SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C. RYLL-NARDZEWSKI
A. WOYCZYNSKI

(Annexe) Convergence en mesure des séries aléatoires vectorielles à multiplicateur borné

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A27_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1973-1974

CONVERGENCE EN MESURE DES SERIES ALEATOIRES VECTORIELLES A MULTIPLICATEUR BORNE

par
C. RYLL-NARDZEWSKI
et
A. WOYCZYŃSKI

Annexe

Juin 1974

Si la série Σf_i de variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach quelconque est convergente commutativement en mesure, $\Sigma \lambda_i f_i$ est convergente commutativement en mesure pour tout $(\lambda_i) \in l_\infty$.

1. Cette note est une continuation de la note [1]. Nous rappelons qu'une série Σx_i d'éléments d'un groupe topologique $\mathfrak{X}$ est dite commutativement convergente lorsqu'elle reste convergente indépendemment de l'ordre de ses termes. La proposition suivante est essentiellement un résultat classique dû à Orlicz (voir aussi [1], théorème 1).

Proposition 1 : Soit (x_i) une suite d'éléments d'un groupe topologique abélien séquentiellement complet. La convergence commutative de la série Σx_i est équivalente à la convergence de toutes les séries $\Sigma \varepsilon_i x_i$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$ choisis arbitrairement.

Soit $(\mathfrak{X}, \|.\|)$ un espace de Banach et soit $(T, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré normé. Par définition $L^0(T, \mathcal{A}, \mu ; \mathfrak{X}) \equiv L^0(\mathfrak{X})$ est l'espace linéaire métrique complet de toutes les fonctions mesurables sur $(T, \mathcal{A}, \mu)$ à valeurs dans $\mathfrak{X}$ (c'est-à-dire limites μ-presque partout de fonctions étagées) muni de la quasi-norme

$$\|f\|_0 = \min \{ c : \frac{1}{c} \mu \{t : \|f(t)\| > c\} \leq 1\}$$

qui donne à l'espace $L^0(\mathfrak{X})$ une topologie équivalente à celle de la convergence en mesure μ. Nous montrons ci-dessous le théorème suivant :

Théorème 1 : Soit $\mathfrak{X}$ un espace de Banach. Si pour tout $\varepsilon_i = \pm 1$ la série $\Sigma \varepsilon_i f_i$, $f_i \in L^0(\mathfrak{X})$, est convergente dans $L^0(\mathfrak{X})$ alors pour toute suite $(\lambda_i) \in l_\infty$ la série $\Sigma \lambda_i f_i$ est convergente dans $L^0(\mathfrak{X})$.

Dans le cas où $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$, ce théorème a été obtenu par Maurey et Pisier [2] mais notre méthode de démonstration est différente et plus directe. La proposition 1 et le théorème 1 entraînent immédiatement le théorème suivant qui répond affirmativement à la question posée dans ([3], Problem III.6.8]

Théorème 2 : Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach. Dans $L^0(\mathcal{X})$ la convergence commutative d'une série Σf_i est équivalente à la convergence des séries $\Sigma \lambda_i f_i$ avec des multiplicateurs $(\lambda_i) \in l_\infty$ arbitraires.

Nous remarquons que en vue du théorème 2 on peut construire une intégrale par rapport à une mesure (aléatoire) bornée à valeurs dans $L^0(\mathcal{X})$ pour toute fonction bornée mesurable réelle (pour des mesures aléatoires à valeurs indépendantes dans $L^0(\mathbb{R})$ une intégrale de ce type a été étudiée dans [4]) de la manière suivante :

Supposons que $(I,\mathcal{F})$ est un espace mesuré, $\mathcal{F}$ étant une σ-algèbre de sous-ensembles de I.
Soit $M : \mathcal{F} \to L^0(\mathcal{X})$ une fonction d'ensemble additive et bornée (c'est-à-dire $\{M(A) : A \in \mathcal{F}\}$ est bornée aux sens des espaces vectoriels topologiques).
Pour une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-étagée nous définissons $\int_I \varphi \, dM \in L^0(\mathcal{X})$ par la formule usuelle.
Maintenant, il est facile de voir (par le théorème 1 et parce que M est bornée ; voir aussi [3], theorem III.6.2) que $\{\int \varphi \, dM : \|\varphi\|_\infty \leq 1\} \subset L^0(\mathcal{X})$ est borné. Alors, il existe une extension linéaire et continue de l'opérateur

$$L^\infty_{\text{étagées}}(I,\mathcal{F}) \ni \varphi \to \int \varphi \, dM \in L^0(\mathcal{X})$$

à toutes les fonctions bornées et mesurables $\varphi \in L^\infty(I,\mathcal{F})$.

