf. [4], exposés  
 X - XI, lemme 2) :

$$(1) \quad (\Sigma |\beta_n|^p)^{1/p} \|g_1\|_r = (\int |\Sigma \beta_n g_n(t)|^r dt)^{1/r}$$

$$(2) \quad (\Sigma |\beta_n|^q)^{1/q} \|f_1\|_r = (\int |\Sigma \beta_n f_n(t)|^r dt)^{1/r} .$$

On déduit de (1) :

$$(\int (\Sigma |\alpha_n|^p |f_n(\theta)|^p)^{r/p} d\theta)^{1/r} = \frac{1}{\|g_1\|_r} (\int |\Sigma \alpha_n f_n(t) g_n(\theta)|^r dt d\theta)^{1/r} .$$

Par (2) cette dernière intégrale vaut :

$$\frac{\|f_1\|_r}{\|g_1\|_r} (\int (\Sigma |\alpha_n|^q |g_n(\theta)|^q)^{r/q} d\theta)^{1/r} ;$$

mais, d'une part :

$$(\int (\Sigma |\alpha_n|^q |g_n(\theta)|^q)^{r/q} d\theta)^{1/r} \leq (\int d\theta \Sigma |\alpha_n|^q |g_n(\theta)|^q)^{1/q} = (\Sigma |\alpha_n|^q)^{1/q} \|g_1\|_q$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \left( \int (\sum |\alpha_n|^q |g_n(\theta)|^q)^{r/q} d\theta \right)^{1/r} &\geq \left( \sum \left( \int |\alpha_n|^r |g_n(\theta)|^r d\theta \right)^{q/r} \right)^{1/q} \\ &= \|g_1\|_r (\sum |\alpha_n|^q)^{1/q} \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.

Corollaire 2 : Soit  $\alpha \in ]0,1]$ , tout espace  $\alpha$ -normé est de type  $\beta$ -stable pour tout  $\beta \in ]0,\alpha[$ .

Démonstration : En effet, un tel espace est trivialement de type  $\alpha$ -Rademacher.

Corollaire 3 : Si  $p \in ]0,2]$ , tout espace  $L^p$  est de type  $q$ -stable pour tout  $q \in ]0,p[$ . Si  $p \in [2,\infty[$ , tout espace  $L^p$  est de type  $q$ -stable pour tout  $q \in [0,2]$ .

Démonstration : Soit  $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré.

Si  $p \in ]0,2]$ , soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille finie dans  $L^p(\mu)$ , on a :  $\forall \omega \in \Omega$

$$\left( \int |\sum \varepsilon_n(t) f_n(\omega)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left( \int |\sum \varepsilon_n(t) f_n(\omega)|^2 dt \right)^{1/2} = (\sum |f_n(\omega)|^2)^{1/2} \leq (\sum |f_n(\omega)|^p)^{1/p}$$

d'où en intégrant :

$$\left( \int \|\sum \varepsilon_n(t) f_n\|_p^p dt \right)^{1/p} \leq \left( \sum \|f_n\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Si  $p \in [2,\infty[$ , d'après les inégalités de Khintchine (cf. par exemple [5], exposé XXVI, p. 7), il existe une constante  $B_p$  telle que :

$$\forall (\alpha_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \quad \left( \int |\sum \alpha_n \varepsilon_n(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq B_p (\sum |\alpha_n|^2)^{1/2}.$$

On a donc :  $\forall x_1, \dots, x_n \in L^p(\Omega, \mu)$

$$\left( \int |\sum x_n(\omega) \varepsilon_n(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq B_p (\sum |x_n(\omega)|^2)^{1/2}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left( \int \left| \sum x_n(\omega) \varepsilon_n(t) \right|^p dt d\mu(\omega) \right)^{1/p} &\leq B_p \left( \int \left( \sum |x_n(\omega)|^2 \right)^{p/2} d\mu(\omega) \right)^{1/p} \\ \left( \int \left\| \sum x_n \varepsilon_n(t) \right\|_{L^p}^p dt \right)^{1/p} &\leq B_p \left[ \int |x_n(\omega)|^p d\mu(\omega) \right]^{2/p}^{1/2} \\ &\leq B_p \left( \sum \|x_n\|_{L^p}^2 \right)^{1/2}; \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $L^p(\Omega, \mu)$  est de type 2-Rademacher.

**Proposition 4** : Soit  $p \in ]0, 2]$ , tout espace normé de type p-stable est de type q-stable pour tout  $q \in ]0, p]$ .

**Démonstration** : D'après le corollaire 2, on peut supposer  $p > 1$ . L'énoncé est alors simplement le rapprochement de la proposition 3 et du corollaire 1.

**Remarque** : La proposition précédente est vraie pour un espace quasi-normé. En effet, soit  $(f_n)$  une suite stable d'ordre p, il résulte des résultats de J. Hoffmann-Jørgensen [2] que si  $x_n$  est une suite d'éléments d'un espace quasi-normé complet telle que la série  $\sum x_n$  converge p.s, alors la série  $\sum x_n \varepsilon_n$  converge p.s. On en déduit que si un espace quasi-normé est de type p-stable, il est de type p-Rademacher et on conclut comme ci-dessus.

J. Hoffmann-Jørgensen a remarqué l'équivalence du "type p-Rademacher" et d'une certaine forme de la loi des grands nombres :

**Proposition 5** : Soit  $p \in ]1, 2]$ , soient E et F deux espaces de Banach et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  ; les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) u est de type p-Rademacher.
- ii) Pour toute suite  $(X_n)$  de v.a sur  $(\Omega, P)$  indépendantes centrées à valeurs dans E, la condition

$$\sum_n \frac{\int \|X_n\|^p}{n^p} < \infty \quad \text{implique que} \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u(X_j)$$

converge p.s vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ .

iii) Il existe une constante C telle que :

$$\forall (x_n) \in E^{(\mathbb{N})}, \quad \frac{1}{n} \int \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j(t) u(x_j) \right\| dt \leq C \left( \sum_{j=1}^n \frac{\|x_j\|^p}{j^p} \right)^{1/p}.$$

iv) Il existe une constante C telle que, pour toute suite  $(X_n)$  de v.a sur  $(\Omega, P)$  indépendantes centrées à valeurs dans E, on ait

$$\frac{1}{n} \int \left\| \sum_{j=1}^n u(X_j(\omega)) \right\| dP(\omega) \leq C \left( \sum_{j=1}^n \int \frac{\|X_j(\omega)\|^p}{j^p} dP(\omega) \right)^{1/p}.$$

Démonstration : Soit  $(X_n)$  une suite de v.a indépendantes sur  $(\Omega, P)$  à valeurs dans E, la suite symétrisée soit  $(\tilde{X}_n)$  est définie sur  $(\Omega, P) \times (\Omega, P)$  par :

$$\tilde{X}_n(\omega, \omega') = X_n(\omega) - X_n(\omega').$$

Il est clair que  $(\tilde{X}_n)$  est une suite symétrique.

i)  $\Rightarrow$  ii) : Supposons i) : il existe  $C > 0$  tel que :

$$\forall (x_n) \in E^{(\mathbb{N})}, \quad \left( \int \left\| \sum \varepsilon_n(t) u(x_n) \right\| dt \right) \leq C \left( \sum \|x_n\|^p \right)^{1/p}$$

d'où :

$$\int \left\| \sum \varepsilon_n(t) \frac{u(\tilde{X}_n(\omega, \omega'))}{n} \right\| dt \leq C \left( \sum \frac{\|\tilde{X}_n(\omega, \omega')\|^p}{n^p} \right)^{1/p}$$

soit en intégrant :

$$\int \left\| \sum \varepsilon_n(t) \frac{u(\tilde{X}_n(\omega, \omega'))}{n} \right\| dt dP(\omega) dP(\omega') \leq C \left( \sum \frac{\|\tilde{X}_n\|^p}{n^p} \right)^{1/p};$$

on en déduit (cf. lemme 1.a) :  $\left\| \sum \frac{u(\tilde{X}_n)}{n} \right\|_1 \leq C \left( \sum \frac{\|\tilde{X}_n\|^p}{n^p} \right)^{1/p}$  ; mais si les

variables  $(X_n)$  sont supposées centrées :