Evidemment une fonction d'ensemble additive arbitraire à valeurs dans un espace E de type F (c'est-à-dire métrisable et complet) n'est pas nécessairement bornée et on ne sait pas pour quels espaces E chaque mesure (dénombrablement additive) à valeurs dans E est bornée.
Toute mesure prenant ses valeurs dans un espace localement pseudo-convexe (voir [3], chapitre III) est bornée mais dans le cas de mesures avec valeurs dans $L^0(\mathcal{X})$ (même si $\mathcal{X} = \mathbb{R}$) la réponse est inconnue.

2. Démonstration du théorème 1.

D'après le lemme 2 de [1], la suite $\lambda = (\lambda_i)$, $|\lambda_i| \leq 1$, étant donnée, on a : pour toute suite $(x_i) \subset \mathfrak{X}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P\left\{(\varepsilon_i) : \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\| > \frac{1}{8}\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\|\right\} \geq \frac{1}{8},$$

où $P = \frac{1}{2}(P_o + P_\lambda)$, et P_λ est une probabilité sur l'ensemble des suites (ε_i), $\varepsilon_i = \pm 1$, telle que les variables aléatoires $(\varepsilon_i) \to \varepsilon_j$, $j = 1, 2, \ldots$ sont indépendantes et $\int \varepsilon_j \, dP_\lambda = \lambda_j$.

Alors, la suite $(f_i) \subset L^o(\mathfrak{X})$ étant donnée pour tout $t \in T$ nous avons

$$P\left\{(\varepsilon_i) : \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i(t)\right\| > \frac{1}{8}\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t)\right\|\right\} \geq \frac{1}{8}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à la mesure μ nous obtenons

$$(\mu \otimes P)\left\{(t, (\varepsilon_i)) : \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i(t)\right\| > \frac{1}{8}\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t)\right\|\right\} \geq \frac{1}{8}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

D'après le théorème de Fubini

$$(1) \qquad \max_{(\varepsilon_i)} \mu\left\{t : \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i(t)\right\| > \frac{1}{8}\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t)\right\|\right\} \geq \frac{1}{8}, \quad n \in N.$$

Remarquons que nous prenons ce maximum sur un ensemble fini.

Maintenant, soit

$$T_1 \stackrel{df}{=} \left\{t : \frac{1}{8}\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t)\right\| > c\right\}, \quad c > 0,$$

et

$$\mu(T_1) > 0.$$

Posons $\mu_1(A) \stackrel{df}{=} \dfrac{\mu(A \cap T_1)}{\mu(T_1)}$, $A \in \mathcal{A}$.

Alors, d'après (1) appliquée à la mesure μ_1, on a

$$\max_{(\varepsilon_i)} \mu_1\{t : \|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i(t)\| > c\} \geq \max_{(\varepsilon_i)} \mu_1\{t : \|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i(t)\|$$

$$> \frac{1}{8} \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t)\| \} \geq \frac{1}{8} , n \in \mathbb{N} ,$$

et, finalement, par la définition de la mesure μ_1, on a

$$(2) \quad \max_{(\varepsilon_i)} \mu \{t : \|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i(t)\| > c\} \geq \frac{1}{8} \mu \{t : \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t)\| > 8c\}, n \in \mathbb{N},$$

et le théorème 2 est ainsi entièrement démontré.

En concluant, nous remarquons que l'inégalité (2) entraîne que pour tout $c > 0$

$$\{ c : \frac{1}{c} \max_{(\varepsilon_i)} \mu \{t : \|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i(t)\| > c\} \leq 1\} \subset$$

$$\subset \{ \frac{1}{8}c : \frac{1}{c} \mu\{t : \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t)\| > c\} \leq 1\}$$

et que la dernière inclusion et l'utilisation de la définition de la quasi-norme $\|\cdot\|_0$ nous donnent aussi le résultat quantitatif suivant :

<u>Théorème 3</u> : Soient $\mathfrak{X}$ un espace de Banach, $(f_i) \subset L^0(\mathfrak{X})$ et $(\lambda_i) \in l^\infty$, $|\lambda_i| \leq 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\|_0 \leq 8 \max_{(\varepsilon_i)} \|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i\|_0 .$$

***

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. MUSIAL, C. RYLL-NARDZEWSKI et W.A. WOYCZYNSKI : Convergence presque sure des séries aléatoires vectorielles à multiplicateur borné. Comptes Rendus 278, 5 mai 1974.

[2] B. MAUREY et G. PISIER : Un théorème d'extrapolation et ses conséquences, Comptes Rendus 277 (1973), 39-42.

[3] S. ROLEWICZ : Metric linear spaces , PWN, Warszawa 1972.

[4] K. URBANIK and W.A. WOYCZYNSKI : Random integral and Orlicz spaces. Bull. Acad. Polon. Sci. 15 (1967), 161-169.

****

Institut de Mathématiques
de l'Université de Wroclaw
et
Institut de Mathématiques
de l'Académie Polonaise des Sciences,

pl. Grunwaldzki 2/4, 50384 WROCLAW,

POLOGNE.