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \Omega, \quad \left\| \sum \frac{u(X_n(\omega))}{n} \right\| &= \left\| \int dP(\omega') \left[ \sum \frac{u(\tilde{X}_n(\omega, \omega'))}{n} \right] \right\| \\ &\leq \int dP(\omega') \left\| \sum \frac{u(\tilde{X}_n(\omega, \omega'))}{n} \right\|, \end{aligned}$$

d'où en intégrant :

$$\left\| \sum \frac{u(X_n)}{n} \right\|_1 \leq \left\| \sum \frac{u(\tilde{X}_n)}{n} \right\|_1.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \|\tilde{X}_n\|_p &= \left( \int \|\tilde{X}_n(\omega, \omega')\|^p dP(\omega) dP(\omega') \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \int (\|X_n(\omega)\| + \|X_n(\omega')\|)^p dP(\omega) dP(\omega') \right)^{1/p} \\ &\leq 2 \|X_n\|_p ; \end{aligned}$$

on a donc établi finalement :

$$\left\| \sum \frac{u(X_n(\cdot))}{n} \right\|_1 \leq 2C \left( \sum \frac{\|X_n\|_p^p}{n^p} \right)^{1/p}.$$

Comme les variables  $u(X_n(\cdot))$  sont indépendantes, on en déduit que  $\sum \frac{u(X_n)}{n}$  converge presque sûrement, donc, par le lemme de Kronecker, que

$\frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n u(X_j) \right)$  converge p.s vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

ii)  $\Rightarrow$  iii) . On applique ii) aux suites de la forme  $(X_n(\cdot)) = (\varepsilon_n(\cdot)x_n)$

où  $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$  : 
$$\sum \frac{\|x_n\|^p}{n^p} < \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j(t) u(x_j) \xrightarrow{p.s} 0.$$

On déduit des inégalités (K) que si  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j(t) u(x_j) \xrightarrow{p.s} 0$ , alors

$\frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j(\cdot) u(x_j) \right)$  converge vers 0 dans  $L^1(E)$ . On obtient alors iii) par

un argument de graphe fermé.

♦ Lemme de Kronecker : Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments d'un espace de Banach telle que la série  $\sum \frac{x_n}{n}$  est convergente, alors  $\frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^{j=n} x_j \right)$  converge vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

iii) ⇒ iv) se démontre de manière analogue à i) ⇒ ii).

iv) ⇒ iii) est trivial.

iii) ⇒ i) . Si iii) est vérifié, on a :  $\forall (x_n) \in E^{(\mathbb{N})}$ ,

$$\int \left\| \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j(t) u(x_j) \frac{j}{n} \right\| dt \leq C \left( \sum_{j=1}^{j=n} \|x_j\|^p \right)^{1/p},$$

on peut donc écrire :

$$\int \left\| \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j(t) u(x_j) \frac{j}{2n} + \sum_{j=n+1}^{2n} \varepsilon_j(t) u(x_{j-n}) \frac{j}{2n} \right\| dt \leq C 2^{1/p} \left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|^p \right)^{1/p},$$

mais par le principe de contraction, le premier membre est plus grand que :

$$\frac{1}{2} \int \left\| \sum_{j=n+1}^{2n} \varepsilon_j(t) u(x_{j-n}) \right\| dt$$

qui est lui-même égal à  $\frac{1}{2} \int \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t) u(x_i) \right\| dt$  ; on obtient donc :

$$\int \left\| \sum \varepsilon_i(t) u(x_i) \right\| dt \leq C 2^{1+1/p} \left( \sum \|x_i\|^p \right)^{1/p},$$

c'est-à-dire i).

\*\*\*

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] E. DUBINSKY, A. PELCZYNSKI et H.P. ROSENTHAL : *Studia Math*, 44, 1972, p. 617.
- [2] J. HOFFMANN-JØRGENSEN : Sums of independent Banach space valued random variables. Aarhus Universitet. Preprint series- 1972-73 n°15.
- [3] G. PISIER : Type des espaces normés. C.R.A.S. Série A, t. 276. P. 1673.
- [4] Séminaire Maurey-Schwartz 1972/1973.
- [5] Séminaire Schwartz 1969/1970.

\*\*\*\*\